

ブロック対角化理論による Duffing 非線形振動解析

Analysis of nonlinear Duffing's vibration using block-diagonalization method

有尾 一郎*

Ichiro ARIO

*博士(工学) 和歌山工業高等専門学校 環境都市工学科 助手(〒644 御坊市名田町野島 77)

A block-diagonalization method for solving nonlinear Duffing's vibration equation of symmetric structures is presented. The stiffness, the damping and the mass matrices are decomposed into a block-diagonal form by means of a suitable 'local' coordinate transformation, chosen based on a dual viewpoint of group theory and sparsity. The nonlinear Duffing's equation in this coordinate is to be solved block by block, thereby realizing numerical efficiency and greatly reducing the requisite amount of computer memory. Its efficiency is further upgraded with the use of block-diagonal decomposing computation.

Key Words : Duffing's vibration, block-diagonalization method, group theory, symmetric structures, nonlinear vibration

1. はじめに

対称性を持つ構造系はその対称性を張る固有の座標空間に分解されることは理工学分野では知られており、その有用性が幾つか述べられている^{1)~4)}。また、系の対称性は各種の物理現象と深い関わりがあり、対称性そのものが場の支配方程式に暗黙の内に組み込まれている。これに対し、対称性の系統的な分類を行わずに領域分割や部分構造合成等を用いて無作為な領域に分割し系の構造を解析する場合には、対称性の物理的および幾何学的な情報を崩してしまい理想とする高精度の解を得るには各手法によって限界がある。また通常これらの解は重ね合わせの原理が成り立つという条件下のもとで構造計算されるので、これらの方法は線形化された問題に限られるという弱点を持つ。近年、構造物の対称性の利用法として群論的分岐理論に基づくブロック対角化法が Ikeda・Murota ら (1991) によって提案され、数値解析効率において大きな成果を挙げている^{5)~9)}。

本研究はこのブロック対角化理論を離散化された対称系の非線形力学問題に適用するための方法論を述べる。特に、非線形振動解析については線形振動の挙動解析とは大きく異なり、その現象の多様性と複雑性から未だに予測不可能な振舞いがあり、数多くの難題が存在する。本論文では離散化された対称構造物に限定し、群対称性を利用し系の幾何学的対称性に基づく座標系に写像変換を施して Duffing 振動系の非線形連立微分方程式を不変に直交分解する方法を提案する。これにより、数値微分計算の Runge-Kutta 法の計算効率を高めるとともに、大規模対称系構造物に対し方程式の不変性を保ちながら振動問題を簡素化させることができることは、数学的技巧である中心多様体理論と共通する命題でもある。

2. Duffing 方程式のブロック対角化

この章では、幾何学的対称性を持つ非線形振動の Duffing 方程式のブロック対角化法の一般論について述べる。

2.1 Duffing 方程式の群同変性

ある m 自由度離散系の時刻 t における周期外力作用下の Duffing 非線形方程式¹⁾

$$\mathbf{F} \equiv M \begin{pmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \ddot{x}_m(t) \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_m(t) \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} x_1^3(t) \\ \vdots \\ x_m^3(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{pmatrix} \cos \omega t = \mathbf{0} \quad (1)$$

を考える。ここに、 $M, C, K \in \mathbf{R}^{m \times m}$ は質量、減衰および剛性からなる実対称行列を、 x_i, f_i は節点 i における変位と外力をそれぞれ表す。特に、本論文では式 (1) を

$$\mathbf{F}(\ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \gamma) = \ddot{\mathbf{x}} + \Gamma_1 \dot{\mathbf{x}} + \Gamma_0 \mathbf{y} - \gamma \cos \omega t = \mathbf{0} \quad (2)$$

の振動方程式を考えることとする。ここに、 $\Gamma_1 = M^{-1}C, \Gamma_0 = M^{-1}K, \gamma = M^{-1}\mathbf{f}, \mathbf{y} = (x_1^3, \dots, x_m^3)^T$ とおく。

Duffing 方程式の対称性を記述するにあたり、幾何学的変換を表す元 g から構成される群 G を考える。例えば群 G の元 g が N 次元ベクトル $\mathbf{y}(t)$ に作用すると、 $\mathbf{y}(t)$ が $g(\mathbf{y}(t))$ に変換されるとする。この座標変換の仕組みを表す $m \times m$ の表現行列 $T(g)$ は

$$T(g)\mathbf{y}(t) = g(\mathbf{y}(t)), \quad \forall g \in G \quad (3)$$

¹⁾ この論文では硬い非線形スティフネスの Duffing 系を対象とする。

を満たすものとする。この論文では $x, y, \gamma \in \mathbb{R}^m$ は同一の空間に存在するとしているので、外力ベクトル γ の表現行列も同一である。

この系の対称性は、群 G の元 g が引き起こす写像変換 $T(g)$ に対する、Duffing 方程式 F の不変性 (群 G 不変性)

$$T(g)F(\ddot{x}, \dot{x}, y, \gamma) = F(T(g)\ddot{x}, T(g)\dot{x}, T(g)y, T(g)\gamma) \quad \forall g \in G \quad (4)$$

