

介在物のある弾性体に対する一数值解析方法

A NUMERICAL TECHNIQUE FOR ELASTIC MATERIALS WITH INHOMOGENEITIES

小山 茂*, 岩熊哲夫**, 堀 宗朗***

Shigeru KOYAMA, Tetsuo IWAKUMA and Muneo HORI

*修(工) 東北大学助手 工学部土木工学科 (〒980-77 仙台市青葉区荒巻字青葉)

**Ph.D. 東北大学教授 工学部土木工学科

***Ph.D. 東京大学助教授 工学部土木工学科 (〒113 東京都文京区本郷 7-3-1)

Equivalent Inclusion Method is frequently used in problems of nonhomogeneous materials. An advantage of this method is that we obtain analytic solutions of equilibrium equations of the nonhomogeneous materials, if inclusions are ellipsoidal in shape. But in the case of arbitrary shape, it is almost impossible to express mechanical behavior of the nonhomogeneous materials analytically. In order to calculate stress(strain) distribution of such materials numerically, we here try to establish a numerical technique in utilizing a functional by Hashin and Shtrikman.

Key Words : inhomogeneities, equivalent inclusion method, Hashin and Shtrikman's variational principle

1. まえがき

コンクリートであれば骨材やクラック, 地盤・岩盤であれば節理や空隙, 更に圧力の作用した空隙等といったように, 土木の分野で使用される材料のほとんどは内部に何等かの微視構造を有しており, 不均一材料であると考えてよい. このような不均一な材料を扱う解析法の一つに等価介在物法¹⁾がある. この手法は, 無限領域中に単一の楕円体介在物が存在するとき, その内部に発生する応力(ひずみ)が一定の値になるという Eshelby の研究²⁾に基礎を置いている. この結果を利用することにより, 楕円体介在物を有する材料の力学的挙動を, 解析的にしかも比較的容易に求めることができる. さらに, self-consistent 法³⁾や Mori-Tanaka の方法⁴⁾等を導入することにより, 土木の分野で第一に必要とされる巨視的挙動の予測を, 微視構造の存在を考慮した上でのある種の平均として求めることもできるという利点もあり, その報告も多くなされている⁵⁾⁶⁾. しかしながら, 介在物の形状が楕円体以外のものとなったり, 異方性材料であったりする現実の問題に対しては, 解析的な予測はほぼ不可能となる.

したがって, 任意の形状の介在物を有する材料の解析を等価介在物法を利用して行う場合, 数値的な取扱いが一つの選択肢と成りうる. そこで本論文では, Hashin と Shtrikman が示した汎関数を基に有限要素法的な解析を二次元の弾性問題を対象として行うことにより, 任意の形状の介在物を有する材料に発生する応力(ひずみ)分布を数値的に求め, より広範囲な不均一材料の力学的挙動を予測する手法を示す.

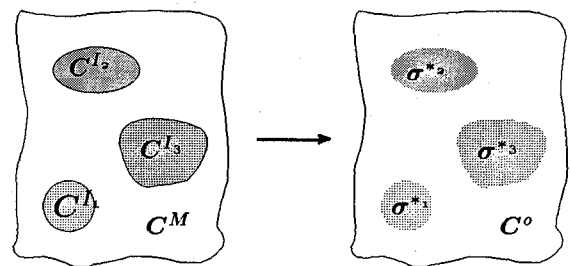


図-1 等価介在物法概念

2. 解析方法

解析対象の一例として, 図-1 左に示すような不均一な材料を考える. 図中の網掛けの部分に介在物, その他の部分を母材とし, それぞれの弾性定数テンソル $C^i (i = 1, 2, 3)$, C^M は共に既知であるとする. したがって, 場所によっては異なった材料が存在するために, この材料全体の弾性定数テンソルは場所の関数 $C = C(x)$ と書くべきであり, 構成則は,

$$\sigma_{ij}(x) = C_{ijkl}(x) \epsilon_{kl}(x) \quad (1)$$

と表せる. この構成則の元で, 任意の外力が作用した場合のつり合い式を境界値問題として解くというのが, 通常の弾性論に従う手法であるが, 等価介在物法では, 図-1 右に示すように, 不均一な材料を弾性定数テンソル C^0 の単一材料に置換える一方で, 介在物が存在した部分には残留応力もしくは熱応力のようなもの $\sigma^{*i}(x) (i = 1, 2, 3)$ を分布させて問題を解く. ここで, $\sigma^{*i}(x) (i = 1, 2, 3)$ はアイゲン応力と呼ばれ, 元の問題の介在物内部の応力と等価な解が得られるように決めな

