構造工学論文集　Vol.42A(1996年3月)　土木学会

非対称性を示す速度型構成モデルの安定性の条件

STABILITY CONDITION OF NON-SYMMETRIC RATE TYPE CONSTITUTIVE MODEL

飛田善雄
Yoshio TOBITA

工博　東北学院大学助教授　工学部土木工学科（〒985 宮城県多賀城市中央1-13-1）

The mechanical behavior of geomaterials under proportional loadings can be well simulated in a simple manner by the non-associated elasto-plastic model. The use of non-associated model yields, however, difficult problems on the uniqueness and stability conditions of the resultant mechanical systems. We present *in this* paper :(1)a brief and concise review on this subject in the field of geomaterials with particular emphasis on granular materials; (2) the critical discussion on Hill's stability condition for the mechanical systems in static equilibrium; (3) the dynamic stability condition which is more fundamental tool for stability than Hill's one; (4) proposal of a simple and convenient stability condition being accordance with experimental observations. The stability of homogeneously deformed saturated sand specimen under the triaxial stress conditions, as examples, are examined and compared qualitatively with experiments.

Key Words: stability condition, non-associated flow model, saturated sand ,dilatancy

1.　まえがき

地盤材料の応力、ひずみ、ダイレイタンシー特性は非関連流動則を用いた弾塑性構成モデルにより、比較的簡便に記述することができる。しかし、速度（増分）形式で構成マトリックスが非対称となる非関連流動則を用いた場合には、対象とする力学系の静的平衡の安定性の議論が難しくなることが知られている。

ダイレイタンシーの有無に係わらず、摩擦性材料の安定性がHill（あるいはより制限の強いDrucker）の安定性の条件によっては記述できないことの反証例は過去においても示されてきた。近年Ladeら[1,2]は、均質な変形状態とみなすことのできる飽和砂の三軸試験の安定性を実験的に検討し、Hillの条件の不適切さを示している。

これまでの地盤材料あるいはその構成モデルの安定性に関する議論の多くは断片的なものであり、その議論が力学系の安定性の議論全体の中でどのような位置を占めているのかを見通すことは必ずしも容易でない。このために、本論文では安定性の議論において、より基本的な手法である動的定式化も含めることにする。。エネルギー的考察を背景とするHill の安定性の条件と動的定式化による安定性の条件をやや詳しくレビューし、その関係を議論する。さらに、物性的な考察を行うと、これらよく利用される二つの安定性の条件が実際の地盤材料の安定性に対して、常に良い近似を与えると期待するのは早計であることを説明する。

以上の議論を踏まえて、実験事実あるいは経験と矛盾しない地盤材料の簡便な安定性の条件を提示する。この条件は理論的な帰結と呼べるものではなく、一種の仮説的条件であり、実験あるいは数値解析などによる検証が必要となる。ここでは提示する条件と実験事実との整合性を飽和砂の三軸試験を対象に検証する。また、本文中において、安定性の条件から見た増分非線形モデルの必要性についても言及する。

記号：記述を簡便にするためにマトリックス表現を用いる。２階のテンソルを列ベクトルで表現し、４階のテンソルは正方行列として表現する。主な約束を、直交座標系に対する指標表示で表すと、次のようになる：

$\mathbf{Aa}=A_{ijkl}a_{kl}$,　$\mathbf{ab}^T=a_{ij}b_{kl}$, $tr(\mathbf{a})=a_{kk}$,　$\mathbf{ab}=a_{ik}b_{kj}$, $\mathbf{a}^T\mathbf{b}=tr(\mathbf{ab})=a_{ik}b_{ki}$, $\delta=\delta_{ij}$, ここにδ_{ij}はKroneckerの記号であり、$\delta_{ij}=1(i=j)$, $\delta_{ij}=0(i\neq j)$ $\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}=m_k n_k$

以上の定義式では、繰り返し指標に対する総和規約を用いている。この定義に属さない表現については、文中において指標表示も併記する。また、本文では簡便のために、微小変位を仮定し、有限変形を取り入れることによる煩わしさを避ける。

また、本文での安定性の議論では、外力が非保存力であることによる不安定挙動（例えば、ギャロッピング）は考察の対象としない。さらに、本文中でも断っているように、弾塑性体の様に、ある状態から2つ以上の応答を持つ場合の安定性の条件を議論することはかなり複雑なものであり、一般的な議論を行う事はできない。このために、ここでは塑性負荷時の接線剛性をもつ線形比較体を導入して、一意的応答を示す仮想的材料を対象に安定

性を議論している。この簡単化は実際の安定性と計算された安定性に大きなギャップをもたらす可能性があることには注意が必要である。

2．地盤材料の構成モデルとその安定性に関する過去の議論

地盤材料の構成モデルとその安定性の条件について、簡単に振り返る。構成モデルとしては、時間依存性のない弾塑性理論を基礎とする速度形式のものに限定する。議論を明確にするために、4節に分けてレビューする。2.5節に本論文が取り扱う問題を明示する。

2.1 関連流動則と非関連流動則

砂の様な粒状材料が塑性ポテンシャル関数と降伏関数が一致する関連流動則に従うのかどうかについては、3軸試験器を用いてTatsuoka and Ishihara [3]により初めて検討された。その結果は、降伏条件は、静水圧軸を含む錐型（いわゆる、Mohr-Coulomb型）であり、塑性ポテンシャルはキャップ型（いわゆるCam-clay型）となることが明瞭に示された。その後、非関連性を支持する実験データは数多く示されてきた。

実験的には、非関連流動則が支持されるのであるが、その結果としての構成モデルは、塑性成分の構成マトリックスが非対称であるために、数学的な観点からは様々な欠点をもつ。例えば、(1)弾性よりも弾塑性応答の方が、あるひずみ増分を与えた時に、仕事増分が大きい (Runesson and Mroz)[4]; (2)応答の連続性が満足されない（例えば、橋口[5]）。

これらの欠陥を許さないという数学的観点を強調すれば、塑性ポテンシャル論を基礎とする弾塑性構成モデルは、関連流動則に基づくものにならざるを得ない。しかし、関連流動則を採用すると、砂の様な粒状体が示す多くの挙動を表現できなくなる。特に、本論文で対象にする非排水せん断時の飽和砂の不安定挙動（5.3節参照）が、固相の挙動として排水時の構成モデルを用い、さらに、飽和砂全体の非圧縮性の条件を与えるという自然な方法では導けなくなる。すなわち、非排水時の不安定な挙動を関連流動則を用いて表現すれば、排水時の変形挙動を表現するパラメータとは、全く異なる設定が必要になってしまう。

ここでは、非関連流動モデルが排水・非排水両者の挙動を比較的簡便な数学的枠組みで、しかも自然な形で表現できる事実を重視し、その結果としての欠陥をできる限り消去するという立場にたっての議論を展開する。

2.2 非関連流動モデルとHillの安定性の条件

構成マトリックスが非対称となる場合の安定性の条件の議論は複雑なものとなる（第3章）。このため、便宜的にHill の安定性の条件を$tr(\dot{\sigma}\dot{\varepsilon})>0$という形式で採用し、非関連流動モデルの安定性が議論されてきた。その解析的結果が実験事実と照合されることはほとんどなかった。

