

平面柔構造のための一動的数値解析

A NUMERICAL METHOD FOR DYNAMIC ANALYSIS OF PLANAR FLEXIBLE STRUCTURES

斉木 功 *・岩熊 哲夫 **・Sharma Mohan Prasad ***・井浦 雅司 ****

Isao SAIKI, Tetsuo IWAKUMA, Sharma Mohan Prasad and Masasi IURA

*東北大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉)

**Ph.D. 東北大学教授 工学部土木工学科

***修(工) 東北大学大学院 工学研究科土木工学専攻

****工博 東京電機大学教授 理工学部建設工学科 (〒350-03 埼玉県比企郡鳩山町)

A simple formulation by the total Lagrangian approach using conventional stiffness and mass matrices for planar Bernoulli-Euler beam under large motion and its numerical examples are presented.

A technique of separation of rigid body displacement based on the polar decomposition theorem is extended to dynamic problem. Since it results in non-symmetric mass and stiffness matrices, comparison is made with another approach based on the Hamilton principle. Numerical results show feasibility of the technique.

Key Words : total Lagrangian, FEM, finite displacement

1. はじめに

例えば浮体係留基礎のケーブルや、あるいは宇宙構造物のようにその剛性が非常に小さい構造系等の動的解析は、その系の安定解析のためにも重要な課題である。静的問題における updated Lagrangian アプローチや剛体回転除去の方法は、大回転を伴う微小ひずみ問題の解法として非常に有効であることは数多く示されており、動的問題においても同様の方法が用いられている。ひとつは要素の慣性系で記述する方法で、慣性項の記述に有利である。もう一つは浮遊系で記述する方法で、内力項を簡潔に表すことができる。

同じ剛体回転除去の手法を用いても、静的問題ですらいくつかの定式化がある。剛体回転を一有限要素のどの変位で代表させるかによって最終的な剛性行列の対称性が失われたりする。この差異は、細長比が十分大きければ小さいと予想され、剛性方程式と適合する微分方程式のオーダー比較がなされている¹⁾ものの、実際の大変位数値解の比較と考察が未だ不十分であるとも考えられる。

筆者らも仮想仕事の原理と剛体回転の除去を組み合わせた手法で静的な解析²⁾や動的な例³⁾を示してきた。静的解析ではエネルギー原理に基づいていないため、その接線剛性行列は非対称となるが、伸びの影響さうまく入れてやれば元の微分方程式を数値積分した解や座屈の解析解に一致する数値解を得ている。この論文では、動的問題に同じ手法を用いた場合に、その非対称な行列でも精度の上で問題が無いか否かを検討する。この手法

の主なメリットは、微小ひずみの仮定から通常の微小変位理論の剛性行列を用いることができることである。また、質量行列も部分的には微小変位のそれを使うことができ、運動方程式の物理的解釈が容易である、といった利点もある。

残念なことに、今のところの数値解が正しいのかを検討した報告がないので、最もよく引用される代表的な例と、解析的に解が得られている問題の結果との比較を行なう。ここでは total Lagrangian アプローチを用いて非線形運動方程式を導いており、さらにその増分形を求めるのは非常にやっかいであるため、Newmark の β 法などの手法が使えず、通常の数値積分法で解を追跡する。また対象は柔構造とするため、Bernoulli-Euler 梁の枠の中で論じる。

2. 運動方程式

2.1 剛性方程式

一般に剛体変位除去の手法に基づく剛性方程式の定式化は文献⁴⁾に詳しいので、ここではその結果のみを示す。

$$\begin{aligned} f_{\text{EXT}1} &= T(\lambda_1)k_1T^T(\lambda_1)(d_2 - d_1 - D(\lambda_1)) \\ f_{\text{EXT}2} &= T(\lambda_1)k_2T^T(\lambda_1)(d_2 - d_1 - D(\lambda_1)) \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 $f_{\text{EXT}1}$ 、 $f_{\text{EXT}2}$ は節点 1 および 2 の外力ベクトル、 d_1 、 d_2 は節点 1 および 2 の変位ベクトル、 D は要素の節点 1 周りの剛体回転による節点 2 の変位を表す