ければならない未知量であることから「等価介在物」の名称がある。また、実際の計算において弾性定数テンソル C^0 は解析者が設定する。すると、式 (1) は次のように書き改められる。

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = C_{ijkl}^0 \epsilon_{kl}(\mathbf{x}) + \sigma_{ij}^*(\mathbf{x}) \quad (2)$$

この問題のつり合い式は、

$$\sigma_{ij,i}(\mathbf{x}) = C_{ijkl}^0 \{\epsilon_{kl,i}^0 + \epsilon_{kl,i}^d(\mathbf{x})\} + \sigma_{ij,i}^*(\mathbf{x}) = 0 \quad (3)$$

となる。ここで、右辺第二項目はひずみを平均成分 ϵ^0 と介在物が存在するために生じる乱れ成分 $\epsilon^d(\mathbf{x})$ とに分解したことを表している。このつり合い式は、均一な材料に外力 $\sigma_{ij,i}^*(\mathbf{x})$ が作用したときのものと解釈することができる。したがって、弾性定数テンソル C^0 を持つ均一体の Green 関数により、式 (3) の解である変位の乱れ成分 $u^d(\mathbf{x})$ が

$$u_i^d(\mathbf{x}) = \int G_{ikjl}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \sigma_{kl,i}^*(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (4)$$

となるので、応力やひずみといった材料の物理量はすべてアイゲン応力 $\sigma^*(\mathbf{x})$ によって表すことができる。また、未知数であるアイゲン応力は、介在物のある場所での応力の等価性から、式 (1) 式 (2) の右辺同志が等しくなければならない。次式から求められる。

$$R_{ijkl}(\mathbf{x}) \sigma_{kl,i}^*(\mathbf{x}) - \epsilon_{ij,i}^d(\mathbf{x}) - \epsilon_{ij}^0 = 0 \quad (5)$$

ただし、

$$\begin{aligned} R_{ijmn}(\mathbf{x}) \{C_{mnkl}(\mathbf{x}) - C_{mnkl}^0\} &\equiv I_{ijkl} \\ I_{ijkl} &\equiv \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \end{aligned} \quad (6)$$

と定義した。また、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。

介在物が楕円体の場合、式 (5) の第二項目が介在物の内部で一定となるため、不均一な材料の挙動を解析的に、しかも容易に求めることができる²⁾。ところが、介在物が任意の形状を持つ場合、この式を解析的に解くことはほぼ不可能で、数値的な解析を行う必要がある。

Hashin と Shtrikman は $R_{ijkl}(\mathbf{x})$ が正定値または $-R_{ijkl}(\mathbf{x})$ が正定値になるときに、次に示す汎関数の第一変分が式 (5) となること、つまり、 $s^*(\mathbf{x}) = \sigma^*(\mathbf{x})$ となるときに I が停留するということを導いた⁷⁾。

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_V \epsilon_{ij}^0 C_{ijkl}^0 \epsilon_{kl}^0 d\mathbf{x} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_V s_{ij}^*(\mathbf{x}) \{R_{ijkl}(\mathbf{x}) s_{kl,i}^*(\mathbf{x}) \\ &\quad \quad - \epsilon_{ij,i}^d(\mathbf{x}) - 2\epsilon_{ij}^0\} d\mathbf{x} \\ u_i^d(\mathbf{x}) &= 0 \text{ or } n_i \sigma_{ij}^d(\mathbf{x}) = 0 \text{ on } \partial V(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 $V(\mathbf{x})$ は材料内部の領域を $\partial V(\mathbf{x})$ は材料表面を表す。また、 σ^0 は平均応力を表し、 $\sigma^d(\mathbf{x})$ は応力の乱れ成分であり、 $\sigma(\mathbf{x}) - \sigma^0$ によって定義される。そこでここでは、式 (7) の汎関数の停留値問題を有限要素解析的に近似・離散化し、アイゲン応力を求めることにする。

3. 定式化

3.1 解析対象と Green 関数

ここでは、解析対象を二次元等方線形弾性体とし、母材が介在物に比べて十分大きいものとする。したがって、Green 関数は均一無限体のものを用いることができ、平面ひずみ問題の場合

$$G_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{\{(3 - 4\nu^0)\delta_{ij} \ln(\frac{1}{r}) + r_{,i} r_{,j}\}}{8\pi\mu^0(1 - \nu^0)} \quad (8)$$