Maier and Heuckel[6] はLagrangeの未定係数法を用いて$tr(\dot{\sigma}\dot{\varepsilon})=0$となる最大の塑性係数$H_{cr}$を求め、非関連流動の場合には、$H_{cr}>0$となり、ひずみ硬化時にHillの安定性の条件が失われ、関連流動則の場合には$H_{cr}=0$となることを示した。Runesson and Mroz[4]は、構成マトリックスについて固有値解析を行い、最小固有値がひずみ硬化時に非正となることと非関連流動則の数学的な欠陥を明確に示した。飛田[7]は、$tr(\dot{\sigma}\dot{\varepsilon})=0$となる応力比を非関連流動モデルと二重すべりモデルに対して、塑性負荷時の接線剛性マトリックスを利用して求めたところ、破壊応力比と比較するとかなり小さな値で満足されてしまい、この条件は、砂の様な粒状体への適用性に疑問があることを示した。このような数学的な欠陥や適用性への疑問の根本的原因は、弾塑性構成マトリックスが非対称であるというよりも、変形挙動を塑性負荷と弾性除荷の二つの空間に分割して、それぞれ増分線形挙動を考えるという、実際の物性挙動と比較すると、簡単化し過ぎた弾塑性モデルの数学的構造に起因するものと考えられる。このような数学的欠陥を消去できる増分非線形モデルの可能性について、第4章で簡単に触れる。

2.3 摩擦性材料に対するHill－Druckerの安定性の条件の適用性に対する疑問

簡単なバネー摩擦系の運動を考察することにより、2次の仕事増分が負になっても、この系は安定であることが示される（例えば、Bazant and Cedolin[8], p694）。2次の仕事増分が正という条件は連続体の場合には仮想仕事の原理を用いて、$tr(\dot{\sigma}\dot{\varepsilon})>0$との等価性を示すことができる。このHillの安定性の条件に対する反証例のポイントは、すべり運動に対して熱力学的に共役でない垂直応力を減少させることにより、運動を生じさせることができるということである。すなわち、全く仕事増分に関与しない応力成分を変化させることによって、運動を生じさせることができるような力学システムでは、Hillの条件が安定性の規準としての役割を果たさないことになる。

2.4 安定性の条件に対するLadeらの実験

実験結果からも、Hillの安定条件の有用性には疑問が投げかけられている。Lade[1,2]はHillあるいはDruckerの安定性の条件が砂の挙動に適用可能かどうかという観点から応力制御試験を、排水、非排水変形それぞれについて行なっている．なお、弾性マトリックスの正定値性：$tr(\dot{\sigma}\dot{\varepsilon}^e)>0$が満足されれば、Druckerの条件：$tr(\dot{\sigma}\dot{\varepsilon}^p)>0$はHillの条件：$tr(\dot{\sigma}\dot{\varepsilon})=tr(\dot{\sigma}\dot{\varepsilon}^e)+tr(\dot{\sigma}\dot{\varepsilon}^p)>0$の十分条件となっていることに注意し、本文ではHillの条件のみを参照する。彼らの結果は次のようになる：

(1)排水条件での変形では、図-1に示すような楔状の応力経路では、$tr(\dot{\sigma}\dot{\varepsilon})<0$であるのに、不安定な兆候は全く見

られず、応力ひずみ関係がピークに達した後に、初めて不安定な変形挙動が見られる；

(2)非排水時の変形挙動では、$tr(\dot{\sigma}\dot{\varepsilon})=0$は、実験的に観察される不安定な挙動の発生条件にほぼ一致する．

(3)非排水ではダイレイタンシーが正である場合不安定挙動は示さず、また飽和度が低い場合には、排水時のピーク時の安定性喪失に近づいていく。

これらの実験事実を表現する簡便な安定性の条件を提示し、検証することが本論文の目的である。

Molemkamp[9]は、非対称な構成マトリックスを有する力学系に対しては、Hillの安定性の条件は適用できないとして、動的定式化を行い、その系の固有値解析を行い、最小固有値$\lambda_{min}=0$ばかりでなく、固有値が複素数となることによって生じるフラッタータイプの不安定性も含めて、２つの変形モード：せん断帯と均質変形について、静的平衡系の安定性を議論している。数学的な観点からは、動的安定性の条件は非対称な構成マトリックスにも適用できるより基本的な安定性の条件となるはずであるが、この動的条件が実験結果と一致するかとなると疑問が残る（第３章）。

2.5　安定性の条件に関する問題

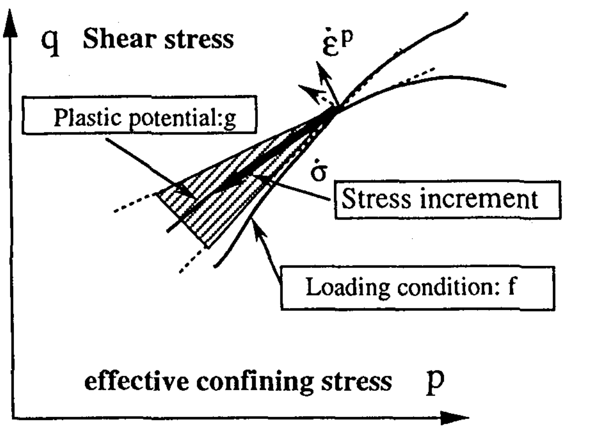
非対称な構成マトリックスをもつことの多い地盤材料の挙動の安定性の条件を押さえることは、今後の数値解析の発展（特に、破壊現象や流動問題を適切にシミュレーションする目的）には必要不可欠である。しかし、これまでの議論は、Hillの条件を認めたらどのような結果が得られるか？数学的にはHillの条件は意味がないとして、動的定式化を採用するとどうなるか？という数学的観点からの研究はあるものの、その妥当性・実用性を、実験事実と照合して検証したものは少ない。

次章で、２つの安定性の条件をやや詳しくレビューし、地盤材料への適用という観点から、その問題点・適用性の限界を議論する。

3.　安定性の条件に関する批判的レビュー

初めに、Hillの安定性の条件がエネルギー的観点から導入されていることを強調したレビューを行い、次に、非対称な構成マトリックスの場合にも、数学的観点からは、全く問題なく適用できる動的定式化による安定性の条件をレビューする。まず，次のことに注意する．安定性の条件は，熱力学の第２法則とは，根本的には全く関係のない概念であり，安定性の条件が満足されないからといって，構成モデルが物理的あるいは数学的に妥当なものではないと主張することはできないことである．単に，満足しないモデルを採用すると，対象とした系が不安定となり，他の安定な状態に推移する可能性が示されているに過ぎない．

式(1)で表される微分方程式を対象にし、境界条件は式(2)で表されるものとする。



図－１：Hillの安定性の条件を満足しない応力経路

$$\nabla\cdot\sigma+\rho\mathbf{b}=\mathbf{0} \quad \text{in } V \qquad \cdots(1)$$

$$\mathbf{n}\cdot\sigma=\bar{\mathbf{t}} \quad \text{on } S_T, \qquad \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}} \quad \text{on } S_u \qquad \cdots(2)$$

ここに、$\nabla\cdot\sigma=\sigma_{ji,j}=(\partial\sigma_{ji}/\partial x_j)$, $\mathbf{n}\cdot\sigma=\sigma_{ji}n_j$を意味している。　S_Tは力学的境界、S_uは変位境界を示す．

3.1　Hillの安定性の条件のレビュー

静的平衡系の安定性の条件をエネルギー論的な立場から導く方法にも様々な考え方が示されている。ここでは，標準的な方法による静的平衡状態の安定性の十分条件を，Bruhns[10]にならい導入する．

安定性の最も基本的な定義は，Liapounov によるものであり，静的平衡状態を対象とすれば，次のように述べることができる．「静的平衡状態にある系に，微小な摂動が与えられたとき，与えられた境界条件を満足する運動がやはり，微小におさえられるとき，対象とした系を安定と呼ぶ」

