

拡張 Timoshenko はり要素による細長い部材の非線形解析

NONLINEAR ANALYSIS OF SLENDER BEAMS USING EXTENDED TIMOSHENKO BEAM ELEMENT

岩崎英治*・林 正** 中林隆宏****

Eiji IWASAKI, Masa HAYASHI and Takahiro NAKABAYASHI

*工博 長岡技術科学大学助手 工学部建設系 (〒940-21 長岡市上富岡町 1603-1)

**工博 長岡技術科学大学教授 工学部建設系 (〒940-21 長岡市上富岡町 1603-1)

***工修 新潟県庁 土木部河川開発課 (〒950 新潟市新光町 4-1)

Extended Timoshenko beam theory has been proposed by Kawai and others where the effects of secondary shear deformations due to warping torsion as well as bending moment are taken into account. In the extended Timoshenko beam element based on this theory, the shape functions are only required to be C^0 continuity, so that the formulation of its geometrical and elasto-plastic stiffness matrices is very easily compared with Bernoulli-Euler beam element. In this paper the efficiency of the extended element is examined for nonlinear analysis of slender beams in which the secondary shear deformations are negligible, and the accuracy of the element is shown by numerical calculation for a cantilever beam.

Key Words : framed structures, finite displacement, elasto-plastic, extended Timoshenko beam theory

1. まえがき

有限要素法による骨組構造の解析では、曲げによるせん断変形や曲げねじりによる 2 次せん断変形を無視した、曲げに関しては Bernoulli-Euler はり理論、ねじりに関しては、Saint-Venant のねじり理論、または、曲げねじり理論が用いられる。これらのはり理論に基づいて有限要素法の定式化を行うには、節点での変位とその微係数(回転角)、また、曲げねじり理論では、節点でのねじり角とその微係数(ねじり率)から、要素内の変位とねじり角を多項式で表す必要がある。線形解析では、節点での値とその微係数から変位関数を表しても、それほど困難なく定式化できる。しかし、線形座屈解析などの幾何学的非線形解析や材料非線形解析では、十分な配慮のもとで定式化を行わなければ、誤った結果を出したり、収束性の悪化することがある^{1),2)}。

ところで、曲げによるせん断変形を考慮した Timoshenko はり理論では、曲げによる変位と回転角は独立な関数として扱うので、Bernoulli-Euler はり理論に比べて単純な変位関数を用いて定式化が行える。Kawai³⁾は、薄肉断面部材に適用可能な剛体バネモデルとして、そり変位をねじり率とは別の関数とそり関数の積で表すモデルを提案している。池上・窪田・藤谷⁴⁾も、曲げによる部材軸の回転角(たわみの微係数)と断面の回転角の差が曲げによるせん断変形を表すと仮定した Timoshenko はり理論との類推から、ねじり率とは別の関数とそり関数との積によりそり変位を表し、この関数とねじり率との差が曲げねじりによる 2 次

せん断変形を表しているものと仮定して曲げねじり問題に適用したはり理論を提案している。また、Chen と Blandford⁵⁾も同様のはり要素を提案している。深沢・太田⁶⁾も Timoshenko はり理論を曲げねじり問題に拡張して、波動伝播特性を調べている。さらに、西野・長谷川・名取⁷⁾は、長方形薄肉断面の断面変形を考慮し、曲げによるせん断変形の他に曲げねじりや断面変形による 2 次せん断変形を Timoshenko はりの仮定を拡張して考慮したはり理論を展開している。

本論文では、これらの研究のように、そり変位をねじり率とは別の関数とそり関数の積で表して、Timoshenko はり理論を拡張した理論を拡張 Timoshenko はり理論と呼ぶことにする。この理論では、ねじり角とそり変位を表す関数(通常の曲げねじり理論ではねじり率)を独立に扱うことができ、曲げねじり理論に比べて単純な変位関数を用いて有限要素法の定式化を行えることから、せん断変形の影響の少ない細長い部材の解析でも、この理論を用いる利点があるものと考えられる。