である。ここで、 r は二点 $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ 間の距離、 μ^0, ν^0 はそれぞれ弾性定数テンソル C^0 を有する単一材料のせん断弾性係数とポアソン比である。平面応力問題の場合は ν^0 を $\nu^0/(1 + \nu^0)$ と置換えるだけであるから、両者の定式化には大きな差はない。したがって、以後平面ひずみ問題についての定式化についてのみ説明する。

3.2 離散化

式 (7) の $s^*(\mathbf{x})$ を改めて $\sigma^*(\mathbf{x})$ と表記すると、式 (7) の第一変分は任意の $\delta\sigma_{ij}^*(\mathbf{x})$ に対して

$$\int_V \delta\sigma_{ij}^*(\mathbf{x}) \{R_{ijkl}(\mathbf{x}) \sigma_{kl,i}^*(\mathbf{x}) - \epsilon_{ij,i}^d(\mathbf{x}) - \epsilon_{ij}^0\} d\mathbf{x} = 0 \quad (9)$$

となる。ここで、 $\sigma_{ij}^*(\mathbf{x}) \epsilon_{ij,i}^d(\mathbf{x})$ の変分についてであるが、正確には

$$\delta\{\sigma_{ij}^*(\mathbf{x}) \epsilon_{ij,i}^d(\mathbf{x})\} = \delta\sigma_{ij}^*(\mathbf{x}) \epsilon_{ij,i}^d(\mathbf{x}) + \sigma_{ij}^*(\mathbf{x}) \delta\epsilon_{ij,i}^d(\mathbf{x}) \quad (10)$$

と書かれなければならない。ところが、式 (7-b) の境界条件の下で上式は

$$\delta\{\sigma_{ij}^*(\mathbf{x}) \epsilon_{ij,i}^d(\mathbf{x})\} = 2\delta\sigma_{ij}^*(\mathbf{x}) \epsilon_{ij,i}^d(\mathbf{x}) \quad (11)$$

となることが証明されており⁸⁾、式 (9) が成立することに注意する。

式 (9) に対して有限要素法と同様の離散化を試みる。ここではもっとも簡単な「定アイゲン応力」三角形要素で離散化を行う。いま、介在物を N 個の小領域 $V(\mathbf{x}^{(1)}), V(\mathbf{x}^{(2)}), \dots, V(\mathbf{x}^{(N)})$ に分割し、各要素ごとに σ_{ij}^* が一定であることに注意すれば、それを代入した後では形式的に以下の式が各要素 $V^{(n)} \equiv V(\mathbf{x}^{(n)})$ について成立する。

$$\begin{aligned} &\left\{ \int_{V^{(n)}} R_{ijkl}(\mathbf{x}^{(n)}) d\mathbf{x}^{(n)} \right\} \sigma_{kl,i}^{*(n)} \\ &\quad - \int_{V^{(n)}} \epsilon_{ij,i}^d(\mathbf{x}^{(n)}) d\mathbf{x}^{(n)} - A^{(n)} \epsilon_{ij}^0 = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、上付きの (n) で与えられた所量は、 n 番目要素内での各所量を表し、 $A^{(n)}$ は、

$$A^{(n)} \equiv \int_{V^{(n)}} d\mathbf{x}^{(n)} \quad (13)$$

で定義される要素の面積である。なお、 n については特に明記しない限り総和規約はもちいないものとする。さらに、式 (12) 第二項目の $\epsilon_{ij,i}^d(\mathbf{x}^{(n)})$ は、式 (4) および変

位-ひずみ関係を考慮して

$$\epsilon_{ij}^d(\mathbf{x}^{(n)}) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \int_{V(p)} \{G_{ik,lj}(\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}'^{(p)}) + G_{jk,li}(\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}'^{(p)})\} d\mathbf{x}'^{(p)} \sigma_{kl}^{*(p)} \quad (14)$$

と表すことができる。

いま、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{*(n)} &\equiv [\sigma_{xx}^{*(n)}, \sigma_{yy}^{*(n)}, \sigma_{xy}^{*(n)}] \\ \boldsymbol{\epsilon}^d(\mathbf{x}^{(n)}) &\equiv [\epsilon_{xx}^d(\mathbf{x}^{(n)}), \epsilon_{yy}^d(\mathbf{x}^{(n)}), 2\epsilon_{xy}^d(\mathbf{x}^{(n)})] \\ \boldsymbol{\epsilon}^0 &\equiv [\epsilon_{xx}^0, \epsilon_{yy}^0, 2\epsilon_{xy}^0] \end{aligned} \quad (15)$$