上記のコンセプトを背景として，一般的にスカラー関数Jを用いた次の条件を考える：

$$\mathbf{J}=\int_0^T[\int_V\dot{\varepsilon}^T\sigma d\mathbf{V}-\int_{S_T}\mathbf{v}\cdot\mathbf{t}d\mathbf{S}-\int_V\mathbf{v}\cdot\mathbf{b}d\mathbf{V}]d\mathbf{t}>0 \qquad \cdots(3)$$

ここに，vは速度成分である。上式は時刻t=0からt=Tまでの間で，内部エネルギーの変化（右辺第１項）が表面力tと物体力bのなす仕事（右辺第２項と第３項）よりも大きいことを安定性の十分条件として採用していることを示している。

この条件の意味するところは，加速度項を含む仮想仕事の式により与えられる次式（e.g., Maugin[11]，　p35）で説明されることが多い：

$$\frac{d}{dt}\int_V\frac{1}{2}\rho v^2 d\mathbf{V}=-\int_V\dot{\varepsilon}^T\sigma d\mathbf{V}+\int_{S_T}\mathbf{v}\cdot\mathbf{t}d\mathbf{S}+\int_V\mathbf{v}\cdot\mathbf{b}d\mathbf{V} \qquad \cdots(4)$$

すなわち，(3)式の右辺が正ということは，(4)式の右辺

は負になるということである．運動エネルギーの時間変化率である左辺も負ということになる．最初に静的平衡状態を考えているので，時間変化率が負ということは，時間が経過すると共に最初に摂動として与えた運動エネルギーが減少することを示している．よって，対象とした静的平衡状態は安定であるといえる．

十分に小さい時間間隔τに対して，(3)式をTaylor展開して，２次以上の項を無視すると，次式が得られる．

$$\int_V \dot{\varepsilon}^T[\sigma+\tau\dot{\sigma}]dV-\int_{S_T}\mathbf{v}\cdot[\mathbf{t}+\tau\dot{\mathbf{t}}]dS-\int_V \mathbf{v}\cdot[\mathbf{b}+\tau\dot{\mathbf{b}}]dV+\mathbf{O}(t^2) \quad \cdots\cdots(5)$$

上式各項の１番目の式は，力学的平衡条件（あるいは，(4)式で左辺を０とおいた静的平衡の仮想仕事の式）より打ち消し合い、さらに剛性拘束と死荷重の仮定より、$\dot{\mathbf{t}}=\dot{\mathbf{b}}=\mathbf{0}$であるから、次式が得られる。

$$J\cong\frac{1}{2}T^2\{\int_V \dot{\varepsilon}^T\dot{\sigma}dv\} \quad \cdots\cdots(6)$$

摂動による表面力の変化も許す場合には、$-\int_{S_T}\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{t}}dS$が右辺に入ることになる。対象とする領域全ての点で，被積分項が正であるとしてさらに強い十分条件を求めると，Hillの安定性の条件が得られる．

$$\dot{\varepsilon}^T\dot{\sigma}>0 \qquad \text{(Hill's Stability Condition)} \quad \cdots\cdots(7)$$

十分条件であるから，(7)式が満足されないからといって，そのことのみで対象としている系が不安定になると結論付けることは一般的にはできない．(7)式が、直接的な意味を持つのは、無限に均一な変形が生じている場合、あるいは要素の局所的な安定性を議論する場合のみである。

(7)式に対して，$\dot{\sigma}=\mathbf{E}\dot{\varepsilon}$のような速度型の構成モデルが与えられたとき，

$$\dot{\varepsilon}^T\dot{\sigma}=\dot{\varepsilon}^T\mathbf{E}\dot{\varepsilon}>0\cdot \quad \cdots\cdots(8)$$

という条件となる．一般に、接線剛性マトリックスは、与えられたひずみ速度の方向に依存するので、(8)式のEを唯一に決定することはできない。厳密には、与えられたひずみ速度に対して、その方向に依存する剛性テンソルを介して、応力速度が求められ、その内積が全ての方向に対して正であれば良いことになる。しかし、これは煩わしい計算となる。そこで、通常は、塑性負荷状態の剛性マトリックスを用いて議論を進めることになる。すなわち、除荷の弾性による影響は考慮せずに、塑性負荷時の剛性マトリックスに等価な弾性体に置き換えて,安定性を議論することになる。厳密には、(7)式までがHillの条件であり、(8)式との等価性は一意的応答を示す弾性体のみに適用できる．しかし、多くの文献では以下のような方法で固有値問題に帰着させているので、本文でも(8)式の右辺が成立する条件をHillの条件と呼ぶことにする．

(8)式の右辺は２次形式であるので，任意の$\dot{\varepsilon}$に対して成立するためには，**E**が正定値性をもつことが必要になる．**E**の正定値性は，**E**の最小固有値$\lambda_{min}>0$により保証される．さらに，対象とする材料の最初の固有値が全て正であり，載荷と共に最小固有値が減少していく過程を対象にすると，最小固有値を求める代わりに，**E**の対称成分$\mathbf{E}^s(=(\mathbf{E}+\mathbf{E}^T)/2)$の行列式$(\det[\mathbf{E}^s])$の正値性を確認しても良いことがわかる(２次形式の符号を決定するのは，対称成分のみであって，非対称成分$\mathbf{E}^A=(\mathbf{E}-\mathbf{E}^T)/2$は関係しない；このことについての詳しい議論はDarve[13]参照)．

3.2 動的定式化による安定性の条件

動的定式化による安定性の条件を考える。以下の議論は、Leroy[12]およびMolenkamp[9]を参考にしている。

式(1),(2)の条件を全て満足する解を基本解と呼び$()^0$の様に表現する。時刻τ=t+dtにおける次の形式の摂動解を考える。

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},\tau)=\mathbf{A}^0(\mathbf{x},\tau)+\varepsilon\delta\mathbf{A}(\mathbf{x},\tau) \quad \text{with } \varepsilon<<1 \quad \cdots\cdots(9)$$

(9)式の摂動解は次の式を満足することになる。

$$\begin{aligned}&\delta\nabla\cdot\sigma=\rho\delta\ddot{\mathbf{u}} \quad \text{in V}\\&\delta\mathbf{n}\cdot\sigma=\mathbf{0} \ \text{ on } S_t;\ \delta\mathbf{u}=\mathbf{0} \ \text{ on } S_u\end{aligned} \quad \cdots\cdots(10)$$

ひずみ－変位関係式および構成関係は次の様になる。

$$\begin{aligned}&\delta\varepsilon=(\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})^T)/2\\&\delta\dot{\sigma}=\mathbf{D}(\mathbf{s}):\delta\dot{\varepsilon}\end{aligned} \quad \cdots\cdots(11)$$

ここに、$\mathbf{s}=\dot{\varepsilon}/\|\dot{\varepsilon}\|$であり、**D**(**s**)は、接線剛性マトリックスの方向依存性を表現している．摂動解のごく初期の挙動に着目して、次の形の解を選定する

$$\delta\mathbf{A}(\mathbf{x},\tau)=\delta\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x})\exp(\lambda\Delta t) \quad \cdots\cdots(12)$$

