

相互作用を及ぼしあう周期的な欠陥の成長パターンについて

EVOLUTION PATTERN OF
PERIODICALLY DISTRIBUTED AND INTERACTING DEFECTS

小国 健二*・堀 宗朗**・池田 清宏***

Kenji OGUNI, Muneo HORI and Kiyohiro IKEDA

*学生員 東京大学 工学系研究科土木工学専攻 (〒113 東京都文京区本郷 7-3-1)

**正会員 Ph.D. 東京大学 工学部助教授 (〒113 東京都文京区本郷 7-3-1)

***正会員 Ph.D. 東北大学 工学部助教授 (〒980 仙台市青葉区青葉)

In the nature, it is often observed that a certain pattern is formed for periodically distributed defects. In such process of the pattern formation, the evolution often tends to occur only for certain selected defects. Mathematically, this is understood as the breakage of symmetry, and has been analyzed in the framework of the group theory which concerns the defect geometry. However, the source of these phenomena is the mechanical interaction among defects that obeys physical laws. Examining the nature of such interaction effects, this paper analyzes the bifurcation of the growth of a periodic array of defects. From the group theory, it is rigorously shown that when the uniform pattern (the identical evolution of all defects) is broken, only the alternate pattern (the evolution of every two defects) can take place, as often observed for various materials. This conclusion is rather general, and can be applicable to explain a phenomenon that as the evolution proceeds, every two, every four, ..., every 2^n defect remains evolving, until the evolution is localized.

Key Words : Pattern formation, Group theory, Interaction, Total Potential Energy

1. まえがき

地盤材料内における欠陥の発生や成長は周期性を持つ特定のパターンを伴うことがある。これは、実験室での砂や粘土のずれせん断試験におけるリーデル線の発生から、中部日本の活断層の入れ子構造まで様々なサイズの現象において観察される¹⁾。このような現象は一般にパターン形成と呼ばれる。パターン形成は地盤材料に限らず、様々な材料において観察される現象である。そのため、パターン形成は、物性によらない何らかの共通のメカニズムにより支配されていると考えられている。さらに、パターン形成は工学的にも重要な課題となる。例えば、材料内に最初分散して発生した微小な欠陥が、相互作用を及ぼしあって選択的に成長し、材料全体の破壊に至るというプロセスをたどることがあるため、この欠陥の成長パターンを捉えることは、材料の破壊を予測・解析するうえで必要不可欠である。

パターン形成の解明は様々な工学・科学分野において重要な課題であるが、数学的には、対称性の喪失として理解されており、群論を適用した分岐解析が盛んに行われている²⁾³⁾⁴⁾。欠陥の成長パターンを例にこの分岐解析の概要を説明すると、欠陥の成長に対する支配方程式を形式的に設定し、欠陥の形状や配置の対称性を利用して、この支配方程式が分岐する際に分岐解が満たす条件を明らかにし、この条件から形成される

パターンを見つけるものである。この取扱は純粋に数学的であり、幾何形状の対称性の他は物理的な考察を受けることはない。その結果、非常に一般的な結論を導くことが可能となる。その反面、欠陥の成長に強い影響を及ぼす相互作用は支配方程式に特に組み込まれておらず、力学現象としての考慮が払われることはあまりない。上記の材料全般に見受けられるパターン形成は、何らかの共通した性質を持つ相互作用により引き起こされると予想される。したがって、力学的な相互作用をできるだけ一般的に取扱い、これに群論を用いた解析を適用することができれば、欠陥の成長パターン形成に関して、群論に基づく数学的取扱から導かれる以上の結論を得られることが期待される。

相互作用の一般的な特徴を見つけ、それを利用することで、本研究では、任意の材料に周期的に配置された欠陥の成長パターンに関して考察する。論旨を明確に説明するため、一次元的に配置された周期クラックの進展を簡単な例題としてとり上げる。この問題では、最初、全てのクラックは一様に成長するが、ある臨界点を超えると分岐が発生し、各々のクラックの成長に差異が生じることとする。本研究が対象とするのは、この分岐発生後のクラックの成長パターンである。各々のクラックの進展の支配方程式は形式的に導かれる。この支配方程式は、クラックの周期性による対称性に加えてクラック同士の相互作用の特性を考慮すること