という Duffing 方程式 F の同変条件式が求まる。条件式 (4) は幾何学的対称条件を一般化したものであり、変数 x, y, γ をそれぞれ $T(g)$ により変換することと、式 F 全体を $T(g)$ で変換することが等価であることを表す。式 (4) を、式 (2) を用いて書き下すと、

$$T(g)(\ddot{x} - \Gamma_1 \dot{x} - \Gamma_0 y - \gamma) = T(g)\ddot{x} - \Gamma_1 T(g)\dot{x} - \Gamma_0 T(g)y - T(g)\gamma, \quad \forall g \in G \quad (5)$$

となる。この式が全ての x, y について成立することから、

$$T(g)\Gamma_j = \Gamma_j T(g), \quad j = 0, 1, \quad \forall g \in G \quad (6)$$

という条件が求まる。これは行列 Γ_j がある座標変換行列によりブロック対角化可能であることを示している^{7), 8)}。ここでは、既約表現行列の直交性 $T(g)^{-1}T(g) = I$ に関する記述については文献 7) ~ 9) に譲ることとするが、座標変換行列はこの既約表現 μ から成り立っているものとする (例えば、付録 1 を参照)。

2.2 Duffing 方程式のブロック対角化

ある群 G の既約表現全体を $R(G)$ とし、既約表現に対応する座標系を、

$$\begin{aligned} x(t) &= Hw(t) = \sum_{\mu \in R(G)} H^\mu w^\mu(t) \\ y(t) &= Hz(t) = \sum_{\mu \in R(G)} H^\mu z^\mu(t) \end{aligned} \quad (7)$$

とおく。ここに座標変換行列 H と新しい座標系の変数 w, z は

$$\begin{aligned} H &= [\cdots, H^\mu, \cdots], \\ w &= [\cdots, (w^\mu)^T, \cdots]^T, \quad w^\mu \equiv [\cdots, w_k, \cdots]^T, \\ z &= [\cdots, (z^\mu)^T, \cdots]^T, \quad z^\mu \equiv [\cdots, z_k^3, \cdots]^T \end{aligned} \quad (8)$$

と既約表現毎の変数として表す。ただし $z_k = w_k$ であるとする。

座標変換行列 H により、行列 Γ_j を同時に

$$\tilde{\Gamma}_j = H^T \Gamma_j H = \text{diag}[\cdots, \tilde{\Gamma}_j^\mu, \cdots], \quad j = 0, 1 \quad (9)$$

とブロック対角化できる。ここに $\text{diag}[\cdots]$ はブロック対角行列を表し、

$$\tilde{\Gamma}_j^\mu = (H^\mu)^T \Gamma_j H^\mu, \quad j = 0, 1, \quad \forall \mu \in R(G) \quad (10)$$

である。 d 次既約表現 ($d \geq 2$) に対応するブロック $\tilde{\Gamma}_j^\mu$ は、さらに d 個の同一のブロックからなる細部ブロック対角構造を持つ。

Duffing 方程式 (2) の左辺を座標変換行列 H で変換し、式 (7) と (9) を用いると

$$\begin{aligned} H^T F &= \ddot{w} + (H^T \Gamma_1 H) \dot{w} + (H^T \Gamma_0 H) z - H^T \gamma \cos \omega t \\ &= \ddot{w} + \tilde{\Gamma}_1 \dot{w} + \tilde{\Gamma}_0 z - H^T \gamma \cos \omega t \end{aligned} \quad (11)$$

となるが、 $\tilde{\Gamma}_j$ がブロック対角形であるので、Duffing 方程式 (2) は

$$\ddot{w}^\mu + \tilde{\Gamma}_1^\mu \dot{w}^\mu + \tilde{\Gamma}_0^\mu z^\mu - (H^\mu)^T \gamma \cos \omega t = 0, \quad \forall \mu \in R(G) \quad (12)$$

と各既約表現に対応する形の独立した式に分解できる。

3. D_4 不変な非線形振動系への適用

本理論はあらゆる正 n 角形状の構造物に対して不変に適用できるが、ここでは、数値解析例として D_4 不変系の非線形減衰振動に適用する。群 D_n の定義と D_n 不変系のブロック対角化法に関する詳細は文献 7), 10) に譲ることとする。

群 D_4 の既約表現の集合は、文献 10) から

$$R(D_4) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1)\} \quad (13)$$

であり、 (d, j) は j 番目の d 次既約表現を表す。また、これらの既約表現に対応する座標変換行列は

$$H = [H^{(1,1)}, H^{(1,2)}, H^{(1,3)}, H^{(1,4)}, H^{(2,1)}] \quad (14)$$

という形になる。ここに、2 次既約表現のブロックはさらに

$$H^{(2,1)} = [H^{(2,1)+}, H^{(2,1)-}] \quad (15)$$

という 2 つのブロックに分かれることに注意を要する。 H の各ブロック行列の対称性は

$$\begin{aligned} \sum H^{(1,1)} &= D_4, & \sum H^{(1,2)} &= C_4, & \sum H^{(1,3)} &= D_2 \\ \sum H^{(1,4)} &= D_2^3, & \sum H^{(2,1)+} &= D_1, & \sum H^{(2,1)-} &= D_1^3 \end{aligned} \quad (16)$$