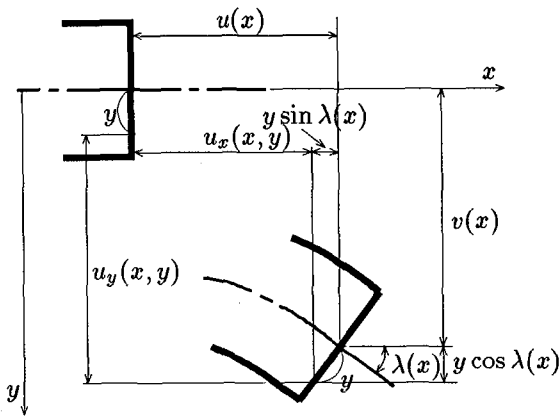


図-1 梁の運動場

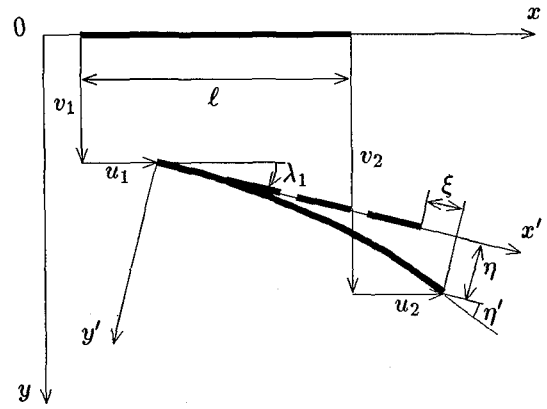


図-2 座標系と変位の関係

ベクトルであり、次の通りである。

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{EXT},i} &\equiv [F_{xi}\ell^2/EI \quad F_{yi}\ell^2/EI \quad C_i\ell/EI]^T \\ \mathbf{d}_i &\equiv [u_i/\ell \quad v_i/\ell \quad \lambda_i]^T \quad (i=1,2) \\ \mathbf{D} &\equiv [\cos \lambda_1 - 1 \quad \sin \lambda_1 \quad 0]^T \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 u_i, v_i, λ_i は全体座標系における節点 i の変位の x, y 成分および回転角であり、 F_{xi}, F_{yi}, C_i は全体座標系における節点 i の外力の x, y 成分および z 軸回りのモーメントであり、 I は断面 2 次モーメント、 ℓ は要素の長さである。また、 $\mathbf{T}$ は全体座標系と 図-2 に示したような局所座標系との座標変換行列であり、次の式で定義される。

$$\mathbf{T}(\lambda_1) \equiv \begin{bmatrix} \cos \lambda_1 & -\sin \lambda_1 & 0 \\ \sin \lambda_1 & \cos \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ は線形理論における剛性行列の一部で、

$$\mathbf{k}_1 \equiv \begin{bmatrix} -\frac{1}{\beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6 \\ 0 & -6 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{k}_2 \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6 \\ 0 & -6 & 4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

である。ここに、 β は細長比の逆数で、断面積を A とすると $\beta \equiv \frac{\sqrt{I/A}}{\ell}$ となる。

2.2 慣性項

梁の任意の点の全体座標系における変位成分を、

$$\mathbf{u}_{xy}(x, y, t) \equiv [u_x(x, y, t) \quad u_y(x, y, t)]^T \quad (5)$$

とすると慣性力による仮想仕事は、それを用いて、

$$\int_V \rho \delta \mathbf{u}_{xy}^T \ddot{\mathbf{u}}_{xy} dV = \int_V \rho \{ \ddot{u}_x \delta u_x + \ddot{u}_y \delta u_y \} dV \quad (6)$$

のように簡潔に記述できる。なお上付ドットは時間に関する微分である。図-1 にあるように全体座標系で梁理論の変位場を考えると、任意の点の変位は中立軸の変位 $u(x, t), v(x, t)$ および回転角 $\lambda(x, t)$ を用いて次のよう

に表すことができる。

$$\begin{Bmatrix} u_x(x, y, t) \\ u_y(x, y, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(x, t) \\ v(x, t) \end{Bmatrix} - y \begin{Bmatrix} \sin \lambda(x, t) \\ \cos \lambda(x, t) - 1 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

次に図-2 に示したような λ_1 だけ回転した局所座標系での仮想変位成分を次式で定義すると、

$$\delta \xi_{xy}(x, y, t) \equiv [\delta \xi_x(x, y, t) \quad \delta \xi_y(x, y, t)]^T \quad (8)$$

全体座標系での仮想変位成分 $\delta \mathbf{u}_{xy}(x, y, t)$ との間には次に示す関係がある。

$$\begin{Bmatrix} \delta u_x \\ \delta u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda_1 & -\sin \lambda_1 \\ \sin \lambda_1 & \cos \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \xi_x \\ \delta \xi_y \end{Bmatrix} \quad (9)$$

ここで、前節と同様に局所座標系での梁理論の変位場を考えると、任意の点の仮想変位 $\delta \xi_x(x, y, t), \delta \xi_y(x, y, t)$ は中立軸の仮想変位 $\delta \xi(x, t), \delta \eta(x, t), \delta \eta'(x, t)$ を用いて表すことができるが、2.1 節でも述べたように局所座標系での変位成分には微小変位理論の適用を前提としているので、

$$\begin{Bmatrix} \delta \xi_x(x, y, t) \\ \delta \xi_y(x, y, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta \xi(x, t) \\ \delta \eta(x, t) \end{Bmatrix} - y \begin{Bmatrix} \delta \eta'(x, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

と書ける。ここに、プライムは x に関する微分を表す。

式 (6) に式 (7) (9) (10) を代入し、 x 軸を梁の中立軸にとると、慣性項の仮想仕事は、

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \left[\rho A \{ (\ddot{u} \cos \lambda_1 + \ddot{v} \sin \lambda_1) \delta \xi \right. \\ \left. + (-\ddot{u} \sin \lambda_1 + \ddot{v} \cos \lambda_1) \delta \eta \} + \rho I \ddot{\lambda} \delta \eta' \right] dx \end{aligned} \quad (11)$$

と表わされる。

さらに図-2 より得られる幾何的な関係を用いれば、中立軸の全体座標系での成分 u, v, λ と、局所座標系で

の実質変形成分 ξ, η, η' との関係が,

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \lambda_1 \end{Bmatrix} + x \begin{Bmatrix} \cos \lambda_1 - 1 \\ \sin \lambda_1 \\ 0 \end{Bmatrix} + T(\lambda_1) \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \eta' \end{Bmatrix} \quad (12)$$