で、冪級数に展開した形式として表すことが可能である。この展開された支配方程式に対し、群論を利用した分岐解析を適用することにより、クラック成長のパターンの一般的な特性が導かれることになる。さらに、この結果を拡張することで、高次の分岐(引続き起こるクラック成長時の分岐)や高次元(2・3次元周期配置)の問題に関する一般的な特性も導かれる。

2. 問題の設定

図-1上段に示すように、平面上に等間隔 d で並ぶ長さ a のクラックの1次元周期構造を考える。無限遠方での外力をパラメーター σ^0 で表す。外力パラメーター σ^0 の増加に伴って、各クラックは対称性¹により、最初全く同じ長さで成長するが、ある外力の時にこの様な成長パターンが破れることを仮定する。この一様以外の成長パターンは大きく2つのグループに分けることができる。すなわち、1) 何らかの周期性を伴うパターン、2) 周期性を伴わないパターン、である。ここでは、前者の、何らかの周期性を伴ってクラックが成長を続ける場合を考える。問題となるのは、どのような周期性が現れるかである。実験室等で観察されるように、一つおきにクラックが成長するのか、それとも、局所的に一つのクラックが成長するのかは、不明である。

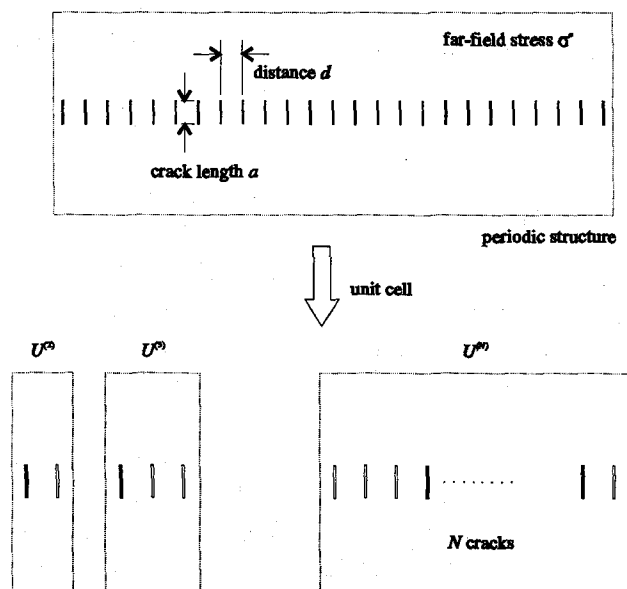


図-1 クラックの1次元周期構造

本研究では、分岐する際に現れるクラック成長の周期性を、任意の N 個おきに同じ長さのクラックが現れる、とする。例えば、 $N = 2$ の場合は互い違いにクラック

¹ それぞれのクラックは曲がりなりねじれたりすることなくまっすぐに成長すると仮定する。

クが成長する場合に対応し、 N が十分大きい場合には、局所的に一つのクラックのみが成長することに対応している。この問題に対するモデルとして、 N 個のクラックを含むセルを単位体²とする周期構造を考える。この設定の下で、以下の問題を設定する。

周期的に配列されたクラックの成長において、ある周期性を伴って一様でない成長パターンが生じる場合、この周期を表す単位体の中に含まれるクラック数 N 、および、その結果生じる周期構造のパターンは何か？

なお、 N_1 と N_2 のクラックを持つ単位体は、 $N_1 N_2$ のクラックを持つ単位体の一部とみなすことができるため、 N_1 と N_2 のクラックの分岐は $N_1 N_2$ のクラックの分岐を考えれば十分である。この結果、 N は偶数としてもよいことになる。

上の問題を解く際には、材料の変形状態を規定する釣合式と、クラックの進展を規定する進展則を考えなければならない。前者は一般に変位についての境界値問題となり、後者はクラック近傍の応力やひずみ等の物理量が満たすべき関係となる。クラックの配置や大きさ等の幾何形状が分かると、変位の境界値問題を解くことにより物理量が求められる。この結果、進展則はクラックの幾何形状に対する支配方程式となる。次の章で示すように、境界値問題を変分問題に置き換えてポテンシャルを導入し、クラックの対称性のみならず相互作用を考慮することで、この支配方程式の一般的な形式を規定することが可能であり、分岐解の特性が把握される。