である。ここに、 $\sum(\cdot)$ は括弧の中の行列の列ベクトルの対称性を表す群を意味する。この座標変換に対応する座標系を

$$w = [(w^{(1,1)})^T, \cdots, (w^{(1,4)})^T, (w^{(2,1)+})^T, (w^{(2,1)-})^T]^T \quad (17)$$

と定義する。例えば、式 (2) の各行列 Γ_j は座標変換行列 (14) および (15) を用いて、変換式 (9) のように書き表わすと、

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_j &= H^T \Gamma_j H = \\ &\text{diag}[\tilde{\Gamma}_j^{(1,1)}, \tilde{\Gamma}_j^{(1,2)}, \tilde{\Gamma}_j^{(1,3)}, \tilde{\Gamma}_j^{(1,4)}, \tilde{\Gamma}_j^{(2,1)+}, \tilde{\Gamma}_j^{(2,1)-}] \end{aligned} \quad (18)$$

と 6 個にブロック対角化される。2 次既約表現 (2, 1) に対しては

$$\tilde{\Gamma}_j^{(2,1)+} = \tilde{\Gamma}_j^{(2,1)-}, \quad j = 0, 1 \quad (19)$$

という 2 個の同一のブロックがそれぞれ対応する。行列演算にあたり、どちらか一方のみを解析すればよいので計算量を低減できる。この他、外力ベクトルも任意時点

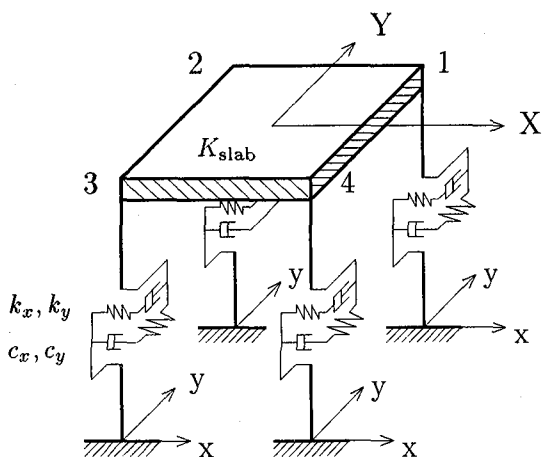


図-1 D_4 不変な構造モデル

において式(18)のようにブロック対角形になるので、同じ議論が成り立つ。

3.1 D_4 不変立体ラーメン構造

図-1に示す D_4 不変な立体ラーメン構造の行列 Γ_j を本手法によりブロック対角化する。この系は水平 (XY) 方向変位のための1節点2自由度の合計8自由度とし、柱はフレキシブルな構造で柱の曲げ剛性 k_x, k_y と減衰 c_x, c_y はいずれも一定とする。このモデルは群 D_4 の1次既約表現 $(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)$ と2次既約表現 $(2,1)+, (2,1)-$ の合計6個のブロック行列が存在する。

(1) 各種の行列の同時ブロック対角化

図-1の D_4 不変構造系に周期外力作用下の非線形減衰振動方程式(2)は

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\Gamma_0 & -\Gamma_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{O} \\ \gamma \cos \omega t \end{Bmatrix} \quad (20)$$

の形に表せる。この系の群同変条件式は、式(5)を参考にする

$$T(D_4)(\ddot{x} + \Gamma_1 \dot{x} + \Gamma_0 y - \gamma) = T(D_4)\ddot{x} + \Gamma_1 T(D_4)\dot{x} + \Gamma_0 T(D_4)y - T(D_4)\gamma \quad (21)$$

となり、 Γ_j についてブロック対角化が可能となる。変位および速度ベクトルは

$$\begin{aligned} y(t) &= (x_1^3, y_1^3, \dots, x_4^3, y_4^3)^T, \\ \dot{x}(t) &= (\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dots, \dot{x}_4, \dot{y}_4)^T \end{aligned} \quad (22)$$

のそれぞれの節点に対応しているものとする。連立常微分方程式(20)の初期値と、周期外力ベクトル $\gamma \cos \omega t$ が与えられると、この問題はRunge-Kutta法を用いて直接数値計算で解析できるが、さらに詳細な解析となると自由度や時間(刻み幅)の増加にともなって、膨大な反復計算が必要になる。我々は式(20)を、数値計算を行う前に

系の幾何学的な不変条件を満たす座標系に変換することができる。式(20)は式(7)を用いると

$$\begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix} = \tilde{\Gamma} \begin{Bmatrix} z \\ \dot{w} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{O} \\ H^T \gamma \cos \omega t \end{Bmatrix} \quad (23)$$