で定義し、更に、

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x}) &\equiv \alpha(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} 1-\nu(\mathbf{x}) & \nu(\mathbf{x}) & 0 \\ \nu(\mathbf{x}) & 1-\nu(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu(\mathbf{x})}{2} \end{pmatrix} \\ C^0 &\equiv \alpha^0 \begin{pmatrix} 1-\nu^0 & \nu^0 & 0 \\ \nu^0 & 1-\nu^0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu^0}{2} \end{pmatrix} \\ \alpha(\mathbf{x}) &\equiv \frac{E(\mathbf{x})}{(1+\nu(\mathbf{x}))(1-2\nu(\mathbf{x}))} \\ \alpha^0 &\equiv \frac{E^0}{(1+\nu^0)(1-2\nu^0)} \\ R(\mathbf{x}^{(n)}) &\equiv (C(\mathbf{x}^{(n)}) - C^0)^{-1} \end{aligned} \quad (16)$$

と定義する。ここに、 $E(\mathbf{x}), \nu(\mathbf{x})$ はそれぞれ元の問題のヤング率とポアソン比、 E^0 は弾性定数テンソル C^0 を有する単一材料のヤング率である。式 (15)、式 (16) により式 (12) は

$$\left\{ \int_{V(n)} R(\mathbf{x}^{(n)}) d\mathbf{x}^{(n)} \right\} \boldsymbol{\sigma}^{*(n)} - \int_{V(n)} \boldsymbol{\epsilon}^d(\mathbf{x}^{(n)}) d\mathbf{x}^{(n)} - A^{(n)} \boldsymbol{\epsilon}^0 = \mathbf{0} \quad (17)$$

と書き改められる。式 (17) の第一項目は、 $C(\mathbf{x})$ が既知であると仮定しており、また C^0 は解析者が設定できる量であるから、積分を行うことが可能である。式 (17) の第二項目については、 $A^{(n,p)}$ によって $\boldsymbol{\sigma}^{*(p)}$ と $\boldsymbol{\epsilon}^d(\mathbf{x}^{(n)})$ との関係が

$$\boldsymbol{\epsilon}^d(\mathbf{x}^{(n)}) = \sum_{p=1}^N A^{(n,p)} \boldsymbol{\sigma}^{*(p)} \quad (18)$$

のように表すことができる (付録 I)。したがって、式 (17) は以下になる。

$$\begin{aligned} &\left\{ \int_{V(n)} R(\mathbf{x}^{(n)}) d\mathbf{x}^{(n)} \right\} \boldsymbol{\sigma}^{*(n)} \\ &- \left\{ \int_{V(n)} A^{(n,p)}(\mathbf{x}^{(n)}) d\mathbf{x}^{(n)} \right\} \boldsymbol{\sigma}^{*(p)} \\ &- A^{(n)} \boldsymbol{\epsilon}^0 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (19)$$

上式は各要素について成立しなければならないので、いま新たに $\boldsymbol{\sigma}^*$ を

$$\boldsymbol{\sigma}^* \equiv [\boldsymbol{\sigma}^{*(1)}, \boldsymbol{\sigma}^{*(2)}, \dots, \boldsymbol{\sigma}^{*(N)}] \quad (20)$$

と定義すると、式 (19) は形式上 $\boldsymbol{\sigma}^*$ についての連立一次方程式となり、これだけを見ると $\boldsymbol{\sigma}^*$ は簡単に求められるように見える。ところが、Green 関数は $\ln(r)$ の特異性を持っており、したがってその Green 関数を二階微分した式 (14) の被積分関数は $(1/r^2)$ の特異性を持つことになる。 $n=p$ すなわち、 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{x}'$ が同領域にあるとき、三角形領域に於いてこの積分を評価することは解析的にも数値的にもほとんど不可能である。

そこでここでは、式 (19) は用いずに、式 (4) を利用した別の $\boldsymbol{\sigma}^{*(p)}$ と $\boldsymbol{\epsilon}^d(\mathbf{x}^{(n)})$ との関係式を構築し定式化を試みる。いま、各要素内の変位が線形で与えられると仮定し、 n 番目要素の各頂点の節点変位ベクトルを

$$\mathbf{u}^{d(n)} \equiv [u_{x1}^{d(n)}, u_{y1}^{d(n)}, u_{x2}^{d(n)}, u_{y2}^{d(n)}, u_{x3}^{d(n)}, u_{y3}^{d(n)}] \quad (21)$$