3. 問題の定式化

図-1下段に示すように一様でない成長が任意 N 個のクラックを単位体とする周期構造を形成するとしたとき、単位体内の i 番目のクラックを Ω^i 、その長さを a_i とする。 $\{a_i\}$ はクラックの幾何形状を表すパラメーターとなる。ここで、変位場 u 、 $\{a_i\}$ に対して、単位体のエネルギーに対応する次の汎関数を定義することができる。

$$\Pi(u, \{a_i\}) = U(u, \{a_i\}) - W(u, \sigma^0; \{a_i\}) + \sum_i 2\mu a_i \quad (1)$$

ここに、 U と W はそれぞれひずみエネルギーと外力仕事を表し、 μ は表面エネルギーである。変位場 u が釣合式 $\delta \Pi = 0$ を満たすとき、 $\partial \Pi / \partial a_i = 0$ は Ω^i についての破壊条件となる。この変位場をクラック長の関数とみなして、 $\partial \Pi / \partial a_i \equiv G^i$ とおくと、 Ω^i の進展

² 単位体は、一般には周期構造の最小単位(この例題における1つのクラックを含む領域)を指すが、ここでは N 個のクラックを含む領域を単位体とし、個々のクラックは小単位体とする。

則は、

$$\delta G^i = \frac{\partial G^i}{\partial \sigma^0} \delta \sigma^0 + \sum_{j=1}^N \frac{\partial G^i}{\partial a_j} \delta a_j = 0 \quad (2)$$

である。

全てのクラックが同じ大きさであれば、 $\partial G^i / \partial \sigma^0$ は i によらない一定値をとる。ここで、 $\partial G^i / \partial a_j \equiv J_{ij}^{(N)}$ 、 $-\partial G^i / \partial \sigma^0 \equiv G_0^{(N)}$ と置くと、 $\delta G^i = 0$ は

$$J_{ij}^{(N)} \delta a_j = G_0^{(N)} \delta \sigma^0 \quad (3)$$

となる。右肩の添字 (N) は単位体のクラック数が N であることを示す。 $\partial G^i / \partial a_j$ はクラックの相互作用を表す³ため、相互の距離 ($l = \min \{|i-j|, (N-|i-j|)\}$) が等しい Ω^i と Ω^j のペアについては $\partial G^i / \partial a_j$ は等しくなる。よって、 $\partial G^i / \partial a_j = J_l^{(N)}$ と書ける (図-2参照)。

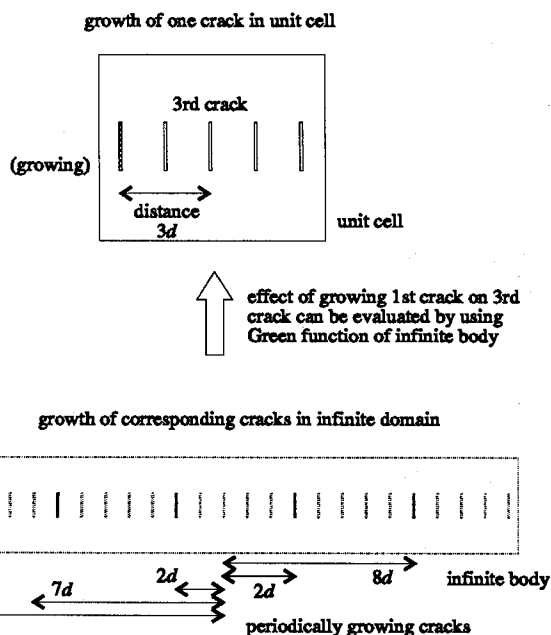


図-2 周期構造における相互作用の評価

$J_l^{(N)}$ が $1/ld$ に関する次の冪級数展開を許すことを仮定する⁴。

$$J_{ij} = J_l^{(N)} = \begin{cases} R_0^{(N)} & \text{for } i = j \\ \sum_{m=2}^{\infty} R_m^{(N)} \left(\frac{1}{ld}\right)^m & \text{for } i \neq j \end{cases} \quad (4)$$

クラックが小さく d が大きい場合、式 (4) の右辺の冪級数は収束するが、クラックが大きくなり相対的な距離が小さくなると収束しなくなる。したがって、以下

³ $G^i \propto \mu^i - \mu$ (μ^i : i 番目のクラックのエネルギー解放率) とおけるため $\partial G^i / \partial a_j$ の物理的意味は j 番目のクラック長の変化による i 番目のクラックのエネルギー解放率の変化である。よって $\partial G^i / \partial a_j$ は i 番目のクラック近傍における応力の変化すなわちひずみの変化により評価される。