そこで、本論文は、池上・窪田・藤谷⁴⁾による拡張 Timoshenko はり理論をせん断変形の影響がそれ程重要ではない細長い部材の非線形問題に適用して、Bernoulli-Euler はり理論と曲げねじり理論を組み合わせた方法と、精度や収束性について比較・検討し、拡張 Timoshenko はり理論を用いることの数値計算上の有効性を確認する。なお、井浦・平嶋⁸⁾は、そり変位を無視した 3 次元 Timoshenko はりの有限変位理論を展開しているが、数値計算上の有効性を確認していない。

2. 変位増分とひずみ増分

2 軸曲げによるせん断変形を考慮した Timoshenko はりに、曲げねじりによる 2 次せん断変形を考慮した はりの 2 次の有限変位増分場を導く。なお、有限変位増分理論には、直前の増分計算により得られた部材形状を基準にして、次の増分段階での変位を記述する更新 Lagrange の方法を用いる。このとき、初期状態に直線であった部材は増分段階の進行と共に曲線となるため、一般的な曲線部材として扱う必要があるが、各増分段階での部材を直線はり要素の集合体により表すことにして、本論文では、直線部材の有限変位増分場を誘導する。

2.1 仮定と座標系

図-1に示しているように、断面内の点 O を通る部材軸上の座標を x_1 、この軸の法平面内で互いに直交する方向を x_2, x_3 とする。また、現増分段階の断面の法線方向の単位ベクトルを e_1 、断面内の二つの方向の単位ベクトルを e_2, e_3 とし、変位増分による断面の回転後のこれらの単位ベクトルをそれぞれ、 e_1^*, e_2^*, e_3^* とする。さらに、曲げによるせん断変形により、変位増分後の部材軸の接線方向と断面の法線方向は一致しないので、変位増分後の部材軸の単位接線ベクトルを E_1^* と表す。

変位増分場を誘導するために、以下の仮定を設ける。

- (1) 現増分段階で、部材軸の法平面をなす断面は、曲げせん断変形により変位増分後の部材軸の法平面からずれるが、その断面は平面を保持する。
- (2) ねじりによるせん断変形により、断面はゆがみ、そのゆがみ量(そり変位)は、断面形状とねじり軸の位置から決まる関数(そり関数)と、部材軸方向座標の関数との積で表す(付録I参照)。なお、そり関数には、Saint-Venant ねじりのそり関数を用いる。
- (3) これらの曲げとねじりによるせん断変形量は微小として扱い、曲げとねじりが同時に作用するときのせん断変形量は、これら2種類の変形量の重ね合わせで表す。

また、弾塑性解析の定式化では、降伏条件に、von Mises の降伏条件を用い、塑性流れ則には、Prandtl-Reuss の流れ則を用い、硬化則には等方硬化則を用いる。

2.2 部材軸の幾何量、断面の回転量とせん断変形量

直交単位ベクトル系 e_1, e_2, e_3 が断面の回転により、 e_1^*, e_2^*, e_3^* となるときの回転の軸の単位ベクトル ϕ と回転角 $\Delta\theta$ から $\Delta\theta \equiv 2\phi \tan(\Delta\theta/2)$ で定義されるベクトルにより回転を表す。これより、回転後の直交単位ベクトル系 e_i^* は、回転増分量の 3 次以上の高次の微小項を省略すると、次のように表される。

$$e_i^* \doteq e_i + \Delta\theta \times e_i + \frac{1}{2}\Delta\theta \times (\Delta\theta \times e_i) \quad (1)$$

上式の x_1 に関する導関数は、 $e_{i,1}^* = \Delta\kappa \times e_i^*$ と表すことができ、ベクトル $\Delta\kappa$ の e_i^* に関する成分 $\Delta\kappa_i$ は、 $\Delta\theta$ の e_i ($i = 1, 2, 3$) に関する成分を $\Delta\theta_i$ とおくと、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta\kappa_1 &\doteq \Delta\theta_{1,1} + \frac{1}{2}(\Delta\theta_3\Delta\theta_{2,1} - \Delta\theta_2\Delta\theta_{3,1}) \\ \Delta\kappa_2 &\doteq \Delta\theta_{2,1} + \frac{1}{2}(\Delta\theta_1\Delta\theta_{3,1} - \Delta\theta_3\Delta\theta_{1,1}) \\ \Delta\kappa_3 &\doteq \Delta\theta_{3,1} + \frac{1}{2}(\Delta\theta_2\Delta\theta_{1,1} - \Delta\theta_1\Delta\theta_{2,1}) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

