

粒状体の応力ひずみ関係における増分非線形性の微視力学的解析

A MICROMECHANICAL ANALYSIS OF THE INCREMENTAL NONLINEARITY
IN THE STRESS-STRAIN RELATIONSHIP OF GRANULAR MATERIALS

岸野 佑次*, 森谷 直樹**

Yuji KISHINO, Naoki MORITANI

*工博 東北大学教授 工学部土木工学科 (〒980-77 仙台市青葉区荒巻字青葉)

**工修 仙台市泉区建設部建設課 (〒981-31 仙台市青葉区中央2丁目1の1)

Generally, the stress-strain relationship for granular materials is nonlinear, even when it is expressed in the incremental form. In this paper, such a problem is discussed with the aid of a set of numerical tests of a granular model. In the first place, a bi-axial shearing test was performed under the constant mean-stress condition. The result includes the strain-softening part after the peak state in the stress-strain curve. This test gave a set of kinematical and statical data at successive intermediate stages of the loading. A series of branch tests for the intermediate data was performed to determine the incrementally nonlinear tangential relationships and to verify the adoptability of these relationships. These model tests suggest the predictability of strain-strain relationship in terms of at least eight tangential stiffness matrices at each stage with the exception of that for the original loading direction. Furthermore, it was found that the bifurcation phenomena should be analyzed with a special scheme other than using ordinal tangential stiffness relationship.

Key Words : granular materials, incremental nonlinearity, tangential stiffness, bifurcation

1. 緒 論

地盤等の構成則モデルの定式化における非常に困難な問題として載荷経路により発揮される力学特性が異なることが挙げられよう。このような特性の相違はある載荷状態に付加する載荷増分の方向の相違に対しても生じ、増分非線形性¹⁾の問題と呼ばれる。従来の塑性論においても、降伏後の載荷増分方向に対していわゆる載荷と除荷の区別があり、2種の応力増分-ひずみ増分関係を必要とするという点では増分非線形性が現れている。しかし、問題は増分非線形性の程度であり、通常1系統の変形モードに支配される従来の塑性論に対して、例えば2系統の変形モードを仮定する2重すべりモデル²⁾や、載荷増分方向に対して力学特性が連続的に変化する亜塑性体モデル³⁾などはより高次の非線形性を考慮したものと言うことができよう。さらに、地盤等の構成則モデルにおいては変形局所化にどのように対処すべきであるががとくに重要である。応力ひずみ曲線のピーク付近ではすでに局所化の影響が含まれているはずであるが、構成モデルにおいてこの影響を分離してとり扱う必要がある。

以上のような問題を検討するに当たっては、地盤内部のマイクロメカニクスを把握することが重要である。しかし、実際の地盤における実験には困難が伴う。これは、同一供試体に対する多重応力経路の実験ができないことや供試体内部の詳細な力学データを得ることが困難なことによる。そこで、本論文においては、粒状体を対

象として、粒状要素法⁴⁾を用いた要素試験シミュレーションを行い、応力ひずみ関係における増分非線形性の問題や変形局所化の取り扱いについて検討することとした。

本研究においては、円形領域にパッキングされた粒状集合体モデルの要素試験を行うため、従来の粒状要素法における境界制御法に改良を加えたアルゴリズムを用いた。シミュレーション解析として、まず、粒状集合体モデルについて平均応力一定の2次元2軸せん断載荷試験を行った。つぎに、この載荷経路に沿って応力増分ひずみ増分関係がどのように変化するかを調べるために、第1のブランチ試験を行った。各接線剛性行列については固有値解析を行い、接線剛性行列で表される応力ひずみ関係の特異性の有無について調べた。さらに、接線剛性行列により第1のブランチ試験以外のひずみ増分に対しても適用することが可能であるかどうかを調べるために第2のブランチ試験を行い、粒状集合体の増分非線形性や変形局所化との関連について考察した。

2. 要素試験シミュレーション法

2.1 概 説

粒状体個々の粒子に関する運動方程式に基づいて解析を行う個別要素法⁵⁾に対し、本論文において用いる粒状要素法⁴⁾は剛性行列に基づき粒状体の静的挙動を精度良く解析することを目的として開発されたシミュレーション解析法である。粒状要素法における剛性行列は粒子の

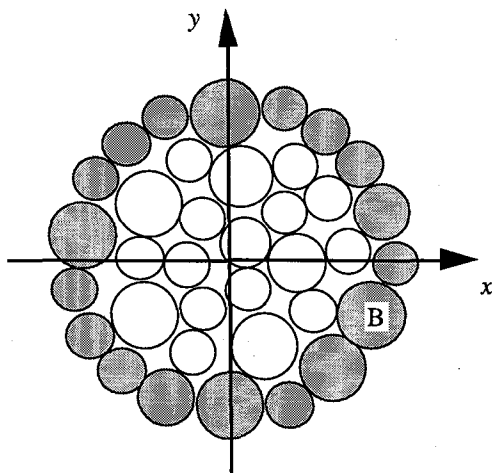


図-1 要素試験モデル

接続状態の変化に応じて時々刻々改訂される。その際、剛性行列の逆行列の計算が可能な場合には、剛性行列を直接用いて解析することにより解析アルゴリズムを単純にし、要素試験や固有値解析⁷⁾などを行い易くすることができる。本文においては剛性行列を直接的に用いた要素試験シミュレーション解析を行うが、ここでは、境界の制御方法を中心として、この手法の概要について記す。図-1 に示すように、粒状体モデルは2次元円粒子集合体とし、境界条件を付与するための境界要素（外側の網掛で示した要素）と境界要素に囲まれた領域内の内部要素とからなる。計算手順の概要は以下の通りである。

- 1) 境界要素の移動を定めるひずみ増分の中の未知成分および内部要素の変位・回転増分を独立変数とする全体剛性方程式を定める。
- 2) 応力成分の中、制御の対象とする成分について目標値の現在値からの差を求める。また各内部要素に作用している接触力と物体力の合力およびモーメントを算定し、不釣り合い量を算定する。
- 3) 1), 2) より未知量の算定を行うが、この結果をもとに各粒子に変位・回転を与えると、剛性関係が変化するので、1) に帰って計算を繰り返す。2) の目標値は載荷ステップの始めに設定し、繰り返し計算が収束するまで一定に保つ。なお、ひずみ増分による境界制御については載荷ステップの始めにこのひずみ成分を与え、収束計算が終わるまで一定に保てばよい。

2.2 解析領域の設定と変形・応力の定義

要素試験においては、境界の制御による異方性が生じないように、図-1 に示すような円形領域のモデルを用いる。同図において外側の網掛で示した境界要素はそれにより囲まれた内部領域を制御するためのものであり、境界要素同士の力学的相互作用は考慮しない。また、境界要素は以下に示すような拘束の下に移動し、回転は生じないとする。