⁴ $R_0^{(N)}$ 、 $R_m^{(N)}$ は個々の問題によって変わる係数である。

の議論では、 $ld \gg 1$ 、つまり、クラックの相対距離が十分大きい場合を仮定する。

式 (4) の右辺の妥当性を次のように示す。 $J_l^{(N)}$ の物理的な意味は、 Ω^1 の長さの変化による Ω^{l+1} のエネルギーの変化である。これは Ω^1 と Ω^{l+1} の相互作用の結果である。破壊力学に則り、このエネルギーをクラック先端のひずみエネルギーと考えると、相互作用は Ω^1 が作る Ω^{l+1} の先端のひずみを評価すればよく、これは両者の間の距離の関数として表すことが可能である。この関数自体は個別の問題に応じてさまざまである。しかし、距離の逆数に関して級数展開ができることを仮定すると、リーディングタームが何乗から始まるかは、等価介在物法⁵の適用により評価することができる⁵⁾。いま弾性係数 C^0 の無限体中に欠陥等の介在物 Ω が存在する場合を考える。等価介在物法ではこの介在物 Ω を等価な応力場 $\sigma^*(x)$ に置き換える。 $\sigma^*(x)$ の形にかかわらず、点 x でのひずみは、Green 関数 $G^0(x, y)$ を用いて、以下のように表される。

$$\begin{aligned} & \text{sym} \left\{ \nabla x \otimes \left(\int_{\Omega} G^0(x, y) \cdot (\nabla y \cdot \sigma^*(y)) dV_y \right) \right\} \\ &= -\text{sym} \left\{ \int_{\Omega} (\nabla x \otimes (\nabla y \otimes G^0(x, y))) : \sigma^*(y) dV_y \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 ∇x は x に関する偏微分、 sym は対称部分、 $:$ と $\otimes$ は 2 階のコントラクションとテンソル積を表す。式 (5) より、1 つの介在物を作るひずみ場は Green 関数の 2 階微分と同じオーダーを持つことが分かる。したがって、介在物を作るある点のひずみエネルギーも高々同じオーダーとなる。2 次元問題では距離 $|x-y|$ が十分大きいとき、 $|G^0(x, y)| \sim \log|x-y|$ となる。よって、クラック先端のひずみエネルギーで見た場合、1 つの介在物の相互作用は $G^0(x, y)$ の 2 階微分のオーダー $O(|x-y|^{-2})$ を持つことがわかる。複数の介在物が存在する場合の相互作用はそれぞれの介在物による相互作用の重ね合わせで与えられる。本研究が対象とする問題は無限体中のクラックの 1 次元配列であるため、式 (5) の重ね合わせを考えることで、相互作用は $O(|x-y|^{-2})$ でクラックからの距離に応じて減少することとなる。したがって、式 (4) の冪級数展開の初項は $m=2$ となる。

クラックに限らず任意の欠陥に関して、等価介在物法を全く同様に適用することで、相互作用によるひずみやひずみエネルギーを距離に関して展開した場合、そのリーディングタームのオーダーはグリーン関数の 2

⁵ 等価介在物法は介在物を含む弾性係数 $C(x)$ の不均一体を考えるかわりに弾性係数 C^0 をもつ均一体に $\sigma^*(x)$ を導入することにより介在物が存在する場との差を無くし、場の等価性を保つ手法である。つまり、 $C(x): \epsilon(x) = C^0: \epsilon(x) + \sigma^*(x)$ として介在物の代わりに均一体に体積力が働いた系を考える。この系では $\sigma^*(x)$ は体積力として働くため、 $\sigma^*(x)$ による変位場は Green 関数 $G^0(x, y)$ を用いて、 $u(x) = \int G^0(x, y) \cdot (\nabla y \cdot \sigma^*(y)) dV_y = - \int \nabla y \otimes G^0(x, y) : \sigma^*(y) dV_y$ と表される。

階微分のそれと一致する、という結果を得ることができる。よって、2次元無限体中の欠陥の1次元配列一般について、式(4)の形の冪級数展開によって相互作用を評価できる。式(1)と同様のエネルギーに対応する汎関数を用いることで、相変化、空隙等のいかなる欠陥に対しても、それらが周期的に配列されている場合、その進展則は式(3)と本質的に同じ形で表すことが可能である。次章以降では式(3)の分岐を群論を用いて解析するが、その結果は、クラックに限らず、全ての欠陥に対して適用することができる。