ここに、λは摂動の初期の成長速度を表す。ここで構成マトリックスは考えている時間間隔で変化しないものとしている。もし、式(12)に対して得られる結果が$Re(\lambda)>0$であれば、摂動は成長することになるので、基本解は不安定となる。一方、$Re(\lambda)<0$であれば、摂動解は成長することができず、基本解$\mathbf{A}^0(\mathbf{x},\tau)$は安定であるといえる。式(12)を式(10)に代入して、

$$\begin{aligned}&\delta\nabla\cdot\hat{\sigma}=\rho\lambda^2\delta\hat{\mathbf{u}} \quad \text{in V}\\&\mathbf{n}\cdot\delta\hat{\sigma}=\mathbf{0} \ \text{ on } S_T;\ \delta\hat{\mathbf{u}}=\mathbf{0} \ \text{ on } S_u\\&\delta\hat{\varepsilon}=(\nabla\hat{\mathbf{u}}+(\nabla\hat{\mathbf{u}})^T)/2\\&\delta\hat{\sigma}=\mathbf{D}(\mathbf{s}):\delta\hat{\varepsilon}\end{aligned} \quad \cdots\cdots(13)$$

特定のモードを考えずに、ここで次の弱形式の問題を考える

$$\int_V[\delta\nabla\cdot\hat{\sigma}(\mathbf{x},t)-\rho\lambda^2\delta\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})]\cdot\eta\ dV-\int_{\Gamma_t}\mathbf{n}\cdot\delta\sigma\cdot\eta dS=0 \quad \cdots\cdots(14)$$

ここに、ηは変位境界条件を満足する試験関数である。この式に部分積分を行い、適合条件式を用いて整理すると、

$$\int_V\nabla\eta:\mathbf{D}(\mathbf{s})\cdot\delta\nabla\hat{\mathbf{u}}d\mathbf{V}+\lambda^2\int_V\rho\eta\cdot\delta\mathbf{u}d\mathbf{V}=0 \quad \cdots\cdots(15)$$

試験関数と変位に関して、同じ内挿関数を用いて有限

要素法により離散化を行うと、

$$[\sum_e \int_{V_h^e} \mathbf{B}^T\mathbf{D}(s)\mathbf{B}dV_h^e + \lambda^2 \sum_e \int_{V_h^e} \rho\mathbf{N}^T\mathbf{N}dV_h^e]d\hat{\mathbf{u}}_h \quad \cdots\cdots (16)$$

$\mathbf{K}(s) = \sum_e \int_{V_h^e} \mathbf{B}^T\mathbf{D}(s)\mathbf{B}dV_h^e, \mathbf{M} = \sum_e \int_{V_h^e} \rho\mathbf{N}^T\mathbf{N}dV_h^e$ という通常の記号を用いて整理すると、よく見かける自由振動と類似の方程式が得られる。

$$[\mathbf{K}(s) + \lambda^2\mathbf{M}]\delta\mathbf{u}_h = \mathbf{0} \quad \cdots\cdots(17)$$

より一般的な固有値問題にするために、$[\mathbf{M}]=[\mathbf{L}][\mathbf{L}]^T$の三角分解を行い、$\{\beta\}=[\mathbf{L}]^T\{\delta\mathbf{u}_h\}$と置き換えて整理すると、

$$\{\mathbf{A}(s) - \Omega\mathbf{I}\}\{\beta\} = \{\mathbf{0}\} \quad \cdots\cdots(18)$$

ここで、$\mathbf{A}(s) = [\mathbf{L}]^{-1}[\mathbf{K}(s)][\mathbf{L}]^{-T}$, $\Omega = -\lambda^2$という置き換えを行っている。式(18)の固有値解析の結果、共役複素固有値が得られたものとして、それを$\Omega_{1,2}=p \pm iq$、これに対応する摂動解の固有値を$\lambda_{1,2}=c \pm id$とする。$\Omega = -\lambda^2$より、cについての表現を求めてみると、

$$c^2 = [-p \pm \sqrt{p^2+q^2}]/2 \quad \cdots\cdots(19)$$

となり、式(18)の固有値Ωが複素数となることにより、仮定した摂動解は、c>0 であるから、成長し基本解すなわち静的平衡解は不安定となることがわかる。

構成マトリックスが対称性をもつ場合には、式(18)の**A**マトリックスはやはり対称性をもつことになる。この場合には、固有値が複素数となることはないので、いわゆるフラッタータイプの不安定性は生じないことになる。しかし、構成マトリックスが非対称な場合には、この種の不安定性が、少なくとも数学的には存在することになる。

3.3 安定性の条件に対する基本的考察

Hillの安定性の条件と動的安定条件について、数学的観点および物性的観点から基本的な考察を行いその妥当性について考察する。

（1）Hill の安定性の条件と非対称性

Hillの安定性の条件は，どのような構成モデルに対しても，成立するのであろうか？エネルギー論的解釈が可能な十分に一般性をもった議論のように見えるが，上記安定性の条件の導入は，基本的には，弾性系のポテンシャルエネルギーに基づく安定性，あるいはより広範な用語では、保存系に対する安定性の議論と基本的には同一のものである（保存系の安定性の議論については，Bazant and Cedolin[8], Lanczos[14] などに詳しい）．

弾塑性体の応答を1対1対応にするために，常に弾塑性応答を示す仮想的な材料である線形比較体を導入し，さらに$\mathbf{E}=\mathbf{E}^T$という対称性があれば，(1)式の第1項はあるポテンシャル関数で表現でき，さらに外力項もあるポテンシャル関数の勾配として表現できるとする保存力のみを考えれば，全く弾性体の保存系の安定性の議論と等しくなることがわかる。

しかし、構成マトリックスが非対称な場合には、ポテンシャル関数が存在するための積分可能条件（対称性）が満たされないので、(3)式のスカラー表現自身の意味が曖昧になってしまう。

Hill自身[15] (p32)は、この条件についてかなり慎重な記述をしている。すなわち’ひずみエネルギーをもつ弾性体については、Hillの条件（引用文献では、表面力の変化による仕事の2次増分も考えている）は、古典的なLagrange-Dirichletの安定性の条件と等価であると言えるが、それ以外の材料モデルについて、この条件の重要性,

あるいはこれが満足されないことが何を意味するのかは明確には言えない。’非対称性を示す様な構成モデルは対象外とした議論を行っている.

Hillの条件と線形比較体の導入により可能となる構成マトリックスの正定値性の条件を非対称な系の安定性に拡張することの正当性は主張できないことになる。しかし、(7)式が満足されることは、解析の対象としている全体系の解の唯一性の十分条件（例えば、Bigoni and Hueckel[16]）であるから、解析の各段階でこの条件を確認することには意味がある。

（2）動的安定条件と非対称性

一方、動的安定性の議論が成立するための条件は、構成マトリックスがある状態について、一意的な応答を示すということのみであり、適切に線形比較体を定義できれば、対称性は問題にならない。この意味で動的安定規準はより広い適用性を持つことになる。しかし、式(18)よりわかるように、安定性の判断規準には、実際に存在するであろう粘性減衰の効果が含まれない。この粘性減衰の項を含めた安定性の議論はもちろん可能なのであるが、その解析は複雑になる。さらに、実際の応答が弾塑性挙動を示すのに、それを線形比較体として安定性を処理することは、実際と計算された安定性に大きなギャップをもたらす可能性がある。なぜならば、時間と共に振動しながら成長する不安定な挙動は、実挙動は除荷過程で弾性応答を示し、その過程は明らかに安定性の条件を満たし、摂動の不安定な成長は妨げられるからである。これらのことより、3.2節でレビューした動的安定性の判断規準よりも、実際の不安定な挙動はかなり遅れて発生することが指摘できる。