境界要素に対して要素試験に応じた境界条件を与える。

その際、境界要素 B の重心位置の座標 $(X, Y)_B$ は常に次に示す対称一次変換で定められる位置に移動するものとする（添字 0 は初期状態を表す）。

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 1-\varepsilon_x & -\gamma_{xy}/2 \\ -\gamma_{xy}/2 & 1-\varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}_B \quad (1)$$

変形が微小な場合、変換係数行列の中の変数は微小ひずみに一致し、 ε_x , ε_y は伸縮ひずみ（圧縮正）、 γ_{xy} はせん断ひずみ（工学ひずみ）となる。

このことから、境界の移動の自由度は境界要素数に拘わらず3である。

式(1)によって定義される変形に、エネルギー的に対応する応力は Piola - Kirchhoff の第1 応力テンソルである。この応力テンソルは、各境界要素において内部要素との間に生じる接触力の合力 $(f_x, f_y)_B$ を用いて、次式で定義される⁸⁾（圧縮正）。

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \frac{1}{A_0} \sum_B \begin{bmatrix} f_x X_0 & f_x Y_0 \\ f_y X_0 & f_y Y_0 \end{bmatrix}_B \quad (2)$$

ここに、 σ_x , σ_y は垂直応力、 τ_{yx} , τ_{xy} はせん断応力、 $\sum_B$ は全境界要素に関する和、 A_0 は初期状態の領域の面積である。なお、変形が微小な場合、第1 Piola - Kirchhoff 応力テンソルは Cauchy 応力テンソルに等しく、上式の定義とモーメントの釣り合いより、 $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ である。

2.3 接触剛性行列と要素剛性行列

境界要素と内部要素、および内部要素同士の間に仮定する力学的相互作用モデルの模式図を図-2 に示す。2 粒子 G, G' の間のばね要素は接触点における粒子接触の弾性的な性質を表すためのものである。接触点における接触力と相対変位の関係は一般には非線形性を考慮すべきであるが、相対変位に含まれる弾性部分は微小であるので、ここではばね要素の特性として線形性を仮定する。ただし、2 粒子が非接触となった場合には接触力は零とする必要がある。相互作用モデルにノーション要素を付与する。

2 粒子間に生じるすべりに関しては Coulomb の摩擦則を仮定する。接触力の法線方向成分および接線方向成分を p_n および p_t 、粒子間の摩擦角を ϕ とするとき、2 粒子間に相対すべりを生じない条件は次のように表すことができる。

$$|p_t| \leq p_n \tan \phi \quad (3)$$

接触点における法線方向および接線方向のばね剛性をそれぞれ c_n , c_t と置く。2 粒子間にすべりが生じる場合には、接線方向粒子間ばねの抵抗もなくなるとする。したがって、ばね剛性 c_t については状況によって修正する必要がある。2 粒子の接触点 C における接触力増分ベクトルを $\Delta \mathbf{P}_C = (p_n, p_t)_C^t$ 、対応する相対変位増分ベクトルを $\Delta \mathbf{U}_C = (\Delta u_n, \Delta u_t)_C^t$ と置くと、これらの間には次の関係式が成立する。

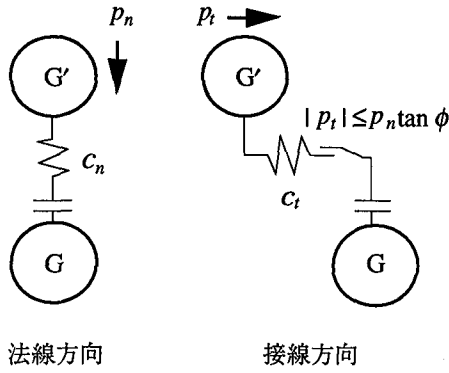


図-2 2粒子間力学相互作用モデル

$$\Delta P_C = S_C \Delta U_C \quad (4)$$

ここに、

$$S_C = \begin{bmatrix} c_n & 0 \\ 0 & c_t \end{bmatrix} \quad (5)$$

を接触剛性行列と称する。

粒状集合体の中の着目する粒子 G と他の粒子 G' との間の接触点 C における単位法線ベクトルおよび単位接線ベクトル n, t を図-3 のように定義する。このとき、粒子 G に作用する接触力 p の法線方向成分および接線方向成分はそれぞれ $p_n = -p \cdot n, p_t = -p \cdot t$ と表される。粒子 G' が固定された状態で、粒子 G に変位増分と回転増分を与えたときの粒子間接触点 C における相対変位増分ベクトル $\Delta U_C = (\Delta u_n, \Delta u_t)_C^t$ は次式で表される。

$$\Delta U_C = T_C \Delta X_G \quad (6)$$

ここに、 $\Delta X_G = (\Delta x, \Delta y, r \Delta \omega)_G^t$ は粒子 G の中心の x, y 方向の変位増分と回転増分に半径 r を乗じた量からなる変位増分ベクトル、

$$T_C = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 1 \end{bmatrix}_C \quad (7)$$

は変換行列である。

ここで、周辺粒子を全て固定し、粒子 G に変位増分ベクトル $\Delta X_G = (\Delta x, \Delta y, r \Delta \omega)_G^t$ を生じさせるために粒子 G の中心に付加すべき力とモーメントを表すベクトル $\Delta F_G = (\Delta f_x, \Delta f_y, \Delta m/r)_G^t$ を付加力ベクトルと称する。付加力ベクトルは各接触点における接触力増分ベクトル ΔP_C により次式のように表すことができる。

$$\Delta F_G = \sum_C T_C^t \Delta P_C \quad (8)$$

ここに、 T_C^t は式(7)で与えられる変換行列の転置行列であり、 $\sum_C$ は粒子 G の全ての接触点に関する和を表す。

式(4), (6), (8)より、次式が成立する。

$$\Delta F_G = S_G \Delta X_G \quad (9)$$

ここに、 S_G は粒子 G に単位の変位と回転を生じさせるために G の中心に付加すべき力とモーメントを与える行列であり、

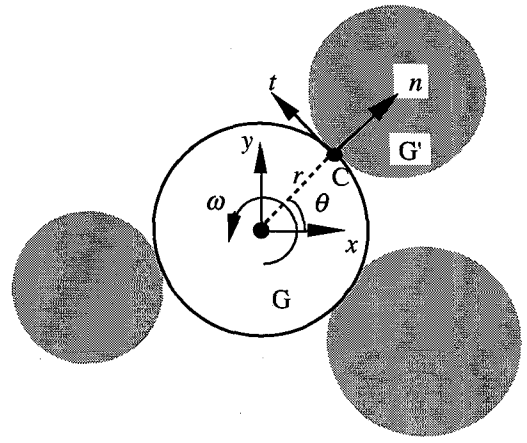


図-3 粒子モデルに対する座標系の設定

$$S_G = \sum_C T_C^t S_C T_C \quad (10)$$

として求めることができる。 S_G を主要素剛性行列と称する。

さらに、粒子 G に変位増分ベクトル ΔX_G を生じさせるためには、隣接粒子 G' にも力とモーメントを付加する必要がある。この付加力ベクトルは次式のように与えられる。

$$\Delta F_{G'} = S_{G'G} \Delta X_G \quad (11)$$

ここに、 $S_{G'G}$ は S_G と同様に定めることができ、これを従要素剛性行列と称する。

2.4 全体剛性方程式

式(9), (11)で与えられる主従の要素剛性行列を重ね合わせて境界条件を考慮すれば、全体剛性方程式

$$\Delta F = S \Delta U \quad (12)$$

を得る。ここに、 ΔF は境界を介して加える外力の増分および各粒子の重心に加える力とモーメントの増分を並べた付加力ベクトルである。また、 S は全体剛性行列、 ΔU は変位増分ベクトルで、 ΔF に対応する変位・回転増分を並べたものである。