4. 群論を用いた分岐解析

クラックの長さの変化を $\mathbf{da} = (da_1, da_2, \dots, da_N)$ とすると、 $\det[\mathbf{J}] \neq 0$ のときは式(3)からただちに $\mathbf{da} = da(1, \dots, 1)$ となる。一方 $\det[\mathbf{J}] = 0$ のときには分岐解が発生する。この分岐解は、 $\mathbf{J}$ の固有値と固有ベクトルから求めることができる。ここでは単位体が群論でいう D_N 不変な系であることに着目して、固有値と固有ベクトルを求める。なお、 D_N 不変な系とは $2\pi/N$ の回転および鏡像変換によって生成される群の作用で変化しない系のことを指し、単位セルはその両端をつないで円を作ると、 D_N 不変な系となる。

D_N の既約表現に対応した正規直交基底から、固有ベクトルが導かれる。³⁾⁴⁾ 1次既約表現に対応して、

$$\mathbf{h}_N = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \cos 2\pi k | k = 1, \dots, N \right\}$$

$$\mathbf{h}_{N/2} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \cos \pi k | k = 1, \dots, N \right\}$$
2次既約表現に対応して、

$$\mathbf{h}_{j+} = \left\{ \frac{2}{\sqrt{N}} \cos \frac{\pi j(2k-1)}{N} | k = 1, \dots, N \right\}$$

$$\mathbf{h}_{j-} = \left\{ \frac{2}{\sqrt{N}} \sin \frac{\pi j(2k-1)}{N} | k = 1, \dots, N \right\}$$

$$(j = 1, \dots, N/2 - 1)$$

この固有ベクトルに対応した固有値は以下のように計算される。 $\mathbf{h}_N$ と $\mathbf{h}_{N/2}$ に対応して

$$\lambda_N = R_0^{(N)} + J_{\frac{N}{2}}^{(N)} + 2 \sum_{k=2}^{\frac{N}{2}} J_{k-1}^{(N)} \quad (6)$$

$$\lambda_{\frac{N}{2}} = R_0^{(N)} + J_{\frac{N}{2}}^{(N)} (-1)^{\frac{N}{2}} + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} J_k^{(N)} (-1)^k \quad (7)$$

$\mathbf{h}_j$ に対応して、

$$\lambda_j = R_0^{(N)} + J_{\frac{N}{2}}^{(N)} \cos \pi j + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} J_k^{(N)} \cos \frac{2\pi j}{N} k \quad (8)$$

ここで、 λ_N は主経路に対する固有値であり、 λ_j ($j = 1, \dots, N/2$) は分岐解に対する固有値である。よって分岐経路の選択は分岐解を与える固有値のうち、最初にどの固有値が0になるかにかかってくる。この固有値

はエネルギーに対応する汎関数から導かれているため、通常は正である。したがって、最小の λ_j が分岐解を与えることになる。

5. 一様な成長パターンから分岐するパターン

式(4)を利用すると、 λ_j のうち $\lambda_{N/2}$ が最小となることが示される。この結果、一様な成長パターンが壊れる場合、 $\mathbf{h}_{N/2}$ に対応する成長パターンが選択されることとなる。式(7)、式(8)より、

$$\lambda_j - \lambda_{\frac{N}{2}} = \{ \cos \pi j - (-1)^{\frac{N}{2}} \} J_{\frac{N}{2}}^{(N)} + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \{ \cos \frac{2\pi j}{N} k - (-1)^k \} J_k^{(N)} \quad (9)$$

右辺に式(4)を代入し、右辺を変形すると

$$\lambda_j - \lambda_{\frac{N}{2}} = \sum_{m=2}^{\infty} R_m^{(N)} d^{-m} \left[- \left(\cos \pi j - (-1)^{\frac{N}{2}} \right) \left(\frac{N}{2} \right)^{-m} + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \left(\cos \frac{2\pi k}{N} j - (-1)^k \right) k^{-m} \right] \quad (10)$$

第2章において N を偶数としたのと同様の議論により、 $N = 4m$ (m : 正の整数) としてよい。よって、上式右辺[]内の第1項は0もしくは正となる。また第2項は補遺に述べるように、任意の $j = 1, \dots, N/2 - 1$ について正となる。したがって、 $\lambda_j - \lambda_{N/2} > 0$ が得られる。