となるので、これを次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} & \rho A \int_0^\ell \left[(\delta \xi \ddot{\xi} + \delta \eta \ddot{\eta}) - \frac{(\dot{\lambda}_1)^2 (\delta \xi \xi + \delta \eta \eta)}{2} \right. \\ & \quad + 2\dot{\lambda}_1 (-\delta \xi \dot{\eta} + \delta \eta \dot{\xi}) + \ddot{\lambda}_1 (-\delta \xi \eta + \delta \eta \xi) \\ & \quad + \delta \xi (\ddot{u}_1 \cos \lambda_1 + \ddot{v}_1 \sin \lambda_1) - \delta \xi x (\dot{\lambda}_1)^2 \\ & \quad \left. + \delta \eta (-\ddot{u}_1 \sin \lambda_1 + \ddot{v}_1 \cos \lambda_1) + \delta \eta x \ddot{\lambda}_1 \right] dx \\ & + \rho I \int_0^\ell \delta \eta' (\ddot{\lambda}_1 + \ddot{\eta}') dx \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、 ξ, η を両節点の局所座標系での実質変形成分 ξ_i, η_i, η'_i で表わされる通常の 1 次及び 3 次の Hermite 多項式 (付録 I) で近似すると、最終的に式 (6) は離散化され、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \delta \xi^T \left[\rho A \ell^2 [m_0] \left\{ \ddot{\xi} - (\dot{\lambda}_1)^2 \xi \right\} \right. \\ & \quad + \rho A \ell^2 [m_1] \left\{ 2(\dot{\lambda}_1) \dot{\xi} + \ddot{\lambda}_1 \xi \right\} \\ & \quad + \rho A \ell^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\ell} \ddot{u}_1 - \frac{3}{20} \ddot{\lambda}_1 \sin \lambda_1 - \frac{1}{6} (\dot{\lambda}_1)^2 \cos \lambda_1 \\ \frac{1}{2\ell} \ddot{v}_1 + \frac{3}{20} \ddot{\lambda}_1 \cos \lambda_1 - \frac{1}{6} (\dot{\lambda}_1)^2 \sin \lambda_1 \\ \frac{1}{12\ell} (-\ddot{u}_1 \sin \lambda_1 + \ddot{v}_1 \cos \lambda_1) + \frac{1}{30} (\ddot{\lambda}_1) \\ \frac{1}{2\ell} \ddot{u}_1 - \frac{7}{20} (\ddot{\lambda}_1) \sin \lambda_1 - \frac{1}{3} (\dot{\lambda}_1)^2 \cos \lambda_1 \\ \frac{1}{2\ell} \ddot{v}_1 + \frac{7}{20} (\ddot{\lambda}_1) \cos \lambda_1 - \frac{1}{3} (\dot{\lambda}_1)^2 \sin \lambda_1 \\ - \frac{1}{12\ell} (-\ddot{u}_1 \sin \lambda_1 + \ddot{v}_1 \cos \lambda_1) - \frac{1}{20} (\ddot{\lambda}_1) \end{array} \right\} \\ & \quad \left. + \rho I [m_2] \ddot{\xi} + \rho I \ddot{\lambda}_1 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \right] \quad (14) \end{aligned}$$

ここに、 $(i = 1, 2)$ で、

$$\begin{aligned} \xi_i & \equiv [\xi_i/\ell \quad \eta_i/\ell \quad \eta'_i]^T \\ \xi & \equiv [\xi_1^T \quad \xi_2^T]^T \end{aligned} \quad (15)$$

である。また、 m_0, m_1, m_2 は質量行列であり、詳細は付録 II に示した。特に m_0 は線形理論での質量行列に等しい。式 (14) において、第 1 項の 1 番目は実質変形の慣性力、第 2 項の 1 番目はコリオリ力、第 3 項は剛体移動の慣性力、軸線の回転慣性および遠心力、第 4 項および第 5 項は断面の回転慣性を表している。

式 (1) は $\delta d_1, \delta d_2$ と仕事をする内力・外力のつり合い式であるので、さらにここでも座標変換行列を用い、

$$\delta \xi_i = T \delta d_i \quad (16)$$

を式 (14) に代入すると、最終的に式 (6) は、

$$\int_V \rho \delta u_{xy}^T \ddot{u}_{xy} dV = \frac{EI}{\ell^2} [\delta d_1^T \delta d_2^T] f_{IN} \quad (17)$$

と書ける。ここに f_{IN} は式 (14) のかぎ括弧の項に左から T^T を乗じ、さらに無次元化のために ℓ^2/EI を乗じたベクトルで、簡単のために置き変えた記号である。

2.3 運動方程式

前節の内力と外力のつり合いを表す式 (1) と慣性力を表す式 (17) を加えれば要素運動方程式が得られ、形式的には、

$$f_{IN}(\ddot{d}, \dot{d}, d) + f_{EL}(d) - f_{EXT} = 0 \quad (18)$$

となる。ここに、 $f_{EXT}^T = [f_{EXT_1}^T \quad f_{EXT_2}^T]$ は外力項であり、 f_{EL} は式 (1) の右辺を順にベクトルにした内力項である。ただし、

$$d = [d_1^T \quad d_2^T]^T \quad (19)$$

とした。あとの計算の便宜のために上式の f_{IN} の中の、節点変位の 2 階微係数に関する部分とそうでない部分に分けて、

$$M(d) \ddot{d} + f'_{IN}(\dot{d}, d) + f_{EL}(d) - f_{EXT} = 0 \quad (20)$$

と表すこともできる。

2.4 数値解析法

運動方程式 (20) は 2 階の微分方程式であるので、次のように節点速度を新たな自由度として加えることによって、運動方程式を倍の元数の 1 階連立常微分方程式に変換し、最適さざみ評価つきの Runge-Kutta-Merson 法によって積分することとした。すなわち、

$$v \equiv \dot{d} \quad (21)$$

と定義することにより、式 (20) は

$$\dot{v} = M^{-1}(d) \{ f'_{IN}(v, d) + f_{EL}(d) + f_{EXT} \} \quad (22)$$

と書けるため、式 (21) と (22) を連立させて直接積分し、時々刻々と変形を追跡する。

3. 解析例

3.1 柔な梁

まず本理論に基づき定式化された運動方程式の妥当性を検討するために、既存の数値解との比較をする。ここでは主に、Hamilton の原理に基づく定式化をしている Simo らの解析結果および井浦ら³⁾ の結果と比較した。Simo らは Timoshenko 梁を対象としているが、ここでの解析対象は細長比の大きい柔な棒部材であり、せん断の影響はほとんどないと考え、比較した。なお Simo らは慣性座標系を用いた定式化、井浦らは本論文と同様の移動座標系を用いた定式化を行なっている。