なお、本文では、座標系 (x_1, x_2, x_3) の各座標 x_i による微分を、 $(\)_{,i}$ と表す。

変位増分後の部材軸上の点 O^* の空間固定点 $\hat{O}$ に対する位置ベクトル r_o^* は、変位増分前の点 O の位置ベクトル r_o と点 O から O^* までの変位増分ベクトル Δu_o の和で表される。また、変位増分後の部材軸の単位節点ベクトル E_1^* は、 $r_{o,1}^*/|r_{o,1}^*|$ で与えられる。

$|r_{o,1}^*| - 1$ は、部材軸の伸び率増分 $\Delta\epsilon_o$ を表し、次式で与えられる。

$$\Delta\epsilon_o \doteq \Delta u_{1,1} + \frac{1}{2}(\Delta u_{2,1}^2 + \Delta u_{3,1}^2) \quad (3)$$

前述のように、変位増分後の単位ベクトル e_1^* と E_1^* のずれは曲げによるせん断変形に起因するものであるので、せん断変形によるずれを表すパラメータ $\Delta\gamma_2, \Delta\gamma_3$ を導入して、 E_1^* を次のように表す。

$$\begin{aligned} E_1^* &= \sqrt{1 - (\Delta\gamma_2^2 + \Delta\gamma_3^2)} e_1^* + \Delta\gamma_2 e_2^* + \Delta\gamma_3 e_3^* \\ &\doteq e_1^* + \Delta\gamma_2 e_2^* + \Delta\gamma_3 e_3^* \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、 $\Delta\gamma_2, \Delta\gamma_3$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta\gamma_2 &= e_2^* \cdot E_1^* \doteq -\Delta\theta_3 + \frac{1}{2}\Delta\theta_2\Delta\theta_1 \\ &\quad + \Delta u_{2,1}(1 - \Delta u_{1,1}) + \Delta u_{3,1}\Delta\theta_1 \\ \Delta\gamma_3 &= e_3^* \cdot E_1^* \doteq \Delta\theta_2 + \frac{1}{2}\Delta\theta_3\Delta\theta_1 \\ &\quad + \Delta u_{3,1}(1 - \Delta u_{1,1}) - \Delta u_{2,1}\Delta\theta_1 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

2.3 変位とひずみ

変位増分前後の断面内の点 P の点 $\hat{O}$ に対する位置ベクトル r_p と r_p^* は、図-2より、次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} r_p &= r_o + x_2 e_2 + x_3 e_3 \\ r_p^* &= r_o^* + x_2 e_2^* + x_3 e_3^* + \Delta\tilde{u}_p e_1^* \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

なお、 $\Delta\tilde{u}_p$ はねじりによる断面のそり変位増分を表し、この変位は変位増分後の断面の法線方向に生じるものと仮定する。

そり変位増分は、Saint-Venant のねじりでは、断面形状から決まるそり関数 $(\omega(x_2, x_3))$ とねじり率増分 $(\Delta\kappa_1(x_1))$ の積で表されるが、曲げねじりによる軸方向ひずみが生じると、厳密にはこのような積では表現できなくなる(付録I参照)。そこで、そり変位増分を、Saint-Venant ねじりのそり関数と、ねじり率とは別の部材軸の座標 x_1 に関する関数 $\Delta\psi_1(x_1)$ との積により