最小固有値 $\lambda_{N/2}$ が0のときにはこのモードに対応する係数は決定できない。しかし $\lambda_{N/2}$ が0の後にすぐに負になる場合は、この固有値に対応する分岐モードは不安定となる。主経路の解が $(+1, +1, \dots, +1, +1)$ であること、および各クラックの進展量は負にはならないことを考慮すると、最も不安定なモードとして $\mathbf{da} = da(0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1)$ というように1つおきにクラックが成長するパターンが現れることがわかる。したがって、設定された問題の解として、

クラックの距離が十分離れている場合に一様な成長からの分岐が起こるのであれば、 $N = 2$ の単位体において1つおきにクラックが成長するパターンが現れる

6. 理論の拡張

第2章で設定された問題の解は、より一般的なパターン形成の問題についても適用することが可能である。但し、適用に際しては、同一の形状の欠陥が周期的に配置されるという対称性と欠陥の間の相互作用が式(4)のような展開を許すことが、前提条件となる。本

章では、1) 高次の分岐 (引続き起こるクラック成長時の分岐)、2) 高次元配列 (2・3 次元周期配列)、の 2 つの場合について前章までの結果を拡張する。

6.1 高次の分岐

1 つおきにクラックが成長するモードが発生した後、更に外力パラメーターが変化し、次の分岐が発生する場合に形成されるパターンを考える。最初の分岐において成長したクラックと、その隣の成長を止めたクラックを 1 つのセルとみなす。このとき、クラックの幾何形状を表すパラメーターはクラック長 a_i から、隣合う 2 つのクラック長を表すベクトルパラメーターに拡張される。このベクトルパラメーターに関しても進展則は式 (3) と本質的に同じ形式で表すことができる。また、小単位体同士の相互作用も式 (4) と同様に距離の逆数による冪級数に展開することができる。この周期構造も D_N 不変な系であることを考慮すると、群の表現は前章までの議論に用いたものと同じである。したがって、群の規約表現は変わらず、また、このベクトルパラメーターに対応する固有ベクトルと固有値も全く同じ形式で表すことができる。以上より、前章において得られた結果は、この 2 つのクラックをセルとする周期構造にも適用され、次に発生する分岐は、2 つのクラックを含むセルが 1 つおきに成長を続け、この結果、4 つの内の 1 つのクラックのみが成長を続けるパターンとなることが結論される (図-3 参照)。

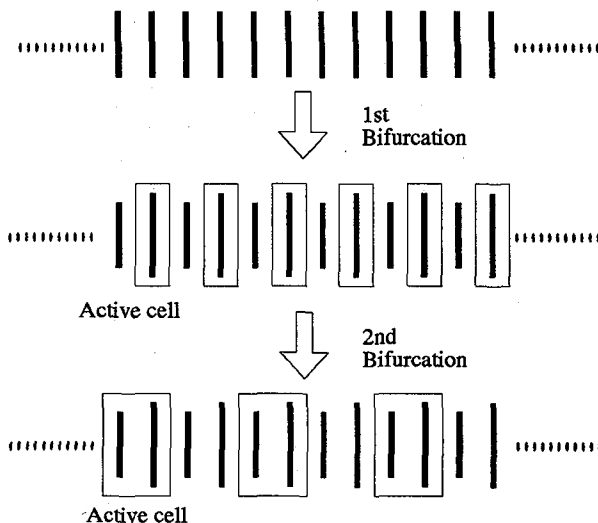


図-3 分岐モード

このような 1 つおきの自己発展は、さらに引き続いて分岐を起こし、 2^K のクラックの内の 1 つのみが成長を続けるというパターンが生まれる。クラックの成長が進む結果、クラックの間隔が相対的に小さくなり、相互作用を距離の冪級数に展開することができな

くなるまで、このような分岐しか起こらないことになる。以上より、

規則的に欠陥等が配置された周期構造モデルにおいて、欠陥の自己発展における分岐現象は、1 つおきの自己発展が連続的に発生するか、あるいは周期性を失った自己発展をするという 2 つのパターンに限定される