解析対象の詳細は図-3 に示した。なお $EA, EI, I_p, A\rho$ は本来、独立な量ではないが、Simo らの解と比較するために、あえて $EA/EI \neq I_p/A\rho$ となるような値を採用した。また、これらの単位は Simo らの論文には記述が無いので、本論文でも単位の記述はしないが、すべての値が SI 単位系であると考えても差支えない。この梁の時系列変化を図-4 に示した。この図で、破線は Simo らの解析結果 (10 要素) であり、一点鎖線は井浦らの解析結果 (20 要素) である。いずれもほぼ同様の解を

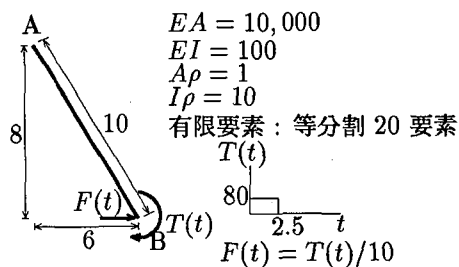


図-3 自由飛行をする柔な梁：解析対象の詳細

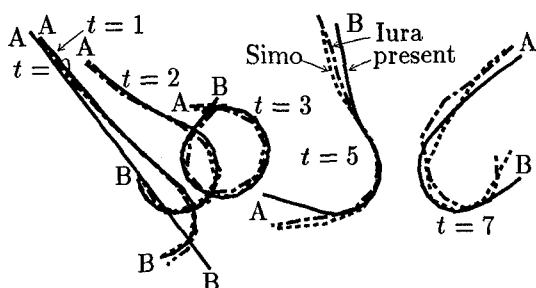


図-4 自由飛行をする柔な梁：時系列変化

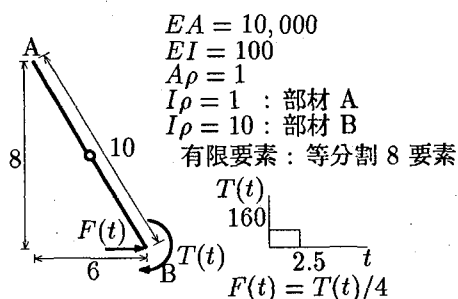


図-5 自由飛行をする二体構造：解析対象の詳細

導いているが、要素の一端の変位で要素の剛体変位を表すという共通点を持つ井浦らの解析結果³⁾とより良い一致がみられる。

3.2 二体構造

中央にヒンジを含む二体構造を解析した。ただし、図-5 に示したようにヒンジの両側で断面の慣性モーメントが異なる。このときの飛行の様子を 0.25 の時間間隔で図-6 に示した。この図において、破線は Simo らの解である。この例においても良い一致がみられるが、 t が大きくなると若干の差異が生じてくる。図が複雑になるので略したが、この場合も井浦らの結果に本結果は近くなっている。

3.3 ケーブル

ケーブルは浮体係留基礎などの応用としても重要な構造系だが、サグ比と張力の比が大きくなると、梁でいうところの 1 次、例えば単純支持の場合は正弦半波の振

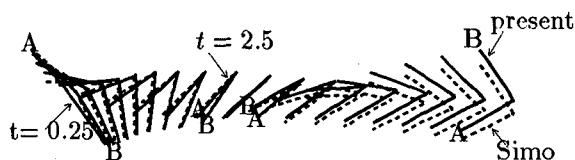


図-6 自由飛行をする二体構造：時系列変化

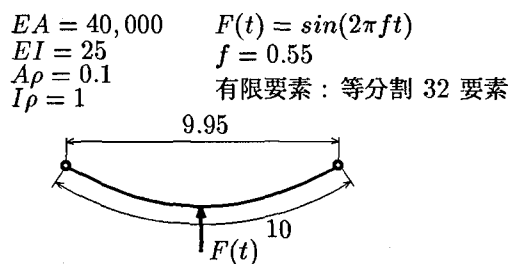


図-7 ケーブル：解析対象の詳細

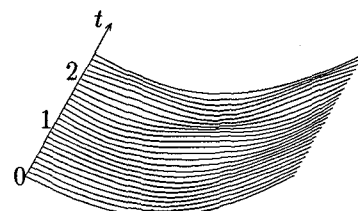


図-8 ケーブル：対称振動

動モードがなくなり、梁の 2 次モードである非対称の振動モードが 1 次モードになることも分かっている⁶⁾。ここではケーブルを細長比が 400 となる非常に柔な梁としてモデル化し解析を行った。また、ここでも $EA/EI \neq I\rho/A\rho$ となるような値を用いているが、これは、同じ断面の梁と比較して曲げ剛性は小さいが、断面の回転慣性は同じであるという物理的解釈による。

(1) 鉛直集中荷重を受けるケーブル

図-7 にあるような梁でモデル化し周期外力を 1 点に受けるケーブルを解析した。なお、自重は鉛直下向きの等価節点外力として加えており、この等価節点外力との釣り合い位置を初期形状とした。振動初期の段階を図-8 に示した。荷重条件が対称なので、初期段階では対称の振動モードを呈している。しかし図-9 の $t = 12$ 以降の振動では、対称な荷重条件にもかかわらず、より安定な低次の非対称振動モードへと移行しているのが分かる。なお、両図とも右上方向に時間軸をとっている。