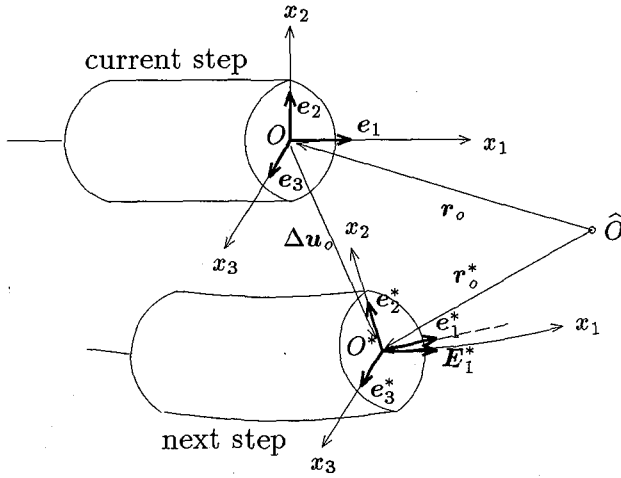


図-1 座標系と変位増分前後の基底ベクトル

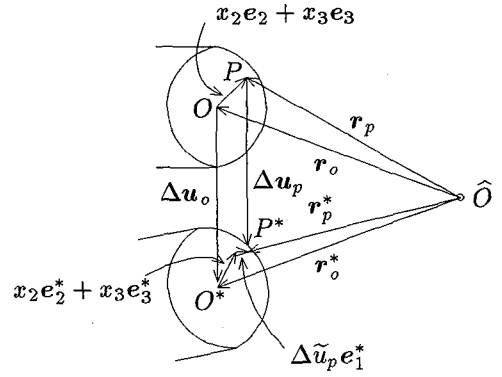


図-2 断面の回転とそり変位

次のように表す。

$$\Delta \tilde{u}_p \equiv -\omega(x_2, x_3) \Delta \psi_1(x_1) \quad (7)$$

これらより、断面内の点 P の変位増分ベクトル Δu_p は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta u_p &= r_p^* - r_p \\ &= \Delta u_o + x_2(e_2^* - e_2) + x_3(e_3^* - e_3) \\ &\quad - \omega \Delta \psi_1 e_1^* \end{aligned} \quad (8)$$

ひずみは、

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varepsilon_{11} &\div \Delta \varepsilon_o - x_2 \Delta \kappa_3 + x_3 \Delta \kappa_2 \\ &\quad - \omega \Delta \psi_{1,1} + (x_2^2 + x_3^2)(\kappa_1 + \frac{1}{2} \Delta \kappa_1) \Delta \kappa_1 \\ 2\Delta \varepsilon_{12} &\div \Delta \gamma_2 - (\omega_{,2} + x_3) \Delta \kappa_1 - \omega_{,2}(\Delta \psi_1 - \Delta \kappa_1) \\ 2\Delta \varepsilon_{13} &\div \Delta \gamma_3 - (\omega_{,3} - x_2) \Delta \kappa_1 - \omega_{,3}(\Delta \psi_1 - \Delta \kappa_1) \\ \Delta \varepsilon_{22} &\div \Delta \varepsilon_{33} \div 2\Delta \varepsilon_{23} \div 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

で表され、せん断ひずみ $2\Delta \varepsilon_{12}$, $2\Delta \varepsilon_{13}$ の右辺第1項, 2項, 3項目はそれぞれ曲げによるせん断ひずみ, Saint-Venantねじりに相当するせん断ひずみ, 曲げねじりによる2次せん断ひずみを表している。

図-3で表されるような薄肉断面部材の座標系でせん断ひずみを表すと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} 2\Delta \varepsilon_{1s} &= -\Delta \gamma_2 \sin \beta + \Delta \gamma_3 \cos \beta - \omega_{,s}(\Delta \psi_1 - \Delta \kappa_1) \\ &\quad - (\omega_{,s} - r_s) \Delta \kappa_1 \\ 2\Delta \varepsilon_{1n} &= \Delta \gamma_2 \cos \beta + \Delta \gamma_3 \sin \beta - \omega_{,n}(\Delta \psi_1 - \Delta \kappa_1) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここに、 $\omega_{,s}$, $\omega_{,n}$ は ω の s と n による微分を表す。

せん断ひずみ $2\Delta \varepsilon_{1n}$ は、部材軸と板厚方向のなす面内のせん断ひずみであり、薄肉断面では、このひずみ成分は他のひずみ成分に比べて小さいと考えられるが、Timoshenkoはり理論や拡張 Timoshenkoはり理論では、このせん断ひずみはこのままにして、実際のせん断ひずみとの不整合性は補正係数により修正して

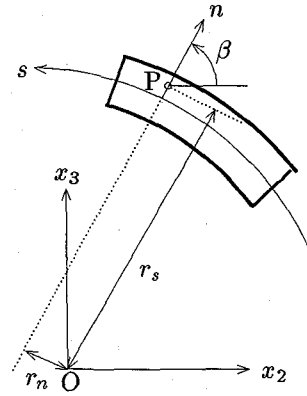


図-3 薄肉断面部材の座標系

いる。しかし、本論文では、せん断変形の影響の少ない細長い部材を解析の対象にしており、 $\Delta \gamma_2$, $\Delta \gamma_3$ と $(\Delta \psi_1 - \Delta \kappa_1)$ による項による影響は小さいことから、後述のように補正係数は用いない。