（3）二つの安定性の条件の関係

Hillの安定性の条件と動的安定性の規準がどのような関係になるのかは興味深い問題である。関連流動モデルのように、線形比較体が対称性をもつ場合には議論は簡単になる。なぜならば、エネルギー的な安定性の規準すなわちLagrange- Dirichletの規準は、動的安定性の規準：すなわちLiapounovの規準に対して十分条件になっていることが証明されているからである（例えば、Bazant and Cedolin[8] pp.174- 183)。このため、静的平衡状態にある系に対しては、Hill の安定条件のみを問題にすれば良いことになる。

構成マトリックスが非対称な場合には、このような簡潔明瞭な関係は存在しない。3.1節でレビューしたように、Hillの安定性の条件には運動エネルギーの増加率が負という意味を与えることが可能であるので、Hillの条件はどのような摂動も不安定に成長することができないという条件（運動エネルギーの増加率が負という状況ではどのような動的運動も成長できない）ともなっているのではないか？という疑問がでてくる。しかし、これは根本的な誤りを犯した推論である。このことに対する反証は、簡単な問題を設定することにより与えることができる。すなわち、対称成分が同一で、非対称度の大きく異なる二つの構成マトリックスを考えて、その安定性を検討すると、Hillの安定性は同一の結果を与えるのに、動的条件は非対称度の大きいマトリックスがはるかに早く安定性の条件が破れてしまう。すなわち、Hillの安定性と動的安定性の条件いずれが先行するかは、非対称度（と質量分布）に依存しており、両者の条件の間に明瞭な関係はできないことになる。

このことの力学的背景として、構成マトリックスが非対称な場合には、エネルギーの変化に全く関係しないような回転運動が発生する可能性を指摘できる。そのような運動も含めて動的安定性の条件は設定されていることになる。逆にいうと、対称な構成マトリックスではそのような運動は存在せずに、エネルギー変化を伴うような運動に制限されているので、Hillの条件が動的条件の十分条件として存在することになる。

結局、Hillの条件と動的条件のどちらが先行するかは、個々の構成モデルに対して、さらに砂の様に変形中に非対称度が変化する場合には、変形段階毎に両者の条件を比較することが必要になる。動的条件による安定性の喪失が実際に起こるのかどうかは、対象とする力学系が許容する運動の多様さに依存することになる。計算結果として、安定性の喪失が指摘されても、実際の系が安定性の喪失を与える運動モードの発生を許さないようなものであれば、実際にはそのような不安定な挙動は発生できないことになる。実際の構造物の安定性との関係を正確に議論するためには、3.2節のように単に固有値λの符号を検討するだけでなく、固有ベクトル（運動モード）も併せて検討することが必要になる。今後の研究課題の一つである。

（4）増分非線形モデルと安定性

以上の議論は、弾塑性応答を表現する構成マトリックスがひずみ（あるいは応力）速度の方向に依存しない非関連流動モデルを対象にしたものである。実際の変形挙動をよりよく表現するためには、方向に依存する増分非線形モデルが必要であることが指摘されている（そのレビューは、飛田・吉田[17]により与えられている）。安定性の観点からも増分非線形モデルの重要性を指摘したい。

増分非線形モデルが変形挙動を表現する目的で必要だということは、ある構成マトリックスの適用性は、負荷条件を満足する全ての領域に対して有効ではなく、小さな領域に限定されるべきである。その小領域それぞれに対して安定性を検討することで、より現実的な安定性の条件となることが期待できる。ある領域に対して局所的な安定性の検討を、例えばHill の条件で行うことを考える。この目的のために固有値解析を行う（固有値解析自身は全領域を対象にして行われることに注意する）。最小固有値を与える固有ベクトルの方向が、対象とした小領域に存在しなければ、その固有値はなんら意味をもたなくなり、対象とした領域に位置する固有ベクトルに対応する固有値の正負が安定性の条件となる。全ての領域についてこのような方法で固有値を求め、それらの最小値が正であることが局所的安定性の条件となる。構成モデルと安定性の議論をより精密に行うことにより、エネルギー的な安定条件であるHillの条件が現実的な結果を与え、実際の規準として有用となる可能性を指摘できる。構成モデルとしてより現実的なものを考えた時、実際の挙動と比較して、どの安定性の条件が、最も適切なものであるかの結論は当然変化してくることが予想される。このような精密な議論を遂行することは今後の重要な課題である。

（5）簡便な安定性条件を提案することの妥当性

本節の考察から理解できるように、Hillの安定性の条件あるいは動的安定性の条件両者共に、安定性の条件としては絶対的なものではないことが理解できる。このことは、現在の安定性に関する限られた知識では、有限要素法などの数値解析において安定性の検討をする際に、便宜的な条件を導入して安定性の判断をしても、それが現実的に有用であれば、その条件を用いることが許されると考えてよいことになる。次章でそのような安定性の条件について考察し、3章の2つの安定性の条件との関係を比較する。

4．構成マトリックスの行列式による安定性

局所的な安定性あるいは均質な変形が生じている物体（理想的な実験供試体に相当する）の便宜的な安定性の条件を構成マトリックスの行列式の性質と関連づけて提案し、考察を加える。

4.1　提案する安定性の条件

以下のような局所的安定性の条件を考える.

「変形に対して拘束条件がある場合には、その拘束条件も含めた速度型構成モデルの構成マトリックスの行列式が正の値をもつ場合には、安定である」

本文では、応力速度がひずみ速度の関数として表される場合について議論を進める。すなわち、

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (20)$$

に対して、安定性の条件を次の様に与える

$$\det[\mathbf{E}] > 0 \quad (21)$$

この一致性は特殊なマトリックスとなっている非関連流動モデルの場合にのみ言えることで、一般的な非対称な構成モデルについて成立するものではないことには注意が必要である。

図2-(b)は、特定のモデルに対するMolenkamp[9]，飛田[7]の計算結果を参考にして、その位置関係を示した。

3つの可能な安定性の条件のうち、最も安定度の高い行列式＝0の条件を提案するのは、第5章において検討するように、排水変形・非排水変形の飽和砂の安定性を同時に説明する条件となっているからである。

5．飽和砂の均質な変形挙動の安定性

非関連流動則に基づく構成モデルを定式化し、その安定性を排水・非排水変形について提案する安定性の条件と比較検討する。Runesson and Mroz[4], Runesson et al.[20]に従って、より一般的な議論を行うことが可能であるが、Lade et al.[1,2]の3軸試験の安定性に関する実験結果と直接的な比較を行うために、また簡明な結果を得るために、本文では3軸状態に限定した定式化を行う。

5.1 3軸試験状態の非関連流動モデル

軸対称性をもつ円筒供試体に対して、主応力のみが作用する3軸状態は次の応力ひずみにより表現できる：

$$q=|\sigma_1-\sigma_3|,\quad p=-\frac{1}{3}(\sigma_1+2\sigma_3) \quad \text{......(22)}$$

$$\dot{\bar{\varepsilon}}=\frac{2}{3}|\dot{\varepsilon}_1-\dot{\varepsilon}_3|,\quad \dot{\varepsilon}_v=-(\dot{\varepsilon}_1+2\dot{\varepsilon}_3) \quad \text{......(23)}$$