2.2 に述べたように境界の移動の自由度は3であるので、変位増分ベクトル ΔU の中、境界要素に関する部分は、拘束条件式(1)に基づいてひずみ増分 $\Delta \epsilon$ により表すこととし、残りの内部要素に関する部分を $\Delta U'$ と置く。これに対応して、付加力 ΔF の中、境界要素に関する部分は、応力の定義式(2)をもとに応力増分 $\Delta \sigma$ に置き換え、残りの内部要素に関する部分（静的問題では理論上零）を $\Delta F'$ と置く。このような置き換えにより、式(12)の代わりに、次の要素試験のための剛性方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \Delta \sigma \\ \Delta F' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \epsilon \\ \Delta U' \end{bmatrix} \quad (13)$$

ここに、 S' は対称行列であり、完全ひずみ制御要素試験に対する全体剛性行列である。

上式の剛性方程式の誘導の過程において、拘束条件式(1)が考慮されており、領域全体の剛体変位・回転は自

由度から除外されているので、外部的拘束条件による S' の特異性はない。しかし、接触点をもたない粒子の存在など、パッキング内部の不安定性に起因する特異性が生じ得る。このような特異性を取り除くための便法として、行列 S' の対角項の中、内部要素に対応する部分には十分に小さな値を加えておくこととする。

2.5 制御方法と解析アルゴリズム

ひずみ増分ベクトルの制御部分を $\Delta \epsilon_1$ 、対応する応力増分ベクトルを $\Delta \sigma_1$ 、また、応力増分ベクトルの制御部分を $\Delta \sigma_2$ 、対応するひずみ増分ベクトルを $\Delta \epsilon_2$ と置くとき、式 (13) で表される剛性関係は次式のように分解される。

$$\begin{bmatrix} \Delta \sigma_1 \\ \Delta \sigma_2 \\ \Delta F' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \epsilon_1 \\ \Delta \epsilon_2 \\ \Delta U' \end{bmatrix} \quad (14)$$

上式は $\Delta \epsilon_1$ 、 $\Delta \sigma_2$ 、 $\Delta F'$ を与えて、 $\Delta \sigma_1$ 、 $\Delta \epsilon_2$ 、 $\Delta U'$ を求める方程式となっている。既知量の中、 $\Delta \epsilon_1$ による制御については、各载荷ステップのはじめに $\Delta \epsilon_1$ を式 (1) に代入して境界要素に変位を与えることにより実現させる。 $\Delta \sigma_2$ と $\Delta F'$ については次のような考え方により値を代入する。

もし、連続弾性体のように剛性行列が载荷ステップにおいて変化しない場合には、 $\Delta \sigma_2$ は1ステップに与える所定の応力増分、 $\Delta F'$ は零である。しかし、実際の解析においては、常にある誤差を含みかつ増分計算の途中においても全体剛性行列 S が変化するので、境界要素に作用する接触力より式 (2) により算定される応力の値が制御応力の値に一致せず、また、内部要素の釣り合いが乱される。このことから、 $\Delta \sigma_2$ には現载荷ステップの制御応力の目標値 σ_2 と現時点で式 (2) により算定される応力の差を与え、 $\Delta F'$ には現段階の不釣り合い状態を解消するような付加力ベクトル ΔF を加える。粒状集合体が所定の精度で平衡状態を満たすまで、このような応力増分や付加力ベクトルの改訂を行い逐次解析を続ける。

以上のような考え方に基づく解析アルゴリズムを以下に示す。境界に与えるひずみ増分 $\Delta \epsilon_1$ と現载荷ステップの制御応力の目標値 σ_2 に対して、ひずみ増分 $\Delta \epsilon_2$ 、および内部要素の変位・回転増分 $\Delta U'$ を求めるための方程式は次式となる。

$$\begin{bmatrix} S_{22} & S_{23} \\ S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \epsilon_2 \\ \Delta U' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \sigma_2^* \\ \Delta F^* \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \sigma_2^* \\ \Delta F^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_2 - \sigma_2^* \\ F^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_{12} \\ S_{13} \end{bmatrix} \Delta \epsilon_1 \quad (16)$$

ここに、 σ_2^* は逐次計算の各ステップの接触力分布に対して式 (2) により算定される応力、 F^* は各内部要素毎に算定される物体力と接触力の合力・モーメントの和であり、内部要素 G についての付加力ベクトルは次式で与

えられる。

$$F_G^* = B_G - \sum_C T_C^t P_C \quad (17)$$

ここに、 $B_G = (b_x, b_y, 0)_G$ は粒子 G に作用する物体力であり、第2項 (負の符号も含む) は粒子 G の全接触点における接触力の合力と中心まわりのモーメントを与える。

逐次計算の過程においては、式 (15) により $\Delta \epsilon_2$ と $\Delta U'$ を求め、求まった $\Delta \epsilon_2$ を式 (1) に代入して境界要素の移動量を算定して境界要素を移動させるとともに、 $\Delta U'$ に従って内部要素に変位・回転を与える。しかし、この移動により一般に全体剛性行列 S が変化し、新たな不釣合状態を生じる。そこで、更に平衡状態に近づけるために、改訂した剛性行列と接触力をもとに、所定の精度が得られるまで繰り返し計算を行うことが必要となる。各载荷ステップの第一回目の逐次計算を済ませた後に続く繰り返しの逐次計算においては式 (16) の $\Delta \epsilon_1$ は零とする。

3. 平均応力一定2軸せん断試験

3.1 解析条件

要素試験シミュレーションの基本経路として、平均応力一定2軸せん断ひずみ制御試験 (以下本試験と称する) を行った。図-4 は本試験において用いた粒状体モデルの初期状態である。モデルは3種類の粒径より成る粒子で構成され、各粒径毎の面積の総和が等しくなるように配合した。本文では離散性に起因する定性的な性質を明らかにすることを目的とし、このような少ない粒子数のパッキングを用いることとした。なお、初期状態を得るに当たっては、応力制御载荷プログラムを用いた。