となり、このとき $\tilde{\Gamma}$ は

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\tilde{\Gamma}_0 & -\tilde{\Gamma}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ -\tilde{\Gamma}_0^{(1,1)} & & & & & -\tilde{\Gamma}_1^{(1,1)} \\ & & & & & \vdots \\ & & & & -\tilde{\Gamma}_0^{(2,1)} & -\tilde{\Gamma}_1^{(2,1)} \end{bmatrix} \quad (24)$$

の各既約表現に分解される。すなわち、 D_4 不変構造系の非線形方程式は

$$\begin{Bmatrix} \dot{w}^\mu \\ \ddot{w}^\mu \end{Bmatrix} = \tilde{\Gamma}^\mu \begin{Bmatrix} z^\mu \\ \dot{w}^\mu \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{O} \\ (H^\mu)^T \gamma \cos \omega t \end{Bmatrix}, \quad \mu = (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1)+, (2,1)- \quad (25)$$

の6個の既約表現に分解される。

ところで、この系の $\tilde{\Gamma}_j$ ($j=0,1$) は式(18)より

$$\tilde{\Gamma}_0 = H^T(M^{-1}K)H$$

$$= 4\alpha_1 \begin{bmatrix} 26 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 14 & & & \\ & & & 14 & & \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 27 \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 27 \\ & & & & & & & \mathbf{O} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 3 & & & & & \\ & 3 & & & & \\ & & 3 & & & \\ & & & 3 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 9 \\ & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 9 \\ & & & & & & & \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\tilde{\Gamma}_1 = H^T(M^{-1}C)H$$

$$= \alpha_3 \begin{bmatrix} 7 & & & & & \\ & 7 & & & & \\ & & 7 & & & \\ & & & 7 & & \\ & & & & 5 & 0 \\ & & & & 0 & 13 \\ & & & & & 5 & 0 \\ & & & & & 0 & 13 \\ & & & & & & & \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad (27)$$

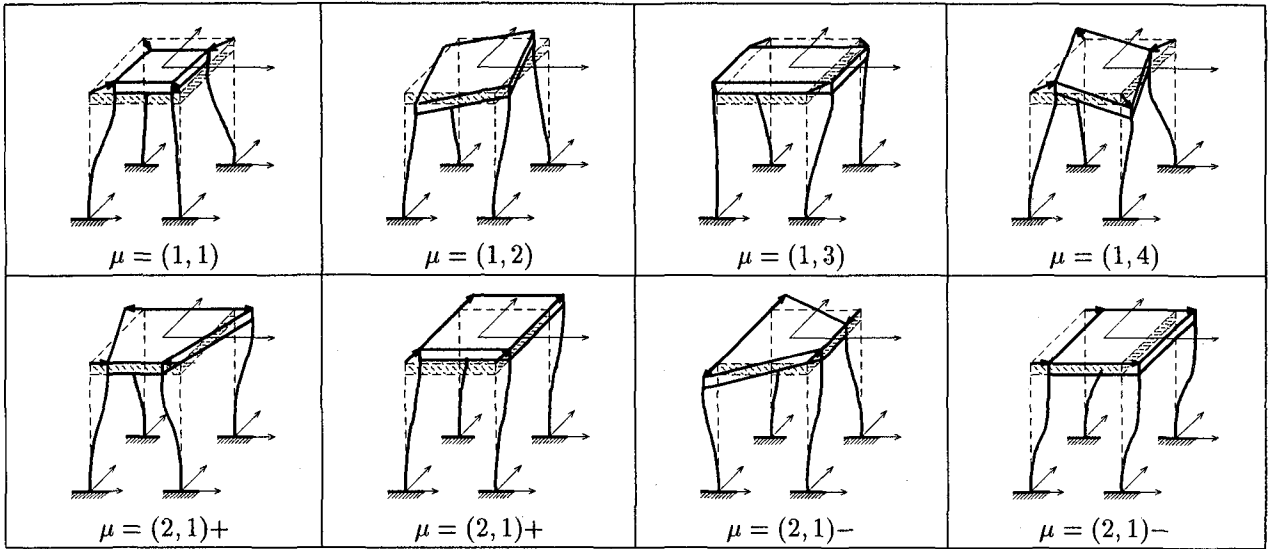


図-2 D_4 不変各既約表現空間と振動モード (XY 方向成分)