式(22, 23)による定義は $q\dot{\bar{\varepsilon}}+p\dot{\varepsilon}_v=\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}$ を満足している。応力・ひずみは引っ張りを正とする。降伏条件f，塑性ポテンシャルgを次式のように設定する

$$f=q-\mu p=0,\quad g=q-\beta p=0 \quad \text{......(24)}$$

(24)式による非関連流動モデルは、偏差成分については等しい、いわゆる偏差関連流動モデルである。

等方弾性体を仮定し、弾性関係を次式で定義する：

$$\dot{q}=3G\dot{\bar{\varepsilon}},\qquad \dot{p}=K\dot{\varepsilon}_v^e \quad \text{......(25)}$$

塑性ひずみ速度は次式で与えられる：

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p=\dot{\lambda}(\partial g/\partial q)=\dot{\lambda},\quad \dot{\varepsilon}_v^p=\dot{\lambda}(\partial g/\partial p)=-\beta\dot{\lambda} \quad \text{......(26)}$$

塑性負荷が継続するための適合条件は、

$$\dot{f}=(\partial f/\partial q)\dot{q}+(\partial f/\partial p)\dot{p}-H\dot{\lambda}=\dot{q}-\mu\dot{p}-H\dot{\lambda}=0 \quad \text{.....(27)}$$

式(27)より、塑性乗数$\dot{\lambda}$を求めると、

$$\dot{\lambda}=(\dot{q}-\mu\dot{p})/H \quad \text{......(28)}$$

ここにHは塑性係数であり、塑性内部変数をξとしたときに、$H=-\alpha(\partial f/\partial\xi)$ で定義される。αは$\dot{\lambda}$を陽に表現するための定数である。H=0は塑性ひずみ速度が無限大になる限界状態を表すことになる。

全ひずみ速度が弾性ひずみ速度と塑性ひずみ速度の線形和で与えられることより、全ひずみ速度を応力速度の関係として表現すると、

$$\begin{Bmatrix}\dot{\bar{\varepsilon}}\\ \dot{\varepsilon}_v\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}(1/3G)+(1/H), & -\mu/H\\ -\beta/H, & 1/K+(\mu\beta/H)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{q}\\ \dot{p}\end{Bmatrix} \quad \text{......(29)}$$

速度型の弾性剛性マトリックスを次式で与える

$$\{\dot{q}_\alpha\}=[\mathbf{D}^e_{\alpha\beta}]\{\dot{\varepsilon}_\beta-\dot{\varepsilon}^p_\beta\},\ \alpha,\beta=1,2 \quad \text{......(30)}$$

(26)式と(30)式を(29)式に代入し、$\dot{\lambda}$を全ひずみ速度の関数として表し、それらの結果を(30)式に代入して(29)式の逆関係が求められる。

$$\begin{Bmatrix}\dot{q}\\ \dot{p}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}3G-(3G)^2/(H+H_c), & 3GK\mu/(H+H_c))\\ 3GK\beta/(H+H_c), & K-K^2\mu\beta/(H+H_c)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{\bar{\varepsilon}}\\ \dot{\varepsilon}_v\end{Bmatrix} \quad \text{......(31)}$$

ここに、$H_c=3G+K\mu\beta$と定義している。

5.2 排水変形時の安定性の検討

排水変形時には、間隙水圧は発生しないので、変形に対する拘束条件はなく、(31)式の剛性マトリックスが直接対象になる。(31)式に対して、その行列式は次の様に求められる：

$$\det[\mathbf{E}]=3GK(H+H_c-3G-K\mu\beta)/(H+H_c) \quad \text{.......(32)}$$

正であるための条件は，(H+Hc)は正であるから、H>0と求められる。これは最小固有値が実数で正であるための条件と等価である。

(31)式の剛性マトリックスを対称化したマトリックスの正定値性の条件、すなわちHillの条件は

$$H^*=(-H_c+\sqrt{(H_c)^2+3GK(\mu-\beta)^2})/2 \quad \text{......(33)}$$

で与えられ、μ=βの関連流動則以外では、常にH>0すなわち、ひずみ硬化状態で安定性が喪失するという結果を与えることになる。また、(33)式より非関連度が大きい程、Hillの条件は高い塑性係数のもとで、安定性が喪失することがわかる。

非対称な構成マトリックスに対する行列式＝0の条件が、Lade et al.の実験結果（2.4節(1)）に一致する条件であることがわかる。

5.3 非排水変形時の安定性に対する検討

非排水時には、間隙水圧が上昇するので、次の2つの関係が必要になる：

（1）間隙水の構成関係

せん断力に抵抗しない理想流体を考え、体積ひずみ速度と水圧変化の関係を次の様に与える

$$\dot{u}=\kappa\dot{\varepsilon}_w,\quad \text{where}\ \kappa=(K_w/n) \quad \text{......(34)}$$

ここに、K_wは水の体積圧縮係数であり、その値は骨格の剛性係数：G,K, と比較してかなり大きい。またnは間隙率である。水圧、体積変化共に圧縮を正と定義している。

（2）有効応力の原理

有効応力σ 全応力s、間隙水圧uの関係を次の式で与える。

$$\mathbf{s}=\sigma-u\delta \quad \text{......(35)}$$

(20)式において、弾塑性体のように応答が多価性をもつときには、最も早く(21)式の条件が破られる構成マトリックスを対象にする。(21)式の条件を各要素について、各変形段階毎に求めるのは簡単に行えるので,数値計算上便利な条件である。また、(21) 式は通常の解析においては、構成マトリックスの固有値は全て正の状態を出発して、最初にdet[E]=0という条件が、満足されたときに安定性の喪失に至ることを前提とした表現である。すなわち、固有値のうち2つが負で(21) 式が満足されるような場合は以下の考察から除外している。

4.2　提案条件に対する基本的検討

第3章で議論した2つの安定性の条件との比較を通して、提案する安定性の条件の位置づけを、排水時の変形挙動を対象にして、明らかにする。

関連流動則に基づく弾塑性構成マトリックスを対象にする場合には、3つの条件は全く同じ条件となる。これは、以下の事を考慮すれば容易に理解できる。

(1)対称な構成マトリックスでは、固有値は全て実数であるから（線形代数の有名な定理、例えば、Mirsky[18]）、動的安定性の条件もΩmin>0で規定できることになる。

(2)均質な変形あるいは局所的な安定性を議論する場合には、構成マトリックス**E**が式(18)の**A**の固有値を決定するので（Molenkamp[9]）**E**の固有値により、Hillの安定性の条件、動的安定条件が判断できる。

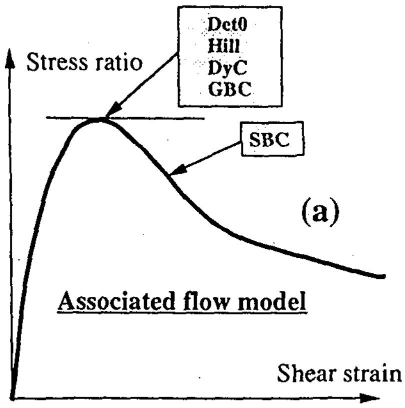
(3)力学において対象とする材料は、変形初期では正定値性が満足されており（すなわち、全ての固有値が正）、λmin=0となる条件は最初にdet[E]=0が満足される条件と一致する。