で定義する。ここで、下付きの $xi, yi (i=1, 2, 3)$ はそれぞれ第 i 頂点の x 方向変位、 y 方向変位を表す。更に

$$\begin{aligned} \Gamma^{(n,p)} &\equiv \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^{(n1,p)} & \Gamma_{12}^{(n1,p)} & \Gamma_{13}^{(n1,p)} \\ \Gamma_{21}^{(n1,p)} & \Gamma_{22}^{(n1,p)} & \Gamma_{23}^{(n1,p)} \\ \Gamma_{11}^{(n2,p)} & \Gamma_{12}^{(n2,p)} & \Gamma_{13}^{(n2,p)} \\ \Gamma_{21}^{(n2,p)} & \Gamma_{22}^{(n2,p)} & \Gamma_{23}^{(n2,p)} \\ \Gamma_{11}^{(n3,p)} & \Gamma_{12}^{(n3,p)} & \Gamma_{13}^{(n3,p)} \\ \Gamma_{21}^{(n3,p)} & \Gamma_{22}^{(n3,p)} & \Gamma_{23}^{(n3,p)} \end{pmatrix} \\ \Gamma_{11}^{(n1,p)} &\equiv \int_{V(p)} G_{xx,x}(\mathbf{x}^{(n1)} - \mathbf{x}'^{(p)}) d\mathbf{x}'^{(p)} \\ \Gamma_{12}^{(n1,p)} &\equiv \int_{V(p)} G_{xy,y}(\mathbf{x}^{(n1)} - \mathbf{x}'^{(p)}) d\mathbf{x}'^{(p)} \\ \Gamma_{13}^{(n1,p)} &\equiv \int_{V(p)} \{G_{xx,y}(\mathbf{x}^{(n1)} - \mathbf{x}'^{(p)}) + G_{xy,x}(\mathbf{x}^{(n1)} - \mathbf{x}'^{(p)})\} d\mathbf{x}'^{(p)} \\ \Gamma_{21}^{(n1,p)} &\equiv \int_{V(p)} G_{xy,x}(\mathbf{x}^{(n1)} - \mathbf{x}'^{(p)}) d\mathbf{x}'^{(p)} \\ \Gamma_{22}^{(n1,p)} &\equiv \int_{V(p)} G_{yy,y}(\mathbf{x}^{(n1)} - \mathbf{x}'^{(p)}) d\mathbf{x}'^{(p)} \\ \Gamma_{23}^{(n1,p)} &\equiv \int_{V(p)} \{G_{xy,y}(\mathbf{x}^{(n1)} - \mathbf{x}'^{(p)}) + G_{yy,x}(\mathbf{x}^{(n1)} - \mathbf{x}'^{(p)})\} d\mathbf{x}'^{(p)} \end{aligned} \quad (22)$$

と定義する。ここで、 $\mathbf{x}^{(ni)}$ は n 番目要素第 i 頂点の座標値を表す。したがって、式 (4) を考慮すれば、

$$\mathbf{u}^{d(n)} = \sum_{p=1}^N \Gamma^{(n,p)} \boldsymbol{\sigma}^{*(p)} \quad (23)$$

となる。そこで、式 (23) より求められた節点変位ベクトルに、通常の有限要素法で使われる節点変位とひずみとを関係付けるマトリックス $[B]$ を乗じたものを各要素のひずみの乱れ成分として用いる。つまり、

$$\boldsymbol{\epsilon}^d(\mathbf{x}^{(n)}) = B^{(n)} \mathbf{u}^{d(n)} \quad (24)$$

ここで、

$$\boldsymbol{\epsilon}^d(\mathbf{x}^{(n)}) \equiv [\epsilon_{xx}^d(\mathbf{x}^{(n)}), \epsilon_{yy}^d(\mathbf{x}^{(n)}), 2\epsilon_{xy}^d(\mathbf{x}^{(n)})] \quad (25)$$

と定義した。この方法において、ひずみはの乱れ成分は各要素ごとに一定の値となる。もちろん、線形ひずみも

しくは高次のひずみを仮定して計算しても良いが、ここでは σ_{ij}^* を各要素で一定としているので、式 (2) とあわせて考えれば定ひずみとしても構わないであろう。また、式 (22) の被積分関数は $(1/r)$ の特異性を示すが、これは、三次元の境界要素法で物体力を扱う場合と同様、 $n = p$ の場合でも数値的に評価することが可能である⁹⁾。