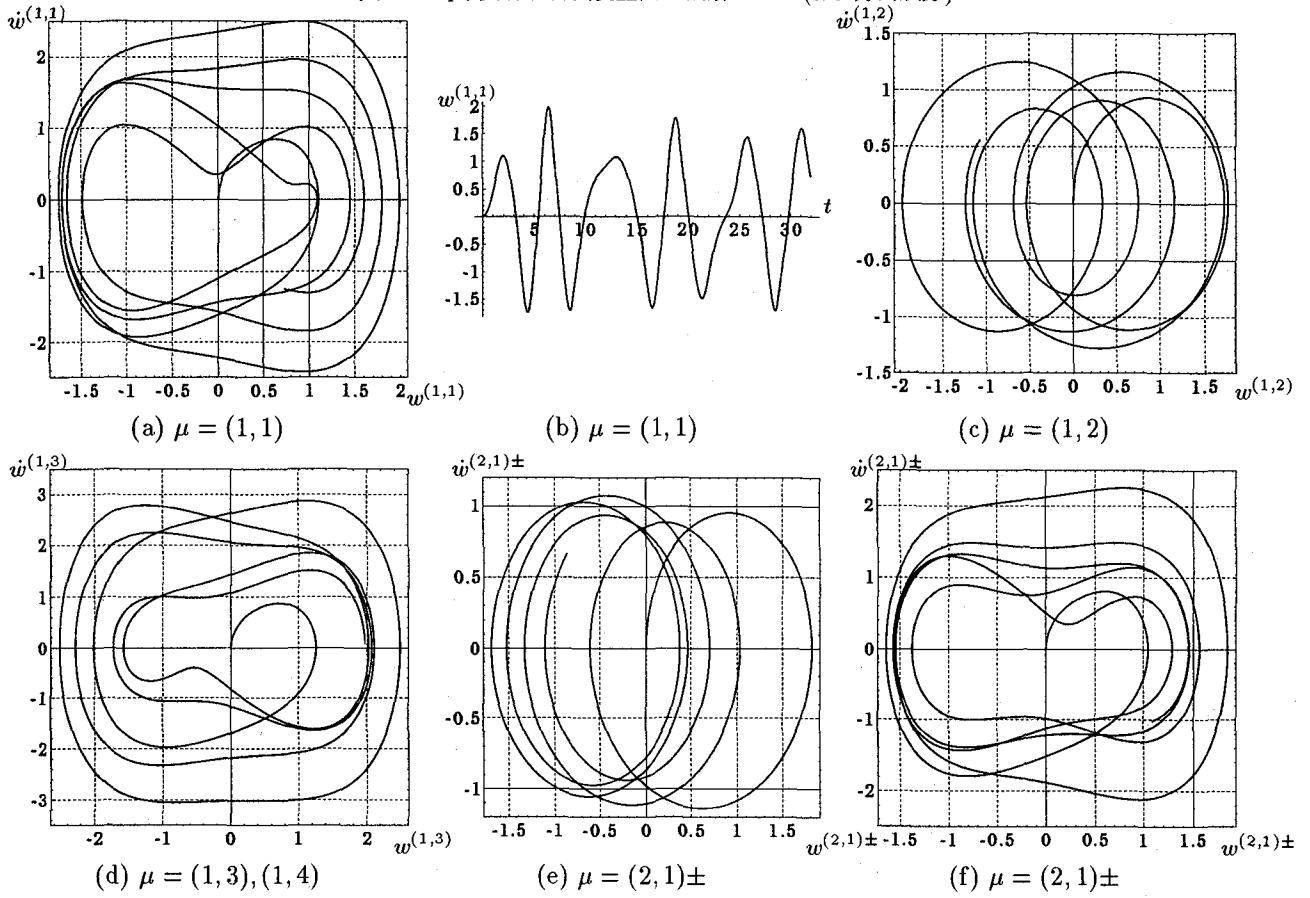


図-3 D_4 不変構造系の各既約表現に対する変位・速度の位相軌道

ここに,

$$\alpha_1 = \frac{15Et_{\text{slab}}}{91M_0}, \quad \alpha_2 = \frac{364Et_{\text{slab}}}{91M_0}p_0, \quad \alpha_3 = \frac{4C_0}{M_0},$$

$$p_0 = \frac{EI_{\text{col}}/\ell^3}{Et_{\text{slab}}}$$

とブロック対角形に変換される.

各既約表現空間に分解された $z^\mu(t)$ は式(8)より

$$z^\mu(t) = (\dots, z_k^3, \dots)^T = (\dots, w_k^3, \dots)^T \quad (28)$$

と与えられているので, 例えば, この系の $\mu = (1, 1)$ 空間において, 連立微分方程式(20)が

$$\ddot{w}(t) + 7\alpha_3\dot{w}(t) + (104\alpha_1 + 3\alpha_2)w^3(t) = (H^{(1,1)})^T \gamma \cos \omega t \quad (29)$$