シミュレーション解析に用いた諸定数の値を表-1 に示す。本試験においては平均応力 $p = (\sigma_x + \sigma_y)/2$ は常に一定に保ち、 x 方向最大圧縮ひずみ、 y 方向最大伸張ひずみとなるようにひずみ主軸を固定し、最大せん断ひずみ増分 $\Delta \gamma_{\max}/2 = (\Delta \epsilon_x - \Delta \epsilon_y)/2$ を一定に制御する2軸せん断要素試験を行う。最大せん断ひずみ増分の値は、ひずみ空間における増分ベクトルの大きさが $10^{-3} \%$ /step となるように選んだ。

また、要素の重量は無視することとした。なお、表にあるような拘束応力下においては、釣り合い式における粒子重量の影響は小さく、これを無視しても結果に大きな差異は生じないと考えられる。

3.2 解析結果

(1) 応力ひずみ関係

図-5 は本試験で得られた応力ひずみ関係である。

$(\sigma_x - \sigma_y)/2$ のグラフより、 $\gamma_{\max}/2 = 0 \sim 0.15 \%$ では弾性に近い変形が生じていることがわかる。 $\gamma_{\max}/2 = 0.15 \%$ 以降では非弾性変形が大きくなり、 $\gamma_{\max}/2 = 0.9 \%$ 付近でピークを迎えた後軟化が生じている。図中の τ_{xy} のグラフより $\gamma_{\max}/2 = 0 \sim 0.6 \%$ では、多少の増減はあるがほぼ零となっている。しかし、

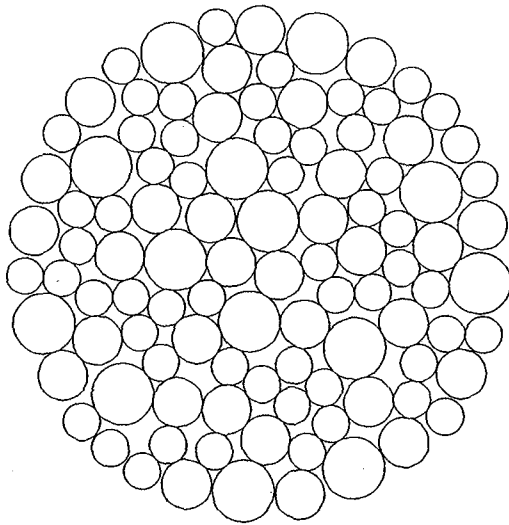


図-4 解析に用いたモデルの初期パッキング

表-1 解析に用いた諸定数

要素数	103 個
要素半径	1.0, 0.8, 0.6 cm
面積比	1 : 1 : 1
要素単位体積重量	0
要素間バネ定数	
法線方向	1000 kgf/cm
接線方向	700 kgf/cm
要素間摩擦角	$\tan 25^\circ$
平均応力	2.0 kgf/cm^2
最大せん断ひずみ増分	$\sqrt{2}/2 \times 10^{-3} \%$

$\gamma_{\max}/2 = 0.6 \%$ 付近から後は単調増加の傾向にあるが、このことは、ひずみの主軸が x および y 方向に制御されて $\gamma_{xy} = 0$ であるのに対して、応力の主軸はこの区間において徐々に回転していることを示している。

図-6 は体積ひずみ ($\Delta \varepsilon_x + \Delta \varepsilon_y$; 圧縮正) の符号を換えたダイレイタンスーのグラフである。図-5 と比較すると、 $\gamma_{\max}/2 = 0 \sim 0.15 \%$ の弾性的な変形領域では、ダイレイタンスーの増加は比較的緩やかであるが、その後はより急なほぼ一定の勾配で増加している。このことから、用いたパッキングは密詰めであるといえよう。

(2) 変位ベクトルと回転

図-7 に $\gamma_{\max}/2 = 0.6 \sim 0.9 \%$ の载荷の間に生じた変位ベクトルおよび回転を示した。図-5 の応力ひずみ関係を参照すると、応力の値は $\gamma_{\max}/2 = 0.9 \%$ 付近でピーク値となるが、この段階で、粒子群を左上から右下に2分する線を境として、左横ずれの食い違いの傾向(設定した問題に対しては右横ずれもあり得る)が見られ、規模の小さな変形局所化モードが現れたものと考えられる。

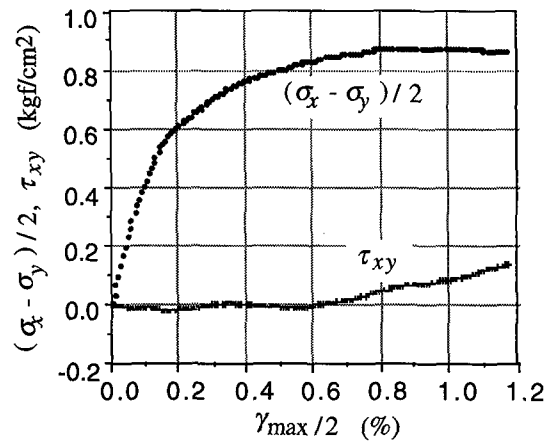


図-5 応力ひずみ関係

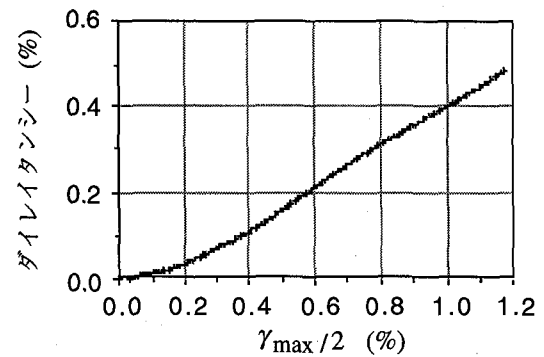
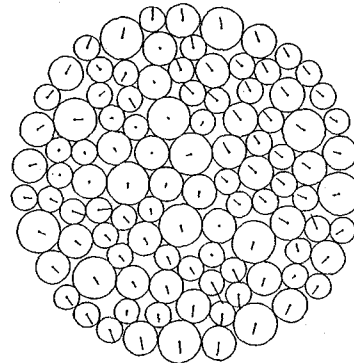
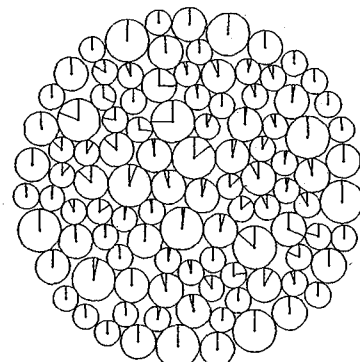


図-6 ダイレイタンスーの変化



a) 変位ベクトル



b) 回転

図-7 変位ベクトルと回転 ($\gamma_{\max}/2 = 0.6 \sim 0.9 \%$)