以上より、

$$R^{(n)} \equiv \left\{ \int_{V^{(n)}} R(x^{(n)}) dx^{(n)} \right\}$$

$$R \equiv \begin{pmatrix} R^1 & & 0 \\ & R^2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & R^N \end{pmatrix}$$

$$\Gamma \equiv \begin{pmatrix} B^{(1)}\Gamma^{(1,1)} & B^{(1)}\Gamma^{(1,2)} & \dots & B^{(1)}\Gamma^{(1,N)} \\ B^{(2)}\Gamma^{(2,1)} & B^{(2)}\Gamma^{(2,2)} & \dots & B^{(2)}\Gamma^{(2,N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B^{(N)}\Gamma^{(N,1)} & B^{(N)}\Gamma^{(N,2)} & \dots & B^{(N)}\Gamma^{(N,N)} \end{pmatrix} \quad (26)$$

と定義すれば、式 (17) は次式のように書き改められる。

$$(R - \Gamma)\sigma^* = \epsilon^0 \quad (27)$$

したがって、最終的に σ^* を求めるためには

$$\sigma^* = (R - \Gamma)^{-1} \epsilon^0 \quad (28)$$

を解けばよい。なお、実際に解析する際には、 ϵ^0 を解析者がパラメータとして与え、その値に対応する σ^* を求めることになる。

4. 数値解析例

本論文で提案した解析法の妥当性を検証するため、解析解の存在する問題に対して数値解析を行う。

4.1 円孔を有する無限板の解析

$x = \infty$ で一様な引っ張りひずみ $\epsilon_{xx}^0 = 1$ を受ける円孔を有する無限板の解析を行った。解析対象の概略図と板の材料定数を図-2に示す。また、 E^0, ν^0 として、板のヤング率とポアソン比を用いた。この問題では、円孔を介在物とみなすことができ、アイゲン応力の発生はこの領域に限られる。したがって、要素分割は円孔部分だけで良い。要素分割は図-3に示すように円孔を正多角形で近似したものとし、要素数として 4, 8, 16, 32, 64 を用いた。

図-4に解析結果を示す。図-4-a は円孔部分に発生するひずみの乱れ成分 ϵ_{xx}^d について、図-4-b は応力集中係数についての結果である。両者共に、横軸を要素数、縦軸を数値解の解析解に対する相対誤差として両対数で示してのものである。ただし、数値解として、ひずみの乱れ成分としては円孔部分での平均を、応力集中係数

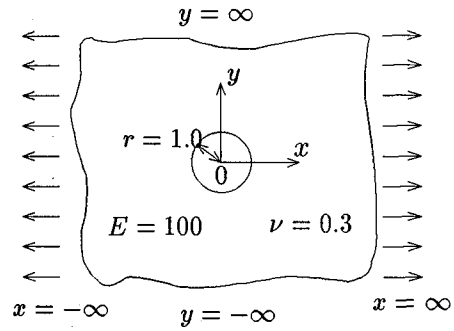


図-2 一様引っ張りを受ける円孔を有する無限板

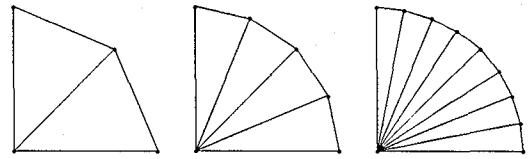


図-3 有限要素メッシュ・1

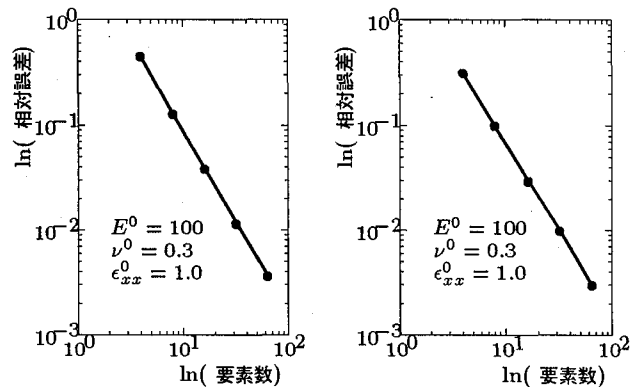


図-4-a ϵ_{xx}^d の収束

図-4-b 応力集中係数の収束

図-4 数値解析結果・1

としては円孔と板の境界部に発生する応力を遠方場の応力で除したものをを用いている。両図から本数値解は解析解に収束していることがわかる。

4.2 Tanaka-Mori の理論

介在物が楕円体の場合、その内部に発生するひずみの乱れ成分が一樣となることは前に述べたが、外部に発生するひずみの乱れ成分が一樣となることはなく、一般に複雑な関数となる。しかし、楕円体介在物 Ω があり、それを囲む楕円体領域 V を考えたとき、 $V - \Omega$ 内でのひずみの乱れ成分の積分 $\int_{V-\Omega} \epsilon_{ij}^d(x) dx$ は簡単な形となり、特に Ω と V が同じ形の楕円体であれば、