の独立な空間上の常微分方程式となる. このとき, 座標変換行列 $H^{(1,1)}$ は,

$$(H^{(1,1)})^T = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (30)$$

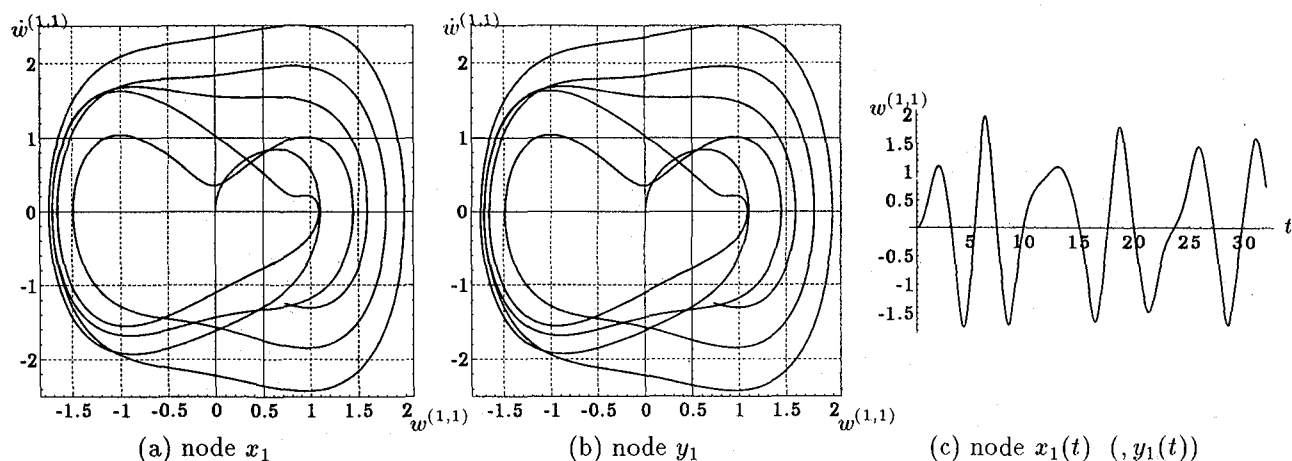


図-4 直接数値計算した節点1での変位・速度の位相軌道と波形

である。また、外力ベクトルを各既約表現毎に座標変換したものを

$$r^\mu = (H^\mu)^T \gamma \quad (31)$$

と定義すると、 $\mu = (1, 1)$ に対応する $r^{(1,1)}$ はスカラーとなる。さらに、 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.01$ としたとき、式(29)は

$$\ddot{w}(t) + 0.07\dot{w}(t) + 1.07w^3(t) = r^{(1,1)} \cos \omega t \quad (32)$$

となり、このとき連立されていた微分方程式が、対称性に起因する固有な座標系を適用することにより、独立な微分方程式に不変に分解される(文献10)を参照)。

いま微分方程式(20)の初期値を

$$x(0) = \mathbf{0}, \quad \dot{x}(0) = \mathbf{0} \quad (33)$$

とし、また、外力ベクトル γ を

$$\gamma = (1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, -1)^T \quad (34)$$

とする。このとき、各変数ベクトルを座標変換式(7),(31)に適用することより、

$$z(0) = H^T y(0) = \mathbf{0}, \quad \dot{w}(0) = H^T \dot{x}(0) = \mathbf{0} \quad (35)$$

および

$$r^{(1,1)} = 1 \quad (36)$$

となる。この外力パラメータに対して $r^{(1,1)}$ 以外の $r^\mu = 0$ となる。

(2) 本手法による位相軌道の算出

本計算では他の既約表現内の位相軌道の振舞いも比較するために、各既約表現の外力パラメータを $r^\mu = 1.0$ とし、さらに $\omega = 1.0$ とし、各既約表現に分解された常微分方程式(32)に適用する。図-3は Runge-Kutta 法を用いて、各既約表現毎に分解された式(25)を数値計算した結果を示す。図-3(a)は既約表現 $\mu = (1, 1)$ に対応する座標系上の変位・速度の解(位相)軌道を、図-3(b)はこのときの振動波形 $w(t)$ をそれぞれ示す。図-3(c)~(f)は各既約表現に対応する座標系での変位・速度の位相軌道図をそれぞれ示す。図-3(d)の既約表現空間は D_4 不変群の部分群であり、図-2の $\mu = (1, 3)$ と $(1, 4)$ の固有振動

モードが、諸量等の一致により偶発的に同一の振舞いを生じていることによるものである。このように、各既約表現に分解された非線形振動は、同じ初期値や同じパラメータの大きさであってもその系の幾何特性により、図-3のような固有の振舞いを生じさせることとなる。

これに対し、 $\mu = (1, 1)$ に対応する同一の外力ベクトル作用下で式(20)の連立微分方程式を直接 Runge-Kutta 法を用いて数値計算した結果の一部が図-4である。図-4(a)および(b)は節点1に対応する x, y 方向の変位・速度の位相軌道を、図-4(c)は時刻歴の振動波形 $x_1(t), y_1(t)$ をそれぞれ示す。これらの結果は図-3(a),(b)の各位相軌道と振動波形の双方は全く同一の解を得ている。このことは、大規模離散系からもたらされる微分方程式の不変な解を得る一つの方法として数値解析的に実証できたとと言える。

また、本プログラムは EWS4800/310 を用いたが、このとき、両者の解法による Runge-Kutta 法の計算時間は、本手法が平均 2.00sec/block であり、直接解法の平均が 24.56sec であった。このように、方程式を分解しておくことにより、数値反復計算において計算効率を格段に高めることができ、特に対称性が増すような大規模構造物になればその効果は非常に大きい。