4. ブランチ試験

4.1 ブランチ試験の概要

式(13)を $\Delta U'$ について解き、これを消去することにより応力増分ひずみ増分関係式を得る。しかし、この関係式は粒状体内部に滑りや接触点の形成・消滅がなく、線形弾性を仮定できる場合にのみユニークな接線剛性関係式となる。一般には、逐次解析の過程を経た後に非線形性に起因する力学特性の載荷方向依存性が現れるので、このような力学特性を明らかにするためには複数方向の載荷試験シミュレーションに基づく検討が必要となる。ここでは応力ひずみ関係における増分非線形性の問題を検討することを目的として、本試験の中途載荷段階を出発点とする複数方向のブランチ試験(図-8)を行い種々の検討を加える。

第1のブランチ試験においては、後に述べるように、次の接線剛性関係式中の接線剛性行列 $\mathbf{K}$ の成分 $K_{11} \sim K_{33}$ を、ひずみ増分を与える方向を考慮して定める。

$$\begin{bmatrix} \Delta \sigma_x \\ \Delta \sigma_y \\ \Delta \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_x \\ \Delta \varepsilon_y \\ \Delta \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

実際の土質供試体に対する実験においては、定められた特定の載荷経路に関する応力ひずみ関係を得ることはできても、その中途段階から分岐して、同一供試体の応力ひずみ関係がどのように変化するかを確かめることは不可能である。これに対して、シミュレーション解析においては、任意の載荷段階のパッキング情報と接触力分布を記憶させておくことができ、図-8に示すような分岐した経路における載荷を実現させることができる。

本試験の応力ひずみ関係は軟化部分を含んでおり、ピーク付近における接線剛性関係について、とくに本試験の載荷方向に適用される剛性行列が特異になることが予想される。そこで、各載荷段階において定める複数の接線剛性行列 $\mathbf{K}$ の対称部分について固有値解析を行い接線剛性行列の特異性の有無を調べることとする。

ここでは、さらに、上記の第1のブランチ試験より求めた各載荷段階における $\mathbf{K}$ が、第1のブランチ試験における載荷方向以外の載荷方向にも適用可能であるかをどうかを調べるために、載荷方向をさらに追加した第2のブランチ試験を行う。各ブランチ試験の結果は第1のブランチ試験に基づく予測値と比較して考察する。

4.2 接線剛性行列を定めるためのブランチ試験

(1) 解析方法

一般に接線剛性はひずみ増分の個々の成分の正負によって異なると考えられる。ここでは、まず、本試験の各載荷段階について、ひずみの個々の成分毎に単独に正および負の増分値を与えた一連のブランチ試験を行い、各増分方向の剛性を求める。本文においては、このようにして求めたひずみ増分の正負別の剛性の重ね合わせにより得られる複数の接線剛性行列により、応力ひずみ関係に

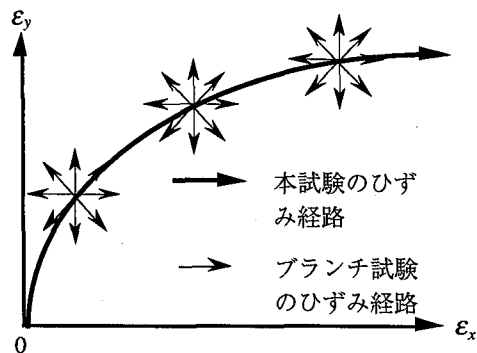


図-8 本試験とブランチ試験のひずみ経路

における増分非線形性が近似的に表現できると仮定して解析を進める。具体的手順は以下に示す通りである。

本試験の中途載荷段階を出発点として、ひずみ増分 $[\Delta \varepsilon_x, \Delta \varepsilon_y, \Delta \gamma_{xy}/2]^T$ の各成分を

$$1) [\Delta \varepsilon^b, 0, 0]^T_1 \quad \Delta \varepsilon^b \geq 0$$

$$2) [0, \Delta \varepsilon^b, 0]^T_2 \quad \Delta \varepsilon^b \geq 0$$

$$3) [0, 0, \Delta \varepsilon^b]^T_3 \quad \Delta \varepsilon^b \geq 0$$

のように、単独に正負2種類の増分を与えた6種類のひずみ制御のブランチ試験を行う。このブランチ試験の結果として、それぞれのブランチ試験に対応した応力増分が得られ、この結果を用いて、接線剛性行列各成分が列毎に次のように求まる。

$$\begin{bmatrix} K_{1\alpha} \\ K_{2\alpha} \\ K_{3\alpha} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta \varepsilon^b} \begin{bmatrix} \Delta \sigma_x \\ \Delta \sigma_y \\ \Delta \tau_{xy} \end{bmatrix}_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (19)$$

接線剛性行列はこれらの重ね合わせにより得られるが、ひずみ増分3成分の正負を考慮した組み合わせの数は 2^3 すなわち8個であり、接線剛性行列は8通り定義される。

以下、ひずみ増分に対する応力増分の応答値は、ひずみ増分3次元空間の8個の各象限毎に定義される上述の8個の接線剛性行列により与えられると仮定する。

図-9に8個の象限に分割されたひずみ増分空間を示す。本試験の載荷方向は $\Delta \varepsilon_x > 0, \Delta \varepsilon_y < 0, \Delta \gamma_{xy} = 0$ となるようなブランチ試験でありこの方向を基準として、8個の象限をそれぞれ以下のように呼ぶこととする。

象限A,A' : $\Delta \varepsilon_x > 0, \Delta \varepsilon_y < 0, \Delta \gamma_{xy} \geq 0$ (本試験の載荷方向)

象限B,B' : $\Delta \varepsilon_x < 0, \Delta \varepsilon_y > 0, \Delta \gamma_{xy} \geq 0$ (本試験の除荷方向)

象限C,C' : $\Delta \varepsilon_x > 0, \Delta \varepsilon_y > 0, \Delta \gamma_{xy} \geq 0$ (x, y 方向共に圧縮)

象限D,D' : $\Delta \varepsilon_x < 0, \Delta \varepsilon_y < 0, \Delta \gamma_{xy} \geq 0$ (x, y 方向共に伸張)

例えばひずみ増分 $\Delta \varepsilon_x > 0, \Delta \varepsilon_y > 0, \Delta \gamma_{xy} > 0$ を与えたとすると、このひずみ増分ベクトルは図中の象限Cに含まれ、その応力増分の応答値は象限Cに対応する剛性行列によって決まる。また、例えばひずみ増分 $\Delta \varepsilon_x > 0, \Delta \varepsilon_y = 0, \Delta \gamma_{xy} > 0$ を与えたとすると、このひずみ増分ベクトルは、象限Cと象限Aの境界面内にある。こ

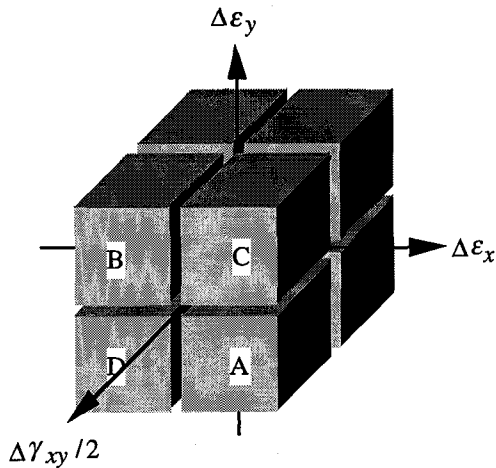


図-9 8個の象限に分割されたひずみ増分空間

の場合、上述の剛性行列の求め方からわかるように、 $\Delta\epsilon_y=0$ であるので、2つの象限のいずれに対応する接線剛性行列を用いても同一の応力増分応答値が得られる。