(2) 水平集中荷重を受けるケーブル

前節と同じケーブルに水平荷重を載荷したときの振動を解析した。ただし図-10 にあるように右端をローラー支持し、そこに荷重を載荷した。

ケーブルの幾何学的非線形性から、荷重載荷点の静的な変位と荷重の関係はもちろん非線形となるが、慣性力の影響により静的な釣り合いには存在しない変形モー

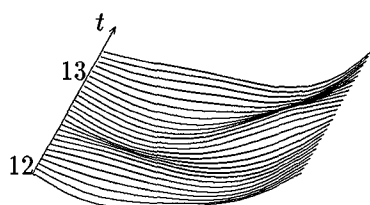


図-9 ケーブル：非対称振動

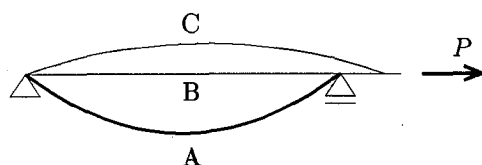


図-10 ケーブル：振動中の変形モード

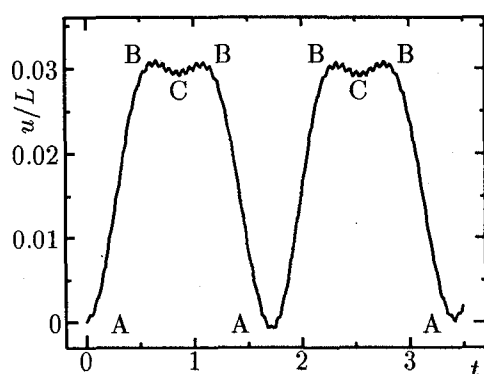


図-11 ケーブル：水平変位

ド、すなわち逆向きにたわんだモード(図-10におけるCの変形モード)が生じる。以上のような理由で、ケーブルの有限振幅振動は複雑な振動特性を示す。

図-11にはケーブルの全長で無次元化した荷重載荷点の水平変位を示した。図中のアルファベットは図-10における変形モードを表す。ケーブルの形状が直線に近いときは(図中B-C-B)高周波で小さい振幅の振動がみられる。このケーブルの伸び振動の固有周期は 6.32×10^{-2} であり、図から読み取ったこの振動の周期は 6.0×10^{-2} であることから、この振動はケーブルの伸び振動であるといえる。

(3) ヒンジで結合された2本のケーブル

次に浮体係留基礎構造のケーブルの簡単なモデルとして、図-12にあるような系を解析した。前節と同じく、自重を鉛直下向きに等価節点外力として加えてある。ここでも、初期形状は等価節点外力との釣り合い形状で、その状態からヒンジで結合された点に水平方向の周期外力が載荷される。

このような系は、荷重に対して引っ張り側のケーブルのみで抵抗し、前節で述べたような複雑な振動特性が現れる。

解析結果を図-13に、時間軸を前節と同様右上方

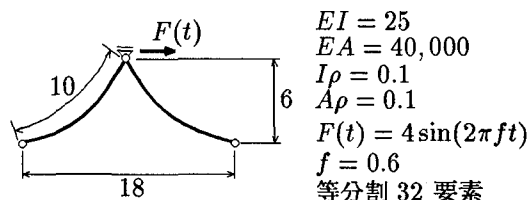


図-12 ヒンジで結合されたケーブル：解析対象の詳細

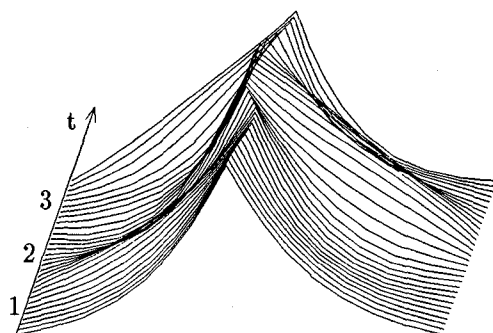


図-13 ヒンジで結合されたケーブル：時系列変化

向にとって示した。この図から引っ張り側のケーブルの形状が直線に近くなって荷重に抵抗している様子が分かる。

3.4 非保存力による動的座屈

ロケットエンジン等の推力が作用する知的宇宙構造系の安定問題を、接線方向に従動力が作用する片持ち梁として解析した。図-14にあるような、細長比100の梁を解析対象とした。ただし、座屈を助長するための攪乱として $t = 0.2$ まで自由端に鉛直下向きに1の力を加えた。この梁の接線方向に従動力に対する座屈荷重は19.8であり⁷⁾、水平方向の保存力の場合、いわゆる Euler 座屈であり、座屈荷重は2.47である。荷重 $P = 22$ のときの t が6から14までの挙動を図-15に示した。また、座屈荷重付近の2種の荷重に対する自由端の鉛直変位の時間変化を図-16に示した。 P が座屈荷重より小さいときは安定であるが、 P が大きくなると振幅が急激に増加し、フラッター現象が起る。ただし、有限変位を考慮し、かつ非減衰の場合、自由端の鉛直変位はおおむね $ae^{i\omega_1 t} e^{i\omega_2 t}$ のように振動することが分かっており⁸⁾、本解析結果と整合する。