3. つり合い式

3.1 仮想仕事の原理

ひずみ増分 $\Delta \varepsilon_{11}$, $2\Delta \varepsilon_{12}$, $2\Delta \varepsilon_{13}$ による応力増分を $\Delta \sigma_{11}$, $\Delta \sigma_{12}$, $\Delta \sigma_{13}$, 現増分段階に生じている応力を σ_{11} , σ_{12} , σ_{13} とすると、仮想ひずみエネルギー δU は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V \{(\sigma_{11} + \Delta \sigma_{11}) \delta(\Delta \varepsilon_{11}) + 2(\sigma_{12} + \Delta \sigma_{12}) \delta(\Delta \varepsilon_{12}) \\ &\quad + 2(\sigma_{13} + \Delta \sigma_{13}) \delta(\Delta \varepsilon_{13})\} dV \\ &= \int_0^l \{(N + \Delta N) \delta(\Delta \varepsilon_o) + (M_3 + \Delta M_3) \delta(\Delta \kappa_3) \\ &\quad + (M_2 + \Delta M_2) \delta(\Delta \kappa_2) + (M_w + \Delta M_w) \delta(\Delta \psi_{1,1}) \\ &\quad + (M_r \kappa_1 + \Delta M_r \kappa_1 + M_r \Delta \kappa_1) \delta(\Delta \kappa_1)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(Q_2 + \Delta Q_2) \delta(\Delta \gamma_2) + (Q_3 + \Delta Q_3) \delta(\Delta \gamma_3) \\
& +(M_1^{\text{st}} + \Delta M_1^{\text{st}}) \delta(\Delta \kappa_1) \\
& +(M_1^\omega + \Delta M_1^\omega) \delta(\Delta \psi_1 - \Delta \kappa_1) \} dx_1 \quad (11)
\end{aligned}$$

ここに、断面力は次のように定義している。

$$\left. \begin{aligned}
N &= \int_A \sigma_{11} dA, \quad M_3 = - \int_A \sigma_{11} x_2 dA \\
M_2 &= \int_A \sigma_{11} x_3 dA, \quad M_\omega = - \int_A \sigma_{11} \omega dA \\
M_r &= \int_A \sigma_{11} (x_2^2 + x_3^2) dA \\
Q_2 &= \int_A \sigma_{12} dA, \quad Q_3 = \int_A \sigma_{13} dA \\
M_1^{\text{st}} &= - \int_A \{ \sigma_{12} (\omega_{,2} + x_3) + \sigma_{13} (\omega_{,3} - x_2) \} dA \\
M_1^\omega &= - \int_A (\sigma_{12} \omega_{,2} + \sigma_{13} \omega_{,3}) dA
\end{aligned} \right\} \quad (12)$$

なお、断面力増分も同様の式で定義される。

部材内部に分布する荷重ベクトル p と部材端に作用する荷重ベクトル $\bar{P}$ による仮想仕事 δW は、次のように表される。

$$\delta W = \int_V p^T \delta(\Delta u_p) dV + \left[\bar{n}_1 \int_A \bar{P}^T \delta(\Delta u_p) dA \right]_0^\ell \quad (13)$$