さらに、参考のために解の分岐条件についても検討しておく。一般的なモードに対する解の唯一性の条件：$\int \Delta\dot{\sigma}^T \Delta\dot{\varepsilon} dV > 0$, $\Delta\dot{\sigma} = \dot{\sigma}^{(1)} - \dot{\sigma}^{(2)}$, $\Delta\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{(1)} - \dot{\varepsilon}^{(2)}$ は明らかに、**E**の正値性が条件となっているので、これも3つの安定性の条件と一致する。地盤工学の分野で特に大切な分岐モードであるせん断帯発生の必要条件は（せん断帯モードが最初の分岐モードとは限定されないので、モードを仮定しない一般的な分岐条件よりも遅れることは明らかである）次の音響テンソル**B**の行列式で判断される；$\det[\mathbf{B}] = 0$; $\mathbf{B} = \mathbf{n}^T \mathbf{E} \mathbf{n}$, $B_{il} = E_{ijkl} n_j n_k$、ここに、**n**はせん断帯の法線ベクトルである。この条件は、関連流動則の場合にはひずみ軟化領域のみで満足されることが知られている。

以上の条件（安定性の場合には喪失する条件とする）を応力ひずみ曲線上にプロットして、その位置関係を調べてみると、図2-(a)の様になる。図2では、次の略記号を用いて図示している。

Hill:Hillの安定性の条件（対称化された構成マトリックスの正値性）

DyC:動的安定性の条件（構成マトリックスが0あるいは複素数となる条件）



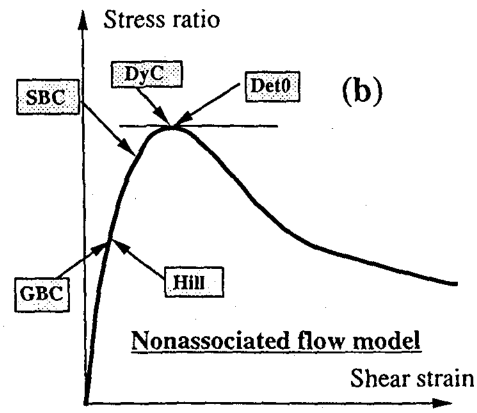


図２：応力ひずみ曲線上にプロットされた様々な条件
(a)関連流動則；(b)非関連流動則

Det0:構成マトリックスの行列式が0となる条件

GBC:解の唯一性の条件

SBC:せん断帯の発生に関する必要条件

以上からわかるように、構成マトリックスの行列式＝0の条件は、関連流動則の場合には、Hillあるいは動的安定性の条件と全く同一の条件であることがわかる。

非関連流動則に基づく構成モデルの場合には、応力ひずみ曲線上におけるその位置を示すと、図2-(b)の様になる。この図においては、(1) 行列式＝0の条件（Det0）が曲線のピークにあり、その条件は動的条件と一致すること；(2) 解の唯一性の条件とHillの条件が一致すること；(3) Hillの条件はせん断帯発生の必要条件に先行することが示されている。Det0の条件が非関連流動モデルにおいてもピーク（塑性係数H=0)に位置することは、次のことより言える：

(1)非対称な構成マトリックスに対する最小固有値λ_{min}=0はH=0の条件によって与えられる（Runesson and Mroz[4]）。

(2)λ_{min}=0の条件と最初のdet[E]=0の条件は一致する

また、Det0の条件が動的条件と一致することは、非関連流動モデルの構成マトリックスの場合には、複素固有値とはなりえず、動的安定性の条件は、λ_{min}=0によって与えられること(Steinmann and Willam[19])により得られる。

3軸状態では、次のようになる：

$$s_m = p + u,\quad s_m = -(s_1 + 2s_3)/3 \quad \text{.....................(36)}$$

非排水状態においては、固相の変位と液相の変位が等しいとすると、両者の体積ひずみは等しくなる。この条件を利用して、(34),(36)式を(31)式に代入して、全応力速度とひずみ速度の関係を求めると、その剛性マトリックスは、次の様になる。

$$\begin{bmatrix} 3G-(3G)^2/(H+H_c), & 3GK\mu/(H+H_c)) \\ 3GK\beta/(H+H_c), & K+(K_w/n)-K^2\mu\beta/(H+H_c) \end{bmatrix}$$

.....................(37)

(37)式、および(37)式の対称化されたマトリックス$[E^S]$に対してその行列式を求めると、それぞれ次の様になる。

$$\det[E] = 3G(K+\kappa)-(3G)^2(K+\kappa)/(H+H_c) - 3GK^2\mu\beta/(H+Hc) \quad \text{.....(38)}$$

$$\det[E^s] = 3G(K+\kappa)-(3G)^2(K+\kappa)/(H+H_c) - 3GK^2\mu\beta/(H+Hc)-(3GK(\mu-\beta))^2/4(H+H_c)^2$$

...................................(39)

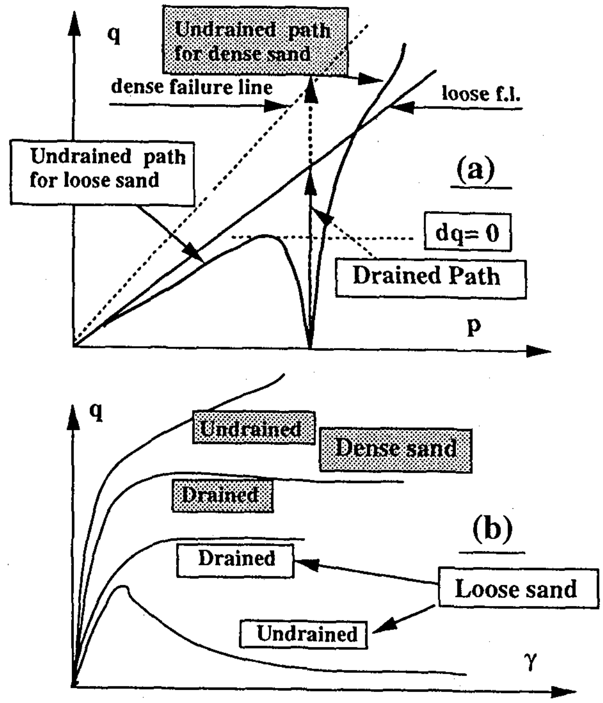
両方の式に対して、κ>>K,Gの条件を与えてその行列式が0となる近似解を求めると、同一の結果となり、

$$H = -K\mu\beta \quad \text{...(40)}$$

の条件となる。すなわち、間隙水の体積圧縮係数が固相の弾性定数と比較して非常に大きいという条件（完全飽和）のもとでは、本来の非対称なマトリックスの行列式＝0と対称化されたマトリックスの正値性(Hillの安定性)の喪失がほぼ同じ条件となるという結果が得られたことになる（2.4節(2)参照）。

(40)式より、正のダイレイタンシーを示す(β>0)密詰め砂の場合には、ひずみ軟化状態(H<0)が安定性を失うために必要という結果になり、飽和度が低くなればκ>>K,Gという近似は成立せず、排水時の安定性の条件に近づいていく．(2.4節(3))、ダイレイタンシーが負となる緩詰め砂の場合には、固相がひずみ硬化時(H>0)に安定性が失われるという結果となり、図−3に示す緩詰め砂の実験の傾向（固相のみの場合には、応力状態はまだ破壊条件の内部に位置し塑性係数Hは明らかに正であるのに、全体の応力ひずみ関係はひずみ軟化を示す）と一致することになる。関連流動則を用いた場合には、(40)式で予想されるように、ダイレイタンシーの傾向によらず、ひずみ軟化時あるいはピーク時（β=0の時、H=0となる；粘性土に対するCam-clayモデルは最終的にCritical State（限界状態）に至り、そこではH=0かつβ=0である）に不安定挙動が発生しうるという結果となり、全く実験傾向と一致しない（偏差関連流動則に限定しない、より一般的な非関連流動則に対する議論はRunesson et al[20]に詳しい）。