水平方向の保存力と非保存力である従動力による座屈特性の差を示すために、荷重-最大振幅曲線を示す。ただし、ここでは理論的に最大振幅を求めることはできないので、数値解で得られた最大の振幅を求める。具体的には $0 < t < 30$ での自由端の最大の鉛直変位の値を最大振幅とする。図-17に通常の水平力を conservative force (保存力) として、従動力を non-conservative force (非保存力) として、両者の荷重-最大振幅曲線を

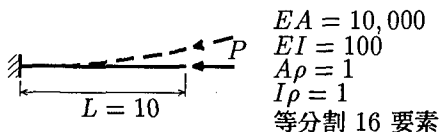


図-14 非保存力による動的座屈：解析対象の詳細

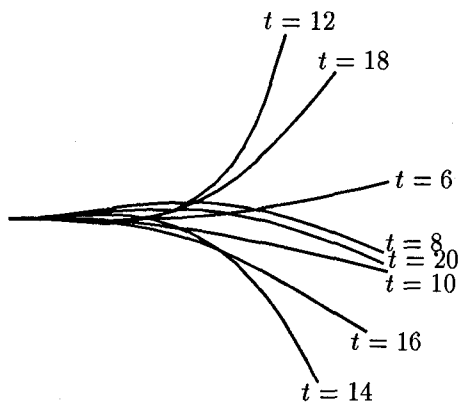


図-15 非保存力による動的座屈：時系列変化 ($P = 22$)

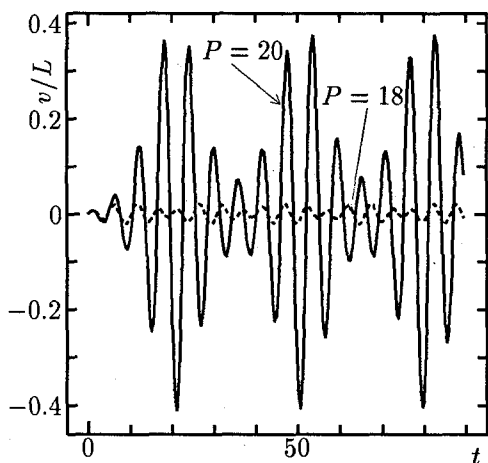


図-16 非保存力による動的座屈：自由端の鉛直変位

示した。この図で、縦軸は上で定義した数値的な最大振幅を梁の全長で無次元化した値であり、枠外の P_{cr} はそれぞれの荷重に対する座屈荷重を表す。いずれも、座屈荷重付近で急激に振幅が増大している。

4. 考察

文献¹⁾にもあるように、ここの仮想仕事式に要素左端の回転成分で要素剛体回転を代表させるやり方は、非対称の剛性及び質量行列を誘導する。剛性行列については文献²⁾で、誤差は伸びひずみのオーダーであり、さらに伸びの影響を正しく考慮すれば正解に収束することを示している。ここでは慣性項について Hamilton の原理から得られる方程式との差について論じてみる。

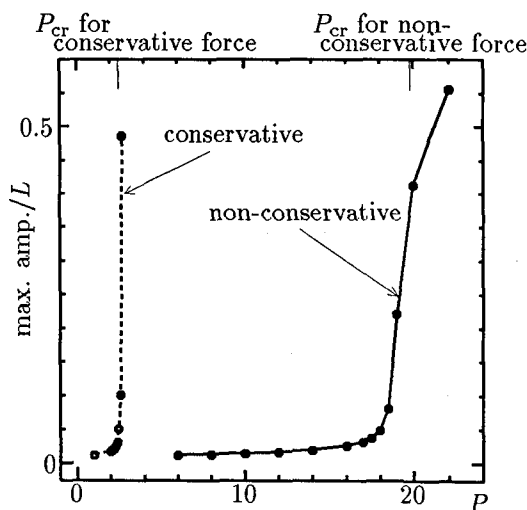


図-17 非保存力による動的座屈：荷重 - 振幅曲線

Hamilton の原理から得られる慣性項は、次式で表わされる運動エネルギーから導かれる。

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{u}_{xy})^2 dV \\
 &= \frac{1}{2} A \rho \left[\ell \{ (\dot{u}_1)^2 + (\dot{v}_1)^2 \} \right. \\
 &\quad + 2R_1 (\dot{u}_1 \cos \lambda_1 + \dot{v}_1 \sin \lambda_1) \dot{\xi}_2 \\
 &\quad + 2(-\dot{u}_1 \sin \lambda_1 + \dot{v}_1 \cos \lambda_1) (R_4 \dot{\eta}_2 + R_5 \dot{\eta}_2') \\
 &\quad + 2\dot{\lambda}_1 (-\dot{u}_1 \sin \lambda_1 + \dot{v}_1 \cos \lambda_1) (\ell^2/2 + R_1 \xi_2) \\
 &\quad - 2\dot{\lambda}_1 (\dot{u}_1 \cos \lambda_1 + \dot{v}_1 \sin \lambda_1) (R_4 \eta_2 + R_5 \eta_2') \\
 &\quad + R_6 (\dot{\xi}_2)^2 + R_9 (\dot{\eta}_2)^2 + R_{10} (\dot{\eta}_2')^2 \\
 &\quad + 2R_{11} \dot{\eta}_2 \dot{\eta}_2' + 2\dot{\lambda}_1 R_{12} (\xi_2 \dot{\eta}_2 - \dot{\xi}_2 \eta_2) \\
 &\quad + 2\dot{\lambda}_1 R_{13} (\xi_2 \dot{\eta}_2' - \dot{\xi}_2 \eta_2') \\
 &\quad + 2\dot{\lambda}_1 (R_{15} \dot{\eta}_2 + R_{16} \dot{\eta}_2') \\
 &\quad + (\dot{\lambda}_1)^2 (\ell^3/3 + 2\ell^2 \xi_2/3 + R_6 \xi_2^2 \\
 &\quad \quad + R_9 \eta_2^2 + R_{10} \eta_2'^2 + 2R_{11} \eta_2 \eta_2') \left. \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} I \rho \left[\ell (\dot{\lambda}_1)^2 + R_7 (\dot{\eta}_2)^2 + R_8 (\dot{\eta}_2')^2 \right. \\
 &\quad \quad \left. + 2R_2 \dot{\lambda}_1 \dot{\eta}_2 + 2R_3 \dot{\lambda}_1 \dot{\eta}_2' + 2R_{14} \dot{\eta}_2 \dot{\eta}_2' \right] \quad (23)
 \end{aligned}$$