という結論が得られる。

6.2 高次元の周期性を伴って配列された欠陥の成長パターン

今までの議論では、欠陥が 1 次元的な周期性を持つ場合を想定していたが、得られた結論は、2・3 次元の周期性を伴って配列された欠陥の成長にも拡張することができる。図-4 に示すように、欠陥が 2 次元の周期性を伴って平面上に配列されている系について考える。この系について、 i 行 j 列に配置された欠陥の大きさを表すパラメーターを a_{ij} と表す。この欠陥の進展則を、外力パラメーター σ^0 を用いて、 $G_{ij}(a_{kl}; \sigma) = 0$ と表すことができる⁶とする。群論によれば、このような 2 次元の周期性は、変換 Q_{ijkl} によって以下のように表すことが可能である。

$$Q_{ijmn} G_{mn}(a_{kl}; \sigma) = G_{ij}(Q_{klmn} a_{mn}; \sigma) \quad (11)$$

変換 Q_{ijkl} は一般に 4 階のテンソルである。

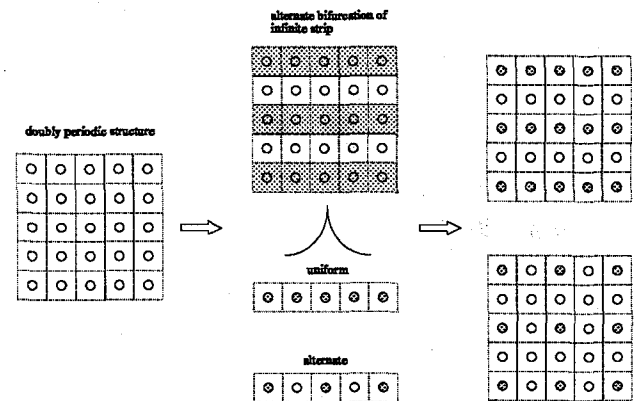


図-4 欠陥の 2 次元配列

2 次元周期配列は 軸線方向を同じくする複数の 1 次元周期配列がその軸線方向とある角度をもつ方向に規則正しく並んだものとみなされるため、 Q_{ijkl} を 2 つの行列の積、 $Q_{ijkl} = Q_{ik}^1 Q_{jl}^2$ 、として表現される場合を考える。ここで、例えば、 Q_{ik}^1 は個々の 1 次元配列の周期性、 Q_{jl}^2 は 1 次元周期配列が規則正しく並ぶことの周期性に対応している。この場合、問題は 1 次元周期構造の分岐として扱うことになる。すなわち、分

⁶ $G_{ij}(a_{kl}; \sigma)$ は $G_{ij}(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{NN}; \sigma)$ の略である。

岐の起こり方として、1次元周期配列が規則正しく並ぶ構造の一樣性が壊れる場合と、1次元周期配列の一樣性が壊れる場合の2つを考える。前章の結果より、比較的相互作用が弱い場合には、成長を続ける欠陥を持つ配列は1つおきになるか、それとも1次元周期配列の中で1つおきの欠陥が成長を続ける、ことになる。この結果、図-4に示すような欠陥成長のパターンが現れることになる。欠陥が3次元的に配列されている場合にも、3次元配列を3つの1次元配列の積として考えることが可能であり、この場合にも、相互作用が弱い場合には、成長する欠陥やそれを含む配列が交互に発生するパターンが現れることが予想される。

7. まとめ

相互作用に関する力学的な考察を加えることで、対称性の喪失として得られる欠陥成長のパターン形成に関して、より一般的な結論を得ることができた。この結論は、1次元的に配置された欠陥の周期構造の成長に際しては、欠陥の相互作用が相対的に小さいうちは、一樣な成長からの分岐は1つおきの成長パターンを生じる、というものである。したがって、1次元周期構造において欠陥の成長の分岐解析を行う際には、隣り合う2つの欠陥を単位体とすればよいこととなる。

群論を適用することで、より一般的な欠陥や欠陥群の成長パターンに関する知見が得られた。例えば、最初に分岐によって、成長する欠陥が1つおきに現れた系に対しても、2つの欠陥からなる単位体を考えることで、この単位体の成長の群論による表現形式は、通常の1次元周期構造となんら変わらない。これを利用して、高次の分岐パターンの解明がなされた。また、高次元に周期配列された欠陥の成長パターンについても、これを1次元周期配列の積とみなすことができる場合、相互作用が弱ければ1つおきの成長パターンが見られるという結論が得られた。