$$\int_{V-\Omega} \epsilon_{ij}^d(x) dx = 0 \quad (29)$$

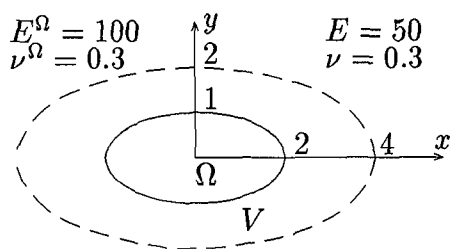


図-5 楕円領域に一樣アイゲン応力を受ける無限板

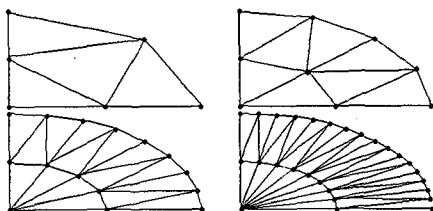


図-6 有限要素メッシュ・2

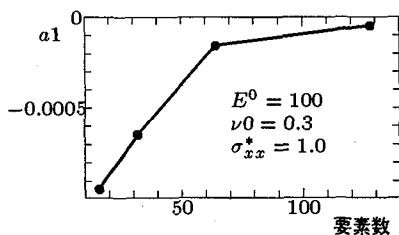


図-7-a $V - \Omega$ 内の ϵ_{xx}^d の平均値

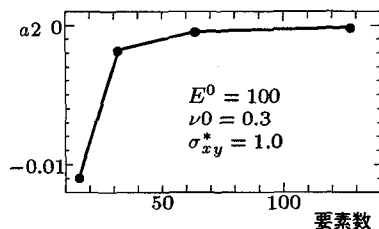


図-7-b $V - \Omega$ 内の ϵ_{xy}^d の平均値

図-7 数値解析結果・2

となること、Tanaka-Mori によって示されている¹⁰⁾。ここでは、この Tanaka-Mori の結果を本数値解析によって確認する。

解析対象を、単一の楕円体介在物を有する無限板とする。解析対象の概略図と用いた材料定数を図-5 に示す。 E^0, ν^0 としては外部領域のヤング率 E 、ポアソン比 ν を使用した。この問題では、領域 Ω と $V - \Omega$ を要素分割し、領域 Ω 内に発生するアイゲン応力を求めた後に、このアイゲン応力を利用して領域 $V - \Omega$ 内に発生するひずみの乱れ成分を計算する。有限要素分割は図-

6 示したものを、用いた要素数はそれぞれ 16, 32, 64, 128 である。

図-7 に解析結果を示す。図-7-a は要素数と無限遠で $\epsilon_{xx}^0 = 1$ の一様引っ張りを与えたときに、領域 $V - \Omega$ に発生するひずみの乱れ成分 ϵ_{xx}^d の平均として定義した a_1 との関係を、図-7-b は要素数と無限遠で $\epsilon_{xy}^0 = 1$ の一様せん断を与えたときに、領域 $V - \Omega$ に発生するひずみの乱れ成分 ϵ_{xy}^d の平均として定義した a_2 との関係を、それぞれ示している。図から明らかなように、要素数が増えるにつれひずみの乱れ成分の平均の絶対値 $|a_1|, |a_2|$ は小さくなっているものの、厳密には 0 に収束していない。これは、現実には領域 $V - \Omega$ に発生するひずみの乱れ成分が、領域 Ω から離れるにつれ $1/r^2$ のオーダーで減少してゆくのに対して、本数値解ではひずみの乱れ成分を要素内で一定にしているというのが原因である。しかし、 a_1, a_2 と領域 $V - \Omega$ に発生するひずみの乱れ成分との比較を行ったところ、 a_1, a_2 の方が 10^{-2} 程小さいことがわかった。したがって、 a_1, a_2 は 0 ではないがほとんど無視できる量であり、式 (29) は近似的にはあるが成立すると考えて構わないであろう。