ここに、 R は定積分であり、詳細は付録 III に示した。これから各独立変数について Euler 方程式を導くのであるが、 λ_1 に関して、例えば、

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial \lambda_1} = \eta_2, \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial \lambda_1} = -\xi_2 - \ell \quad (24)$$

といった関係などから、実質変形成分であるところの ξ_2, η_2 の 2 次の項が出てくる。ところが仮想仕事式から得られる運動方程式中には実質変形の 2 次の項は存在しない。また、ここでの運動方程式中で、式 (13) の第 2 項および第 4 項 (下線を付した項) に由来する項の係数は Hamilton の原理による運動方程式と異なる。これから、以上の 2 点について考察する。

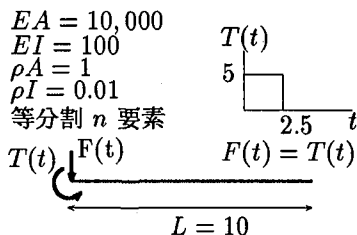


図-18 解析対象の詳細

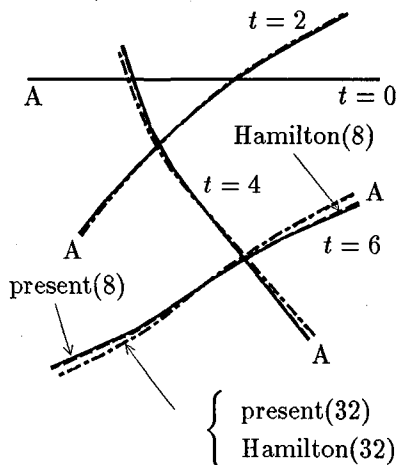


図-19 要素数・方程式の違いによる梁の形状

まず実質変形の 2 次の項に関しては、要素を小さく取れば実質変形はいくらでも小さくできるので、要素数がある程度増加すれば 1 次の項に比べて 2 次の項は無視できるほど小さくなるため、数値解析の計算時間等についてのデメリットはあるが、計算機の超高速化が実現している現在、本質的な問題点とはならない。

次に、第 2 項および第 4 項について考察を述べる。これらの項はそれぞれ要素の変形分に対する遠心力および回転慣性の仮想仕事を意味する。ここでいう変形分に対する遠心力とは（要素の伸び or たわみ量）×（回転速度）であり、変形分に対する回転慣性とは、（要素の伸び or たわみ量）×（回転加速度）を意味し、断面の回転慣性ではない。先程と同じ様に、要素を小さくとれば ξ, η, η' はいくらでも小さくできるので、例えば要素全体に対する遠心力や回転慣性を表す第 2 項は第 6 項に比較すると無視できるほど小さくできる。

以上の考察から、ここで導いた運動方程式は Hamilton の原理から導かれる運動方程式と 1 次のオーダーでは完全に一致する。

そこで、具体的に 図-18 に示したような細長比 100 の梁を様々な要素数で解析し、解の収束性と両方程式の差異について数値的に考察する。

図-19 は、要素数 8 と 32 の本解析結果（図中“present”で示した。）と Hamilton の原理から得られる運動方程式による解析結果（Hamilton）である。また、図-20 は梁の全長で無次元化した節点 A の鉛直変位

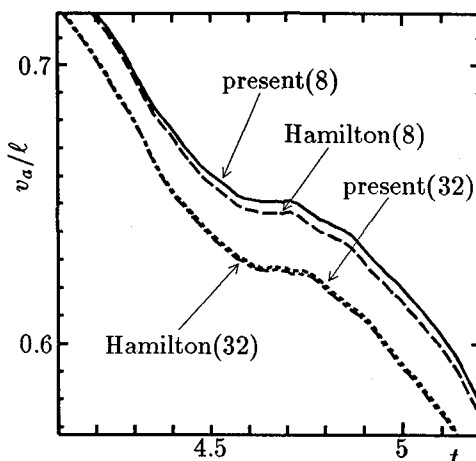


図-20 要素数・方程式の違いによる節点 A の鉛直変位履歴

位である。これらの図から、梁の形状や節点 A の変位に関して、要素数の増加に伴い両方程式から得られる解の差は小さくなる。さらに、Hamilton の原理から得られる 8 要素の解は、本解析法による 32 要素の解に近いので、Hamilton の原理から導かれる運動方程式が高次項を有していることにより、同じ要素数なら厳密解には本解析結果より近いことが予想される。

5. 結論

仮想仕事の原理と剛体回転除去の手法を動的問題にも適用して梁の離散運動方程式を誘導した。得られる式の接線剛性・質量行列は、もし計算したとしても非対称になる。Hamilton の原理から導かれる式および数値解析結果との比較でその差の考察をし、ここで求めた離散運動方程式は倍程度の要素数を用いれば高精度が得られることを示した。数値例として、ケーブルを曲げ剛性の小さい梁として近似した場合の不安定挙動、非保存力を受ける片持ち梁のフラッター現象を取り扱い、それぞれモード解析から予想される、ケーブルの振動モードの遷移現象、片持ち梁の後フラッター挙動をシミュレートした。