(2) 解析条件と解析結果

本試験における载荷の1ステップ当たりのせん断ひずみ増分は $\Delta\gamma_{\max}/2 = \sqrt{2}/2 \times 10^{-3}\%$ であるが、ブランチ試験はその100ステップ毎に、 $\gamma_{\max}/2 = 0\%$ から $\gamma_{\max}/2 = 16 \times \sqrt{2}/2 \times 10^{-1}\%$ までの17の载荷段階のデータを選んで行った。

上述のように、各载荷段階において8個の接線剛性行列を求めるために6方向のブランチ試験を行った。このブランチ試験に用いた諸定数は表-1に示したものと同様である。载荷に伴う接線剛性行列対角成分の変化の様子を図-10に示す。図中係数 K_{11} , K_{22} , K_{33} はそれぞれ $\Delta\epsilon_x > 0, \Delta\epsilon_y > 0, \Delta\gamma_{xy} > 0$ に対する剛性、係数 K'_{11} , K'_{22} , K'_{33} はそれぞれ $\Delta\epsilon_x < 0, \Delta\epsilon_y < 0, \Delta\gamma_{xy} < 0$ に対する剛性を表す。

この図より、伸張方向のy方向の剛性とせん断成分に対する剛性が同様に著しい低下を示していることがわかる。また、本試験における载荷方向の剛性の低下によって、正負のひずみ増分に対する剛性に差が生じている。すなわち、 $\Delta\epsilon_x > 0$ (圧縮) となるx方向においては $K_{11} < K'_{11}$ 、 $\Delta\epsilon_y < 0$ (伸張) となるy方向においては $K_{22} > K'_{22}$ となっている。とくに、伸張方向のy方向についての差が大きい。 K_{33} , K'_{33} については本試験において $\gamma_{xy} = 0$ であるので差異はほとんどない。

図-11は本試験载荷方向(象限A)における接線剛性行列非対角成分の中、1,2成分および2,1成分について示した。この図より接線剛性行列は非対称になることがわかる。逐次計算において収束に至る過程の各計算ステップにおける全体剛性行列は対称であるにも拘わらず、収束した結果より接線剛性行列を構成すると非対称になることが注目される。また、剛性の値は、図-10の場合と異なり、せん断初期の部分を除き一定値をとる傾向が見られる。

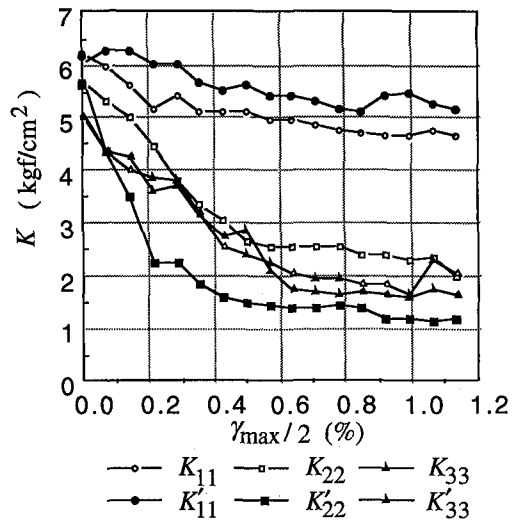


図-10 接線剛性行列対角成分の変化

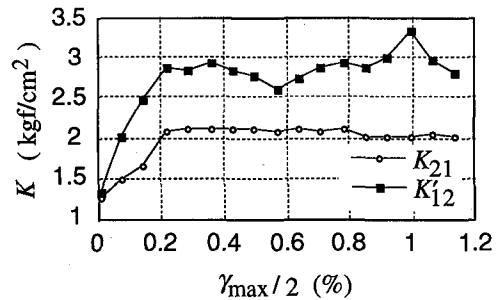


図-11 象限Aの接線剛性行列非対角成分の変化

4.3 接線剛性行列の固有値解析

(1) 解析方法

ここでは、前節で求めた接線剛性行列について、静的安定条件の充分条件であるHillの条件⁵⁾が満たされているかどうかの検討を行う。すなわち、いわゆる2次の仕事増分 $\Delta^2 W$ の正値性の検討を行う。いま、次式で示されるようなひずみモード Δe^* が存在するとすると、不安定変形が生じる。

$$\Delta^2 W = (\Delta e^*)^T K \Delta e^* = 0 \quad (20)$$

この Δe^* は、 K の対称部分 K^S の零固有値に対応する固有ベクトルであるので、このような変形モードの有無は、固有値を λ として与えられる方程式

$$K^S \Delta e^* = \lambda \Delta e^* \quad (21)$$

に基づいて固有値解析を行うことによって静的安定条件の充分条件が満たされているかを確認することができる。

前述のように、ブランチ試験で得られる接線剛性行列は各载荷段階毎に8個あるので、これらの接線剛性行列の対称部分 K^S について個々に固有値解析を行う。通常の一価の接線剛性行列の場合は固有値解析により得られる3個の固有ベクトルは全て実現するものである。しかし、8個のひずみ増分空間毎に定めた接線剛性行列から個々に得られる3個の固有ベクトルは、必ずしも着目している象限に含まれるとは限らない。実際、同一の対称行列に対する固有ベクトルは数学的に直交するので、着

目している象限内の有効な固有ベクトルの数は3個中高々1個で、その他の固有ベクトルは実現しないことになる。したがって、各載荷段階において以上のような手順で求まる8個以下の有効な固有モードはいずれも異なる行列に対するものであり、一般には直交しない。

(2) 解析結果

上述の方法に従って、17の載荷段階における8個の剛性行列の対称成分について、固有値解析を行った。各載荷段階において求めた固有値の載荷に伴う変化を図-12に示す。a)は、本試験の載荷方向を含むA, A'の象限について、b)は本試験の除荷方向を含むB, B'の象限について、c)は x, y 方向ともに圧縮となる象限C, C'について、d)は x, y 方向ともに伸張となる象限D, D'についてそれぞれプロットしたものである。これらの図の中、載荷段階によっては固有値が2個プロットされていないが、これは求めた固有ベクトル（またはそれに負の実数をかけたベクトル）が全て着目している象限に含まれていないためである。