5. 結語

介在物のある弾性体に対する一数値解析法を提案し、解析解の存在する問題に適用し良好な結果を得られたことにより、その妥当性を確認することができた。

今回は最も簡単な二次元等方弾性体への適用だけを示したが、三次元弾性問題への拡張は Green 関数が異なるだけであるので容易である。また、異方性や材料非線形を示す材料のような Green 関数が存在しない問題に対しても、等価介在物置換ができれば、使用する Green 関数は等方弾性体のものであるとその適用は難しいことではない。

謝辞： この研究は平成 7 年度文部省科学研究費補助金・一般研究 (代表者 岩熊哲夫) の一部として行なった。

付録 I 行列 $\Lambda^{(n,p)}$

$$\Lambda^{(n,p)}(\mathbf{x}^{(n)}) \equiv \begin{pmatrix} \Lambda_{11}^{(n,p)} & \Lambda_{12}^{(n,p)} & \Lambda_{13}^{(n,p)} \\ \Lambda_{21}^{(n,p)} & \Lambda_{22}^{(n,p)} & \Lambda_{23}^{(n,p)} \\ \Lambda_{31}^{(n,p)} & \Lambda_{32}^{(n,p)} & \Lambda_{33}^{(n,p)} \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{11}^{(n,p)} \equiv \sum_{p=1}^N \int_{V(p)} G_{xx,xx}(\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}'^{(p)}) d\mathbf{x}'^{(p)}$$

$$\Lambda_{12}^{(n,p)} \equiv \sum_{p=1}^N \int_{V(p)} G_{xy,xy}(\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}'^{(p)}) d\mathbf{x}'^{(p)}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{13}^{(n,p)} &\equiv \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \int_{V(p)} \{G_{xx,xy}(\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}'^{(p)}) \\
&\quad + G_{xy,xx}(\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}'^{(p)})\} d\mathbf{x}'^{(p)} \\
\Lambda_{21}^{(n,p)} &\equiv \sum_{p=1}^N \int_{V(p)} G_{xy,xy}(\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}'^{(p)}) d\mathbf{x}'^{(p)} \\
\Lambda_{22}^{(n,p)} &\equiv \sum_{p=1}^N \int_{V(p)} G_{yy,yy}(\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}'^{(p)}) d\mathbf{x}'^{(p)} \\
\Lambda_{23}^{(n,p)} &\equiv \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \int_{V(p)} \{G_{xy,yy}(\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}'^{(p)}) \\
&\quad + G_{yy,xy}(\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}'^{(p)})\} d\mathbf{x}'^{(p)} \\
\Lambda_{31}^{(n,p)} &\equiv \sum_{p=1}^N \int_{V(p)} G_{xx,xy}(\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}'^{(p)}) d\mathbf{x}'^{(p)} \\
\Lambda_{32}^{(n,p)} &\equiv \sum_{p=1}^N \int_{V(p)} G_{xy,yy}(\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}'^{(p)}) d\mathbf{x}'^{(p)} \\
\Lambda_{33}^{(n,p)} &\equiv \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \int_{V(p)} \{G_{xx,yy}(\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}'^{(p)}) \\
&\quad + G_{xy,xy}(\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}'^{(p)})\} d\mathbf{x}'^{(p)} \quad (I.1)
\end{aligned}$$

参考文献

- 1) Mura, T. : *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff Publ, 1982.

- 2) Eshelby, J. D. : The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems, *Proc. Roy. Soc. London*, Vol.A214, pp.376-396, 1957.
- 3) Hill, R. : A self-consistent mechanics of composite materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.13, pp.213-222, 1965.
- 4) Mori, T. and Tanaka, K. : Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions, *Act. Metall.*, Vol.21, pp.571-574, 1973.
- 5) 岩熊 哲夫・堀 宗朗・森 勉・村 外志夫 : 複合材料の平均的な硬化係数と延性の評価, 構造工学論文集, Vol.37A, pp.435-442, 1991.
- 6) 岩熊 哲夫・堀 宗朗・木谷 朋之・村 外志夫 : 内部に微視構造を有する材料の平均弾塑性関係の一評価, 構造工学論文集, Vol.39A, pp.375-380, 1993.
- 7) Hashin, Z. and Shtrikman, S. : On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.10, pp.335-342, 1962.
- 8) Nemat-Nasser, S. and Hori, M. : *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*, North-Holland, Netherlands, 1993.
- 9) 田中 正隆・松本 俊郎・中村 正之 : 境界要素法, 培風館, 1991
- 10) Tanaka, K. and Mori, T. : Note on volume integrals of the elastic field around an ellipsoidal inclusion, *J. Elasticity*, Vol.2, pp.199-200, 1972

(1995 年 9 月 18 日 受付)