付録 I 変位関数

$$\begin{aligned}
 \xi(x) &= \xi_1 \phi_1(x) + \xi_2 \phi_2(x) \\
 \eta(x) &= \eta_1 \psi_1(x) + \eta'_1 \psi_2(x) + \eta_2 \psi_3(x) + \eta'_2 \psi_4(x)
 \end{aligned} \quad (I.1)$$

$$\begin{aligned}
 \phi_1(x) &\equiv 1 - \frac{x}{l}, & \phi_2(x) &\equiv \frac{x}{l} \\
 \psi_1(x) &\equiv 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}, & \psi_2(x) &\equiv x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \\
 \psi_3(x) &\equiv \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}, & \psi_4(x) &\equiv \frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l}
 \end{aligned} \quad (I.2)$$

$$[m_0] \equiv \begin{bmatrix} m_0^{(1)} & m_0^{(2)} \\ m_0^{(2)T} & m_0^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ & \frac{13}{35} & \frac{11}{210} & 0 & \frac{9}{70} & -\frac{13}{420} \\ & & \frac{1}{105} & 0 & \frac{13}{420} & -\frac{1}{140} \\ & & & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{13}{35} & -\frac{11}{210} \\ & & & & & \frac{1}{105} \end{bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

Sym.

$$[m_1] \equiv \begin{bmatrix} m_1^{(1)} & m_1^{(2)} \\ m_1^{(2)T} & m_1^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{7}{20} & -\frac{1}{20} & 0 & -\frac{3}{20} & \frac{1}{30} \\ \frac{7}{20} & 0 & 0 & \frac{3\ell}{20} & 0 & 0 \\ \frac{1}{20} & 0 & 0 & \frac{1}{30} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{20} & -\frac{1}{30} & 0 & -\frac{7}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{3\ell}{20} & 0 & 0 & \frac{7}{20} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & 0 & -\frac{1}{20} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.2})$$

$$[m_2] \equiv \begin{bmatrix} m_2^{(1)} & m_2^{(2)} \\ m_2^{(2)T} & m_2^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} \\ & & \frac{2}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} \\ & & & & & \frac{2}{15} \end{bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

Sym.

$$R_1 = \int_0^\ell \phi_2 dx = \frac{\ell}{2}, \quad R_2 = \int_0^\ell \psi_3' dx = 1$$

$$R_3 = \int_0^\ell \psi_4' dx = 0, \quad R_4 = \int_0^\ell \psi_3 dx = \frac{\ell}{2}$$

$$R_5 = \int_0^\ell \psi_4 dx = -\frac{\ell^2}{12}, \quad R_6 = \int_0^\ell (\phi_2)^2 dx = \frac{\ell}{3}$$

$$R_7 = \int_0^\ell (\psi_3')^2 dx = \frac{6}{5\ell}, \quad R_8 = \int_0^\ell (\psi_4')^2 dx = \frac{2\ell}{15}$$

$$R_9 = \int_0^\ell (\psi_3)^2 dx = \frac{13\ell}{35}, \quad R_{10} = \int_0^\ell (\psi_4)^2 dx = \frac{\ell^3}{105}$$

$$R_{11} = \int_0^\ell \psi_3 \psi_4 dx = -\frac{11\ell^2}{210}, \quad R_{12} = \int_0^\ell \phi_2 \psi_3 dx = \frac{7\ell}{20}$$

$$R_{13} = \int_0^\ell \phi_2 \psi_4 dx = -\frac{\ell^2}{20}, \quad R_{14} = \int_0^\ell \psi_3' \psi_4' dx = -\frac{1}{10}$$

$$R_{15} = \int_0^\ell x \psi_3 dx = \frac{7\ell^2}{20}, \quad R_{16} = \int_0^\ell x \psi_4 dx = -\frac{\ell^3}{20} \quad (\text{III.1})$$

参考文献

- 1) 後藤 芳頭, 春日井 俊博, 西野 文雄: 局所移動座標の選択が平面骨組の有限変位解析の精度に及ぼす影響, 土木学会論文集, No. 386, pp. 311-320, 1987.
- 2) Iwakuma, T.: Timoshenko beam theory with extension effect and its stiffness equation for finite rotation, Computers and Structures, Vol. 34, pp. 239-250, 1990.
- 3) Iura, M. and Iwakuma, T.: Dynamic analysis of the planar Timoshenko beam with finite displacement, Computers and Structures, Vol. 45, pp. 73-179, 1992.
- 4) Iwakuma, T., Hasegawa, A., Nishino, F. and Kuranishi, S.: Principle and numerical check of a stiffness equation for plane frames, Structural Eng./ Earthquake Eng. JSCE, Vol. 4, pp. 73s-83s, 1987.
- 5) Simo, J. C. and Vu-Quoc, L.: On the dynamics of flexible beams under large overall motions — the plain case. Parts 1 & 2, J. Appl. Mech. Vol.53, pp. 849-863, 1986.
- 6) Ahmadi-Kashani, K.: Vibration of hanging cables Computers and Structures, Vol. 31, pp. 699-715, 1989.
- 7) Timoshenko, S. P. and Gere, J. M.: Theory of Elastic Stability, 2nd. ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.
- 8) Young, T. H. and Chen, F. Y.: Post-flutter analysis of beams subjected subtangential forces, Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 28, No. 1, pp. 29-41, 1993.

(1995年9月18日 受付)