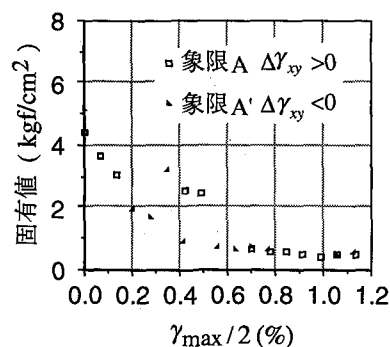
本試験の載荷方向を含む象限a)の場合は、全体的に他の場合より小さな値をとり、載荷の進行に伴い固有値が零に近づいている。しかし、ピーク時においても零以下にはならず、Hillの安定条件は依然として満たされている。つぎに除荷方向を含む象限b)の場合は、a)と同様の傾向を示すが、固有値はa)よりもやや大きめである。 x, y 方向ともに圧縮となる象限c)の場合においては、固有値は他に比べて大きい。 x, y 方向ともに伸張の象限d)の場合は、せん断ひずみ増分の正負による固有値の相違が顕著である。このような相違は他の場合にはみられないが、この結果には応力ひずみ関係図-5に見られたような非対称性が反映されていると考えられる。剛性行列の固有値は対応する固有ベクトルの方向にひずみを与える場合の剛性を表しているが、以上の事実より、本試験の全ての載荷段階を通して8個の剛性行列には零固有値が存在せず、本試験に現れるピーク時の剛性零のモードはこれらの剛性行列では表現できないことがわかる。

4.4 接線剛性行列の適用度検証のためのブランチ試験

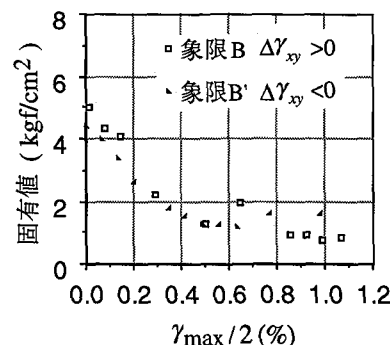
(1) 解析方法

4.2 においては、本試験の各載荷段階において、ひずみ増分3次元空間における8個の象限に対応する8個の接線剛性行列を求めた。ここでは、これらの接線剛性行列を求めるために行った第1のブランチ試験に追加して、 $\Delta \epsilon_x$ と $\Delta \epsilon_y$ を種々組み合わせたひずみ増分方向に対する第2のブランチ試験を行い、接線剛性行列が一般的に適用可能であるかどうかを検証する。検証は、この試験により求まる応力増分と、接線剛性行列により予測される応力増分の比を求めることにより行う。

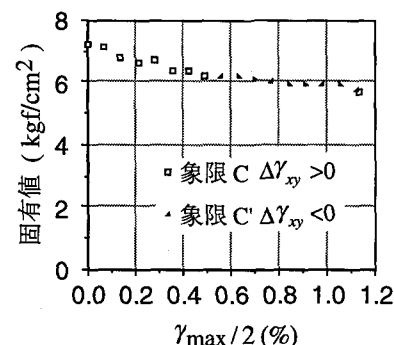
与えるひずみ増分は、次式で示す14方向とする。せん断ひずみ増分の影響は小さいと考えて $\Delta \gamma_{xy} = 0$ とし、 $\Delta \epsilon_x$ 、 $\Delta \epsilon_y$ のみを変化させることとした。



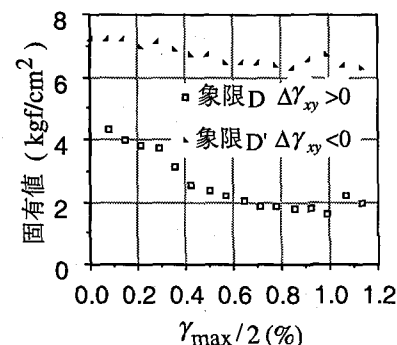
a) 象限A, A' (載荷方向)



b) 象限B, B' (除荷方向)



c) 象限C, C' (2軸圧縮)



d) 象限D, D' (2軸伸張)

図-12 接線剛性行列の固有値の変化

$$\Delta \varepsilon_x = \Delta \varepsilon^b \cos \theta \quad (22)$$

$$\Delta \varepsilon_y = \Delta \varepsilon^b \sin \theta \quad (23)$$

ここに、 $\Delta \varepsilon^b$ は4.2のブランチ試験と同じ値(0.001%)を用いる。 θ はひずみ増分空間におけるひずみ増分方向を表す。 θ として、 0° から 337.5° まで、 22.5° 間隔の値を用いる。ただし、 0° 、 90° 、 180° 、 270° は4.2におけるブランチ試験に含まれるので省略する。以上の12方向と、さらに、本試験で実際に生じたひずみ増分方向およびその逆方向の2方向を含め、14方向についての解析を行った。用いた諸定数は本試験と同様である。

接線剛性行列で予測される応力増分値の、このブランチ試験で求めた応力増分($\Delta \sigma_x^A$ 、 $\Delta \sigma_y^A$)に対する比

$$R_x = \frac{\Delta \sigma_x^B}{\Delta \sigma_x^A} \times 100 (\%) \quad (24)$$

$$R_y = \frac{\Delta \sigma_y^B}{\Delta \sigma_y^A} \times 100 (\%) \quad (25)$$

を求め、この比によって接線剛性行列の適用度を検証する。ここに、($\Delta \sigma_x^B$ 、 $\Delta \sigma_y^B$) は象限毎に異なる成分をもつ接線剛性行列 K を用いて次式により算定される応力増分である。

$$\begin{bmatrix} \Delta \sigma_x^B \\ \Delta \sigma_y^B \\ \Delta \tau_{xy}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_x \\ \Delta \varepsilon_y \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (26)$$

(2) 解析結果

典型的な載荷段階における接線剛性行列の適合性を調べた結果を図-13、14に示す。これらの図は、それぞれ、 $\gamma_{\max}/2 = 0.14\%$ および $\gamma_{\max}/2 = 0.92\%$ に対する場合である。図中 $0^\circ - 90^\circ$ 、 $90^\circ - 180^\circ$ 、 $180^\circ - 270^\circ$ 、 $270^\circ - 360^\circ$ の範囲は、それぞれ、接線剛性行列の象限 A、A'、象限 B、B'、象限 C、C'、象限 D、D' に対応する。また、図中の矢印は3.に示した本試験において実際に生じたひずみ増分方向を表す。また図-14の円で囲んだ点は、この点が負の値として求まり、原点を挟んで反対側にプロットされていることを示す。

図-13は初期の載荷段階に対するものであり、100%を示す円からのずれは僅かである。この場合、8個の接線剛性行列によって充分正確に応力増分ひずみ増分関係を予測することが可能であると言える。

図-14はピーク状態に対するものである。 R_x を見ると本試験の載荷方向および除荷方向に卓越して大きい値を示していることがわかる。また、 R_y については載荷方向に対するものが負の大きな値となっているが、これは実際の応力増分が負で、この載荷には明らかに軟化の傾向が含まれていることを示している。これらの方向に関しては、接線剛性行列による応力増分ひずみ増分関係の予測はできないことは明らかである。しかし、この極