(3) 既約表現 $(1, 1)$ のカオスアトラクタ

式(32)の非線形振動挙動(分岐やカオス)を探る1つの方法として、周期位相解が数値的に得られた。 $\mu = (1, 1)$ において $r^{(1,1)}$ をパラメータとして式(32)の定常解を数値計算²により求め、Poincaré の $2\pi i$ 断面を射影したストレンジアトラクタを図-5に示す。図-5(a)は横軸にパラメータ $r^{(1,1)}$ を縦軸に周期解 $w(2\pi i)$ をプロットしたものである。パラメータ $0 < r^{(1,1)} < 0.4$ までは負の解へ進むが、0.4を越えると一転いくつかの連なった正の解曲線が現れる。この空間の振動方程式は既に既約分解されているので、これらの解曲線群は系の対称群に起因するものではないことが理解できる。また、図-5(b)は横

² 本システムでは1周期あたりの解を最大20個まで求めている。

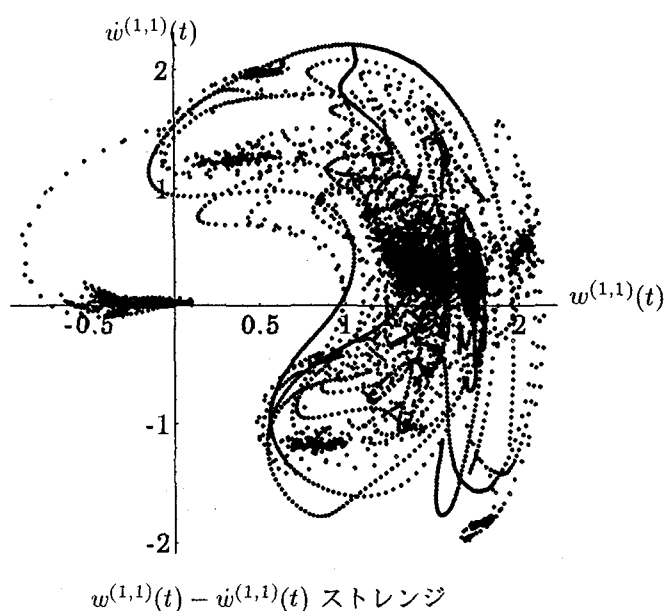
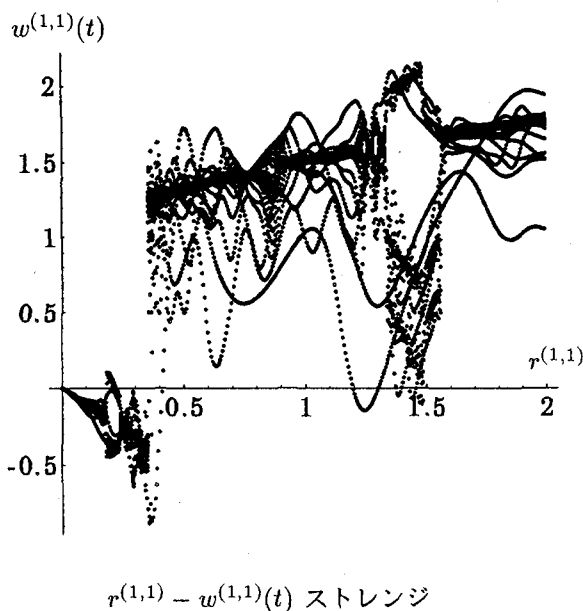


図-5 既約表現 $\mu = (1, 1)$ に対応するストレンジアトラクタ

軸に変位解 $w(2\pi i)$ を縦軸に速度解 $\dot{w}(2\pi i)$ を Poincaré の $2\pi i$ 断面でプロットしたものである。これらは一つの既約表現空間上の非線形振動解析結果であり、この問題を式 (20) を直接解くことは、非線形振動の挙動解明をさらに難しくする恐れがあり、個々の既約表現空間上の非線形挙動を詳しく調べることが、分岐やカオス挙動の解明に大きく貢献できると考えられる。

4. 結論

本研究では、ブロック対角化法を減衰系の対称構造物の非線形振動問題の連立微分方程式に適用し、数値解析上の有用性と妥当性を示した。構造物の幾何学的対称性は一般的な性質であり、幾何学的な対称性から構成される全ての質量、減衰および剛性行列は同時にブロック対角化でき、工学的に有益な解析方法であると言える。

付録 1 既約表現行列に対する座標変換行列

二面体群 D_n の既約表現の全体を

$$R(D_n) = \{\mu \equiv (d, j) \mid j = 1, \dots, m_d; d = 1, 2\}$$

と表すことにする (記号の詳細は Murota・Ikeda^{6),7)} を参照されたい)。 m_d は同値でない d 次既約表現の個数であり、

$$\begin{cases} m_1 = 4, & m_2 = n/2 - 1, & \text{when } n = \text{even} \\ m_1 = 2, & m_2 = (n-1)/2, & \text{when } n = \text{odd} \end{cases}$$