なお、 $\bar{n}_1$ は、 $x_1 = 0$ で -1 、 $x_1 = \ell$ で $+1$ の値をとる。

仮想仕事の原理にこれらの式を適用するとつり合い式が求められる。

3.2 断面力と変位の関係式

応力増分をひずみ増分から次式のように表す。

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta \sigma_{11} \\ \Delta \sigma_{12} \\ \Delta \sigma_{13} \end{aligned} \right\} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{pmatrix} \left\{ \begin{aligned} \Delta \varepsilon_{11} \\ 2\Delta \varepsilon_{12} \\ 2\Delta \varepsilon_{13} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ここに、 D_{ij} は、塑性域では、Prandtl-Reuss の流れ則を用いると、ヤング係数 E 、せん断弾性係数 G と硬化係数 $H (= d\sigma/d\varepsilon^p)$ から次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned}
D_{11} &= \frac{E}{D_o} \{ \frac{1}{3} \sigma_{11}^2 H + (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)(H + 3G) \} \\
D_{22} &= \frac{G}{D_o} \{ \frac{1}{3} \sigma_{11}^2 (H + E) + \sigma_{12}^2 H + \sigma_{13}^2 (H + 3G) \} \\
D_{33} &= \frac{G}{D_o} \{ \frac{1}{3} \sigma_{11}^2 (H + E) + \sigma_{12}^2 (H + 3G) + \sigma_{13}^2 H \} \\
D_{12} &= -\sigma_{11} \sigma_{12} \frac{EG}{D_o}, \quad D_{13} = -\sigma_{11} \sigma_{13} \frac{EG}{D_o} \\
D_{23} &= -3\sigma_{12} \sigma_{13} \frac{G^2}{D_o} \\
D_o &= \frac{1}{3} \sigma_{11}^2 (H + E) + (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)(H + 3G)
\end{aligned} \right\} \quad (15)$$

また、弾性域では

$$D_{11} = E, \quad D_{22} = D_{33} = G, \quad D_{12} = D_{13} = D_{23} = 0 \quad (16)$$

式 (14) を、薄肉断面部材の座標系で表し、ひずみ増分に含まれる $\Delta \gamma_2, \Delta \gamma_3, (\Delta \psi_1 - \Delta \kappa_1)$ の項は他の変形量に比べて小さいので、これらの項に関しては、応力ひずみの関係式を、弾性域、塑性域を問わず弾性の

式を用いることにすると、次のように簡略化される。

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta \sigma_{11} \\ \Delta \sigma_{1s} \\ \Delta \sigma_{1n} \end{aligned} \right\} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{1s} & 0 \\ D_{1s} & D_{ss} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix} \left\{ \begin{aligned} \Delta \varepsilon_{11} \\ 2\Delta \varepsilon_{1s} \\ 2\Delta \varepsilon_{1n} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