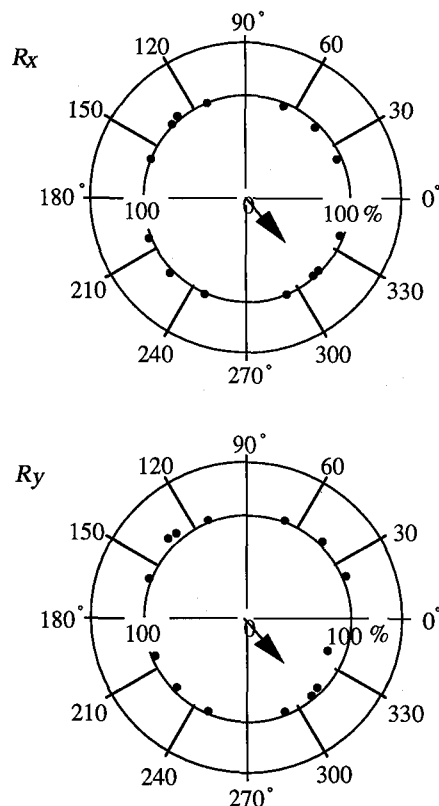


図-13 接線剛性行列の適合度
($\gamma_{\max}/2 = 0.14\%$)

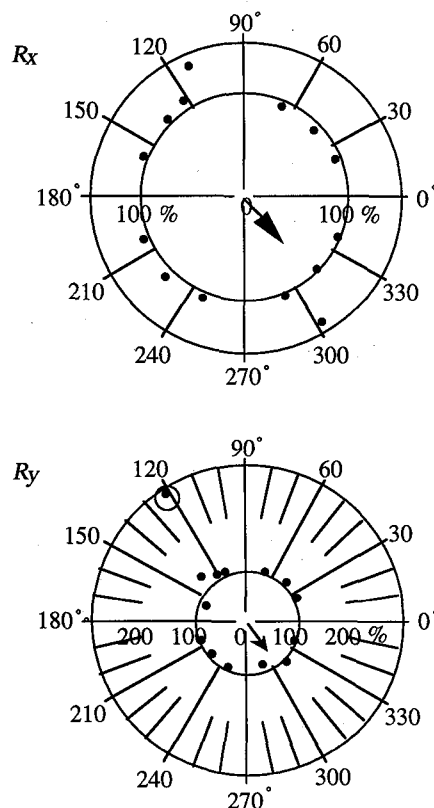


図-14 接線剛性行列の適合度
($\gamma_{\max}/2 = 0.92\%$)

く特異な方向を除けば、初期載荷段階と同様に予測が可能であると言える。

5. 結 論

本試験で得られた応力ひずみ関係は現実の密詰め砂などのせん断試験においても得られるような典型的なものであった。このような応力ひずみ関係におけるピーク前から軟化過程に至る力学挙動をどのように解析に反映するかという問題については従来より数多くの議論がなされてきたが、これを本質的に解決するためには、本論文におけるような離散的モデルによる力学的変化のメカニズムを詳細に検討する必要があると考えられる。

本論文においては、粒子の個数は限られたものではあるが、離散的モデルによる数値シミュレーション解析を通してこのような問題についての定性的な検討を行った。とくに、2次元粒状体に対する6種類のブランチ試験の結果から8個の接線剛性行列を定めれば、各載荷段階におけるほとんど全ての方向のひずみ増分に対して応力増分を充分予測できることがわかった。ただし、極く限られた特異な例外として、ピーク時付近以降においては、載荷方向またはその逆方向のひずみ増分に対しては接線剛性行列は適用できないこともわかった。これは要素内部に何らかの変形モードが形成され、この変形モードで指定されるひずみ増分方向に限っては他の方向とは全く異なった特異な挙動を示すことによると考えられる。実際、載荷とともに、応力主軸が回転して非対称性が現れることや、変位ベクトルのモードにも変形局所化の傾向を示唆するような横ずれの変位モードが観察されている。

8個の接線剛性行列の中には、その固有値が零に近づく傾向を示すものもあるが、ピーク時前後においても零固有値は得られず、硬化状態が維持されていることがわかった。このことから、接線剛性行列が有効であるのは安定的な変形を伴う場合に限られ、局所化や軟化を表すためには別の視点を必要とすると考えられる。したがって、局所化等の連続体的解析においても、通常の構成則としての接線剛性行列の他に何らかの力学特性を付加する必要があるのではないかと考えることができる。

一方、このような不安定性を除いた解析においては8個の接線剛性行列で充分増分非線形を表すことができるが、この8という数は本文における検討からは充分条件であるとしか言えない。この数をどの程度減らすことができるかは今後なお検討を要する。このことは、実用上、塑性論におけるように載荷と除荷の2個でよいという可

能性を含む。また、接線剛性行列は非対称であり、塑性論的には非関連流動則を示唆している。逐次解析の各ステップにおける全体剛性行列は対称であるにも拘わらずこのような非対称性が生じる原因は、一般に静的釣り合いに至る一連の変形過程に粒状体内部のすべりや接触点の形成・消滅という非弾性的挙動が含まれ、接線剛性行列がこのような非弾性的ブランチ試験における個々の剛性の重ね合わせとして定まることによる。従来安定性の要請から関連流動則を用いるべきであるという議論もあるが、以上のような理由により流動則は一般的には非関連的となることは現実のようである。

本論文において示したような粒状体の力学特性をどのように定式化するかは粒状体力学における重要な課題であると考えられるので、今後より規模の大きなシミュレーション解析を行うこと等を含め、粒状体のマイクロメカニクス、および巨視的粒状体力学の構成に関する研究を進めたいと考えている。

謝 辞

本研究を行うに当たり、東北学院大学工学部土木工学科飛田善雄助教授には種々ご討議を頂きました。ここに謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Darve, F. : Incrementally non-linear constitutive relationships, *Geomaterials - Constitutive Equations and Modelling* (ed. F. Darve), Elsevier, pp.213-237 (1990).
- 2) Spencer, A.J.M. : A theory of kinematics of ideal soil under plane strain conditions, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.12, pp.337-351, 1964.
- 3) Kolymbas, D. : An outline of hypoplasticity, *Archive of Applied Mechanics*, Vol.61, pp.143-151, 1991.
- 4) 岸野佑次 : 新しいシミュレーション法を用いた粒状体の準静的挙動の解析, 土木学会論文集, No.406/III-11, pp.97-106, 1989.
- 5) Hill, R. : A general theory of uniqueness and stability in elast-plastic solids, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.6, pp.236 - 249, 1958.
- 6) Cundall, P.A. and Stack, O.D.L. : A discrete numerical model for granular assemblies, *Géotechnique*, Vol.29, No.1, pp.47-65, 1979.
- 7) 岸野佑次 : 粒状体の固有変形解析, 土木学会論文集, No.481/III-25, pp.87-95, 1993.
- 8) 土質工学会編 : 地盤の破壊とひずみの局所化, p.263, 1994.

(1995年9月18日受付)