付録 I $\lambda_j - \lambda_{N/2} > 0$ の証明

本文で示した、式(10)の右辺第2項が正であることを示すためには次のように定義される関数 $D_m^{(N)}(\theta)$ が $0 < \theta < \pi$ の範囲で単調減少であることを示せばよい。

$$D_m^{(N)}(\theta) = \sum_{k=1}^{N/2} k^{-m} \cos(k\theta) \quad (I.1)$$

ここで、 $dD_m^{(N)}/d\theta = -\sum k^{-m+1} \sin(k\theta)$ であり、この関数は $\theta = 0$ と $\theta = \pi$ で0となるから、 $0 < \theta < \pi$ で $dD_m^{(N)}/d\theta < 0$ であればよい。

$d^2 D_m^{(N)}/d\theta^2 = -D_{m-2}^{(N)}$ であるから、 $D_{m-2}^{(N)}$ が単調減少であれば $D_m^{(N)}$ も単調減少となる。したがって、全ての $D_m^{(N)}$ が単調減少となることを示すには、 $D_2^{(N)}$ と

$D_3^{(N)}$ が単調減少であることを示せばよい。この2つの関数は $N/2$ 項で打ち切ったフーリエ級数展開であり、 $\lim_{N \rightarrow \infty} D_m^{(N)}$ を数値計算によって図示すると図-5のようになる。明らかにこの2つの関数は単調減少をしている。したがって、十分 N が大きければ、 θ が0と π の近傍にある場合を除き、 $D_2^{(N)}$ と $D_3^{(N)}$ は単調減少となる。この近傍でも $D_2^{(N)}$ と $D_3^{(N)}$ は単調減少となることは厳密に証明できる(詳細は参考文献⁶⁾)。以上より、 $\lambda_j^{(N)} - \lambda_{N/2}^{(N)} > 0$ であることが証明された。

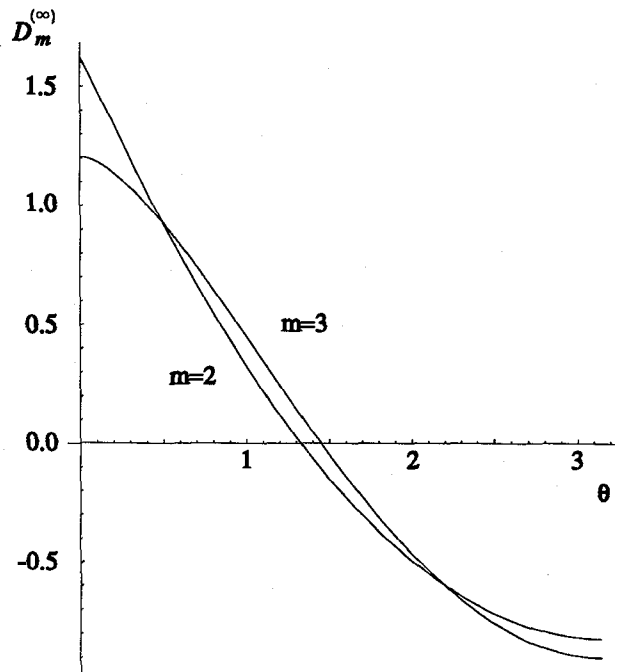


図-5 $D_m^{(\infty)} = \lim_{N \rightarrow \infty} D_m^{(N)}$ のグラフ

参考文献

- 1) 金折裕司：甦る断層，近未来社，1993.
- 2) 佐藤光：パリティ物理学コース 物理数学特論 群と物理，丸善，1992.
- 3) K. Murota, K. Ikeda : Computational Use of Groupe Theory in Bifurcation Analysis of Symmetric Structures, SIAM J.Sci.Stat.Comput.Vol.12, No.2, pp.273-297, March 1991.
- 4) 池田 清宏・中沢 正利・和知 聡：長方形板の分岐階層構造の境界条件による退化，土木学会論文集 No.507/ I-30, pp.65-75, 1995.1
- 5) S. Nemat-Nasser and M. Hori : Micromechanics, Overall Properties of Heterogeneous Materials, Elsevier, 1993.
- 6) K. Oguni, M. Hori, K. Ikeda : ANALYSIS ON EVOLUTION PATTERN OF PERIODICALLY DISTRIBUTED DEFECTS, (to be published)
- 7) 小国健二・堀宗朗・後藤寛英：成長する欠陥に対する周期構造モデルの群論による分岐解析，土木学会第50回年次学術講演会講演概要集共通セッション(平成7年9月)，1995.

(1995年9月18日受付)