また、後述の降伏の判定や塑性域での応力ひずみ関係式の計算でも、 $\Delta \gamma_2, \Delta \gamma_3, (\Delta \psi_1 - \Delta \kappa_1)$ の項は他の変形量に比べて影響は小さいものとしてこれらの項を省略すると、上式中の D_{11}, D_{1s}, D_{ss} は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned}
D_{11} &= \frac{E}{D_o} \{ \frac{1}{3} \sigma_{11}^2 H + \sigma_{1s}^2 (H + 3G) \} \\
D_{ss} &= \frac{G}{D_o} \{ \frac{1}{3} \sigma_{11}^2 (H + E) + \sigma_{1s}^2 H \} \\
D_{1s} &= -\sigma_{11} \sigma_{1s} \frac{EG}{D_o} \\
D_o &= \frac{1}{3} \sigma_{11}^2 (H + E) + \sigma_{1s}^2 (H + 3G)
\end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ひずみ増分に含まれる $(\kappa_1 + \Delta \kappa_1/2) \Delta \kappa_1$ の項も $\Delta \gamma_2, \Delta \gamma_3, (\Delta \psi_1 - \Delta \kappa_1)$ と同様に他の変形量に比べて小さい。また、断面力増分 $\Delta Q_2, \Delta Q_3, \Delta M_1^\omega$ は、それぞれ 2 軸曲げによるせん断変形と曲げねじりによるせん断変形に起因する諸量であり、細長い部材を解析対象にした場合には、他の断面力増分に比べて部材の挙動に与える影響は小さいと考えられる。さらに、 $\Delta M_r \kappa_1$ の項もねじりが他の変形に比べて大きくなければ影響は小さいと考えられるので、これらの項と式に関しては、応力ひずみの関係式を、弾性域、塑性域を問わず上式の弾性の式を用いることにすると、断面力増分は変形量増分から次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
\Delta N &= S_{11}^0 \Delta \varepsilon_o - S_{11}^2 \Delta \kappa_3 + S_{11}^3 \Delta \kappa_2 + S_{1s}^0 \Delta \kappa_1 \\
&\quad - S_{11}^\omega \Delta \psi_{1,1} + EI_r (\kappa_1 + \frac{1}{2} \Delta \kappa_1) \Delta \kappa_1 \\
\Delta M_3 &= -S_{11}^2 \Delta \varepsilon_o + S_{11}^{22} \Delta \kappa_3 - S_{11}^{23} \Delta \kappa_2 - S_{1s}^2 \Delta \kappa_1 \\
&\quad + S_{11}^{\omega 2} \Delta \psi_{1,1} - EI_{r2} (\kappa_1 + \frac{1}{2} \Delta \kappa_1) \Delta \kappa_1 \\
\Delta M_2 &= S_{11}^3 \Delta \varepsilon_o - S_{11}^{23} \Delta \kappa_3 + S_{11}^{33} \Delta \kappa_2 + S_{1s}^3 \Delta \kappa_1 \\
&\quad - S_{11}^{\omega 3} \Delta \psi_{1,1} + EI_{r3} (\kappa_1 + \frac{1}{2} \Delta \kappa_1) \Delta \kappa_1 \\
\Delta M_1^{\text{st}} &= S_{1s}^0 \Delta \varepsilon_o - S_{1s}^2 \Delta \kappa_3 + S_{1s}^3 \Delta \kappa_2 + S_{ss} \Delta \kappa_1 \\
&\quad - S_{1s}^\omega \Delta \psi_{1,1} \\
\Delta M_\omega &= -S_{11}^\omega \Delta \varepsilon_o + S_{11}^{\omega 2} \Delta \kappa_3 - S_{11}^{\omega 3} \Delta \kappa_2 - S_{1s}^\omega \Delta \kappa_1 \\
&\quad + S_{11}^{\omega \omega} \Delta \psi_{1,1} - EI_{r\omega} (\kappa_1 + \frac{1}{2} \Delta \kappa_1) \Delta \kappa_1 \\
\Delta M_r &= EI_r \Delta \varepsilon_o - EI_{r2} \Delta \kappa_3 + EI_{r3} \Delta \kappa_2 \\
&\quad - EI_{r\omega} \Delta \psi_{1,1} + EI_{rr} (\kappa_1 + \frac{1}{2} \Delta \kappa_1) \Delta \kappa_1 \\
\Delta Q_2 &= GA \Delta \gamma_2 + GS_2 (\Delta \psi_1 - \Delta \kappa_1) \\
\Delta Q_3 &= GA \Delta \gamma_3 - GS_3 (\Delta \psi_1 - \Delta \kappa_1) \\
\Delta M_1^\omega &= GS_2 \Delta \gamma_2 - GS_3 \Delta \gamma_3 \\
&\quad + G(I_r - J) (\Delta \psi_1 - \Delta \kappa_1) \quad (19)
\end{aligned}$$

ここに、断面剛性 S_{11}^0 等は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
S_{11}^0 &= \int_A D_{11} dA, \quad S_{11}^2 = \int_A D_{11} x_2 dA \\
S_{11}^3 &= \int_A D_{11} x_3 dA, \quad S_{11}^{22} = \int_A D_{11} x_2^2 dA
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{11}^{33} &= \int_A D_{11} x_3^2 dA, \quad S_{11}^{23} = \int_A D_{11} x_2 x_3 dA \\
S_{1s}^0 &= -\int_A \{D_{12}(\omega_{,2} + x_3) + D_{13}(\omega_{,3} - x_2)\} dA \\
S_{1s}^2 &= -\int_A \{D_{12}(\omega_{,2} + x_3) + D_{13}(\omega_{,3} - x_2)\} x_2 dA \\
S_{1s}^3 &= -\int_A \{D_{12}(\omega_{,2} + x_3) + D_{13}(\omega_{,3} - x_2)\} x_3 dA \\
S_{1s}^\omega &= -\int_A \{D_{12}(\omega_{,2} + x_3) + D_{13}(\omega_{,3} - x_2)\} \omega dA \\
S_{ss} &= \int_A \{D_{22}(\omega_{,2} + x_3)^2 + D_{33}(\omega_{,3} - x_2)^2 \\
&\quad + 2D_{23}(\omega_{,2} + x_3)(\omega_{,3} - x_2)\} dA \\
S_{11}^\omega &= \int_A D_{11} \omega dA, \quad S_{11}^{\omega 2} = \int_A D_{11} \omega x_2 dA \\
S_{11}^{\omega 3} &= \int_A D_{11} \omega x_3 dA, \quad S_{11}^{\omega \omega} = \int_A D_{11} \omega^2 dA \\
I_r &= \int_A (x_2^2 + x_3^2) dA, \quad I_{r2} = \int_A (x_2^2 + x_3^2) x_2 dA \\
I_{r3} &= \int_A (x_2^2 + x_3^2) x_3 dA, \quad I_{r\omega} = \int_A (x_2^2 + x_3^2) \omega dA \\
I_{rr} &= \int_A (x_2^2 + x_3^2)^2 dA, \quad A = \int_A dA \\
S_2 &= \int_A x_3 dA, \quad S_3 = \int_A x_2 dA \\
J &= \int_A \{(\omega_{,2} + x_3)^2 + (\omega_{,3} - x_2)^2\} dA \quad (20)
\end{aligned}$$