非排水条件を非圧縮の条件（$\dot\varepsilon_v$=0）とみなす定式化では、構成関係として、以下の式のみが残ることになる。



図−3：飽和砂の非排水時の変形挙動（概念図）
(a)有効応力経路；(b)応力ひずみ関係

$$\dot q = \frac{3G(H+K\mu\beta)}{H+3G+K\mu\beta}\dot\varepsilon \quad \text{..................................(41)}$$

(40)式の条件は$\dot q$=0の条件に等しく、非排水時の応力ひずみ関係のピークを与え、また2次の仕事増分d^2W=0というHillの安定性の条件の喪失とも一致していることが容易に理解できる。以上より、排水·非排水とも提案する条件が実験の安定な変形挙動と定性的には一致する条件となっていることがわかる．

5.4　間隙水圧の変化に対する安定性の検討

Lade et al.[2]は、常に間隙水圧が上昇し続ける場合には、正のダイレイタンシーを示す密な飽和砂でも不安定挙動を示すという実験結果を得ている。これは、周囲から強制的な流入があれば、密な砂であっても不安定になる可能性があることを示す、地盤工学上重要な実験結果である．このような強制注入による不安定挙動を、微小な摂動が成長するかどうかという安定性の議論で検討することはできない。すなわち、彼らの実験は、基本的には安定性の議論とは異質なものであるといえる。

ここでは、微小な間隙水圧の上昇があったとき、どのような条件の下で、継続的な間隙水圧の上昇に至り不安定な挙動を示すかという観点から、安定性の簡単な議論を行う。いま、$\dot u^w$という微小な間隙水圧の上昇があったとする。非排水条件という最も苛酷な条件を考える。このとき、表面力と釣り合い条件を満足する全応力は変化がないものとする。間隙水圧の上昇$\dot u^w$は有効拘束圧$\dot p$の減少となり、塑性体積ひずみ変化をもたらす。その塑性体

積変化は非圧縮条件を満足するように弾性体積変化をもたらす．この時、発生する間隙水圧を$\dot{u}^t$と記すと、次の式が成立する：

$$-(\dot{u}^t/K)-\beta \mathrm{tr}(\mathbf{n}\dot{\sigma})/H=0 \qquad \cdots\cdots(42)$$

$\mathrm{tr}(\mathbf{n}\dot{\sigma})=\dot{q}-\mu\dot{p}=-\mu\dot{p}$、$\dot{p}=-\dot{u}^w$を(42)式に代入して、間隙水圧が減衰していく条件、すなわち安定性の条件を考えると、

$$\left(\dot{u}^t/\dot{u}^w\right)=-(K\mu\beta/H)\ <1 \qquad \cdots\cdots(43)$$

となり、(40)式と同じ条件で与えられることがわかる。すなわち、間隙水圧の微小な変化に対しても、(40)式は安定性の条件となっていることが理解できる。知られている安定性に関する実験結果に対しては、提案する条件は満足すべきものとなっている．しかし、理論的根拠に欠ける条件であるので、さらに検討を進める必要がある．

6．結論

地盤材料の構成式は非対称な構成マトリックスをもつ非関連流動則に基づいて定式化されることが多い。このような構成式を用いた場合には、安定性に対して十分な検討を行う必要がある。本文では、安定性の過去の議論に関するレビュー、Hillの安定性の条件および動的安定性の条件の簡潔な導入を行い、議論の背景、成立条件および二つの関係を数学的および物性論的観点から議論した。その結果、二つの条件は必ずしも絶対的な条件ではなく、便宜的な条件の提案が可能であることが解かった。そこで、数値解析上便利な条件であり、砂のような粒状体の実験的な安定性を最もよく表現する条件として、変形に対する拘束条件も含めた構成マトリックスの行列式が正であるとする便宜的な安定性の条件を提案した。その条件を局所的安定性の条件として考え、Lade et al.の実験結果と比較し、排水・非排水両者の安定性の条件として妥当であることを定性的議論により示した。

非対称な構成マトリックスをもつような材料についての安定性の条件の理論的・物性的検討は全く十分ではなく、より詳細な研究が必要とされる。また、分岐条件が満たされた後、どちらの解を選択するのかといった分岐と安定性の関係、安定性を満足しない構成モデルは力学的意味があるのかなどの基本的問題についても今後の課題となる。これらの問題が解決されて始めて、有限要素法による数値解析においてどのようなアルゴリズムにより、分岐現象を含む塑性不安定の解析を行えばよいのかの評価が可能になるものと思われる。

参考文献

1)Lade, P.V., R.B.Nelson and Y.M.Ito:Nonassociated flow and stability of granular materials, J. Eng. Mech., ASCE, Vol.113(9), pp.1302-1318, 1987

2)Lade, P.V., P.A. Bopp and J.F. Peters: Instability of dilating sand, Mechanics of Materials, 16, pp.249-264, 1993

3)Tatsuoka,F. and K. Ishihara: Yielding of sand in triaxial compression, Soils and Foundations, Vol.14(2), pp.63-76, 1974

4) Runesson, K. and Mroz, G.:A note on non-associated plasticity, Int. J. Plasticity, Vol.5, pp.639-658, 1989

5)橋口公一:最新弾塑性学、朝倉書店、1991

6)Maier, G. and Heuckel, T. : Nonassociated and coupled flow rules of elastoplasticity for rock-like materials, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. &Geomech. Abstr. Vol.16, pp.77-92, 1979

7)飛田：砂の様な粒状体の構成式の安定性、地盤の破壊とひずみの局所化に関するシンポジウム発表論文集、pp.127-134, 1994

8)Bazant, Z. and Cedolin,L.: Stability of Structures, Oxford Univ. Pres., 1991

9)Molenkamp, F: Material instability for drained and undrained behavior, Int. J. Num. Anal. Methods in Geomech. Vol.15, pp.147-180, 1991

10)Bruhns, O. T.:Bifurcation problems in plasticity, The Constitutive Law in Thermoplasticity, (Lehmann, T.H. ed.) Springer Verlag, pp.465- 539,1984

11)Maugin, G.: The thermomechanics of plasticity and fracture, Cambridge Univ. Pres., 1992

12)Leroy, Y.M.: Linear stability analysis of rate dependent discrete systems, Int. J. Solids and Structures, Vol.27(6), pp.781-808, 1991

13)Darve,F.:Stability and uniqueness in geomaterials constitutive modelling, Localization and Bifurcation Theory for Soils and Rocks, Balkema, pp.73-88, 1994

14)Lanczos,C.:The Variational Principles of Mechanics, Dover, (1986, Republication, originally in 1970)

15)Hill, R.: Aspects of invariance in solid mechanics, Advances in Applied Mechanics, Vol.18, pp.147-180, 1978

16)Bigoni, D. and T. Heuckel: Uniqueness and localization I:Associated and non-associated elastoplasticity, Int. J. Solids Structures, Vol.28(2), pp.197-213, 1991

17)飛田、吉田：砂の様な粒状体の増分非線形モデル：重要性と定式化、構造工学論文集、土木学会、Vol.39A, pp.387-398, 1993

18)Mirsky, L.: An introduction to linear algebra, Dover, 1990

19)Steinmmann, P. and Willam, K.: Finite elements for capturing localized failure, 2nd International Workshop on Numerical Methods for Localization and Bifurcation of Granular Bodies, pp.161-189, 1989

20)Runesson, K., K. Axelsson and M. Klinski: Characteristics of constitutive relations in soil plasticity for undrained behavior, Int. J. Solids Structures, Vol.29(3), pp.363-380, 1992

(1995年9月18日受付)