と与えられる。

運動方程式 (2) を各既約表現毎に分解する座標変換行列を

$$\begin{aligned} H &\equiv [\dots, H^\mu, \dots] \\ &= [H^{(1,1)}, \dots, H^{(1,m_1)}, \end{aligned}$$

$$H^{(2,1)+}, H^{(2,1)-}, \dots, H^{(2,m_2)+}, H^{(2,m_2)-}]$$

と定義する。ここに $H^{(1,j)}$ は 1 次既約表現 $(1, j)$ に対応する部分ブロック行列を、 $H^{(2,j)+}$ と $H^{(2,j)-}$ は 2 次既約表現 $(2, j)$ に対応する 2 個の部分ブロック行列をそれぞれ表す。

付録 2 D_4 不変ラーメン構造の各行列

Γ_0, Γ_1 の各行列は

$$\Gamma_0 = \alpha_1 \begin{bmatrix} 54 & 13 & -40 & -1 & 0 & -13 & -14 & 1 \\ & 54 & 1 & -14 & -13 & 0 & -1 & -40 \\ & & 54 & -13 & -14 & -1 & 0 & 13 \\ & & & 54 & 1 & -40 & 13 & 0 \\ & & & & 54 & 13 & -40 & -1 \\ & & & & & 54 & 1 & -14 \\ & & & & & & 54 & -13 \\ & & & & & & & 54 \end{bmatrix}$$

$$+ \alpha_2 \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ & 4 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ & & 4 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 4 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ & & & & 4 & 0 & -2 & 0 \\ & & & & & 4 & 0 & -2 \\ & & & & & & 4 & 0 \\ & & & & & & & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_1 = \alpha_3 \begin{bmatrix} 8 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ & 8 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ & & 8 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 8 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ & & & & 8 & 0 & -2 & 0 \\ & & & & & 8 & 0 & -2 \\ & & & & & & 8 & 0 \\ & & & & & & & 8 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \frac{15Et_{\text{slab}}}{91M_0}, \quad \alpha_2 = \frac{364p_0Et_{\text{slab}}}{91M_0}, \quad \alpha_3 = \frac{4C_0}{M_0},$$

$$p_0 = \frac{EI_{\text{col}}/\ell^3}{Et_{\text{slab}}}, \quad \Gamma_0 = M^{-1}K, \quad \Gamma_1 = M^{-1}C$$

$$K = K_{\text{slab}} + K_0K_{\text{col}}$$

$$C = C_0C_{\text{col}}$$

$$M = M_0M_{\text{slab}}$$

であり, ここに, $K_0 = 12EI/\ell^3$, $C_0 = \nu A\ell$, $M_0 = \rho V/36$ である. K_{slab} , K_{col} , C_{col} , M_{slab} はそれぞれ

$$K_{\text{col}} = C_{\text{col}} = \text{diag}[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

$$M_{\text{slab}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ & & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ & & & & 4 & 0 & 2 & 0 \\ & & & & & 4 & 0 & 2 \\ & \text{Sy.} & & & & & 4 & 0 \\ & & & & & & & 4 \end{bmatrix}$$

である.

参考文献

- 1) Dinkevich, S., The spectral method of calculation of symmetric structures of finite size, *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, 8(4), pp.185-194, 1984.
- 2) Fielder, B., Global bifurcation of periodic solutions with symmetry, *Springer-Verlag, Lecture note in mathematics*, 1988.
- 3) Healey, T.J., A group theoretic approach to computational bifurcation problems with symmetry, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 67, pp.257-295, 1988.
- 4) Dinkevich, S., Finite symmetric systems and their analysis, *International Journal of Solids and Structures*, 27(10), pp. 1215-1253, 1991.
- 5) Healey, T.J. and Treacy, J.A., Exact block diagonalization of large eigenvalue problems for structures with symmetry, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31, pp.265-285, 1991.
- 6) Murota, K. and Ikeda, K., Computational use of group theory in bifurcation analysis of symmetric structures, *SIAM Journal on Statistical and Scientific Computing*, 12(2), pp.273-297, 1991.
- 7) Ikeda, K. and Murota, K., Bifurcation analysis of symmetric structures using block-diagonalization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 86(2), pp.215-243, 1991.
- 8) Ikeda, K., Ario, I. and Torii, K., Block-diagonalization analysis of symmetric plates, *International Journal of Solids and Structures*, 29(22), pp.2779-2793, 1992.
- 9) Ario, I., Ikeda, K. and Murota, K., Block-diagonalization method for symmetric structures with rotational displacements, *Journal of Structural Mechanics and Earthquake Engineering, JSCE*, No.489/I-27, pp.27-36, 1994.
- 10) 有尾一郎・池田清宏・鳥居邦夫, 減衰を持つ対称構造物の動的問題に対するブロック対角化法, 土木学会論文集, No.513/I-31, pp.169-178, 1995.
- 11) Thompson, J.M.T. and Stewart, H.B., Nonlinear dynamics and chaos geometrical methods for engineers and scientists, *John Wiley & Sons Ltd.*, 1986.

(1995 年 9 月 18 日 受付)