薄肉断面部材では、上式中の $S_{1s}^0, S_{1s}^2, S_{1s}^3, S_{1s}^\omega, S_{ss}, J$ は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned}
S_{1s}^0 &= -\int_A D_{1s}(\omega_{,s} - r_s) dA \\
S_{1s}^2 &= -\int_A D_{1s}(\omega_{,s} - r_s) x_2 dA \\
S_{1s}^3 &= -\int_A D_{1s}(\omega_{,s} - r_s) x_3 dA \\
S_{1s}^\omega &= -\int_A D_{1s}(\omega_{,s} - r_s) \omega dA \\
S_{ss} &= \int_A D_{1s}(\omega_{,s} - r_s)^2 dA \\
J &= \int_A (\omega_{,s} - r_s)^2 dA
\end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$\Delta\gamma_2, \Delta\gamma_3, (\Delta\psi_1 - \Delta\kappa_1)$ から断面力 $\Delta Q_2, \Delta Q_3, \Delta M_1^\omega$ を求めるときには、拡張 Timoshenko はりの仮定では、せん断ひずみを断面内で一定としているが、実際には一定にはならないので、せん断補正係数を含める必要がある。しかし、細長く、せん断変形の影響の少ない部材では、このせん断ひずみの断面内での分布形の影響も少ないことと、本論文の目的は、せん断変形を正確に表現するのではなく、有限要素法での定式化の容易な拡張 Timoshenko はり要素を用いて Bernoulli-Euler はりでも解けるような骨組部材を、拡張 Timoshenko はり要素を用いて解いた場合の数値計算上の有効性を調べることにあるので、せん断補正係数は考慮しない。すなわち、補正係数 = 1 とする。

3.3 降伏と除荷の判定

降伏条件には、von Mises の降伏条件を用いることにすると、降伏の判定は相当応力 $\bar{\sigma}$ と降伏応力 σ_Y の比較により行える。なお、相当応力は次式で与えられる。

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\sigma_{12}^2 + 3\sigma_{13}^2} \quad (22)$$

ここに、応力 $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$ は、各増分段階の応力増分の総和として与えられる。また、各増分段階の応力増分は、式(14)とひずみから得られるが、ひずみ増分に

含まれる $(\kappa_1 + \Delta\kappa_1/2)\Delta\kappa_1, \Delta\gamma_2, \Delta\gamma_3, (\Delta\psi_1 - \Delta\kappa_1)$ の項は他の変形量に比べて小さいので、降伏の判定に用いる応力の計算では、これらを省略すると、薄肉断面部材では、相当応力は次のように表される。

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\sigma_{1s}^2} \quad (23)$$

塑性流れ則には、Prandtl-Reuss 則を用いることにすると、降伏域から弾性域への除荷は、次の条件が満足されるときに起こる。

$$\sigma_{11} E \Delta\epsilon_{11} + 6\sigma_{12} G \Delta\epsilon_{12} + 6\sigma_{13} G \Delta\epsilon_{13} < 0 \quad (24)$$

4. 有限要素法の定式化

4.1 拡張 Timoshenko はり要素

拡張 Timoshenko はり理論での独立な変位増分は、部材軸上の点の変位増分 $\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3$ 、断面の回転増分 $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3$ とそり変位に関するパラメータ $\Delta\psi_1$ の7つある。これらの関数には、後述の Bernoulli-Euler はり要素のような変位と回転、回転とねじり率間の従属関係がなく、変位関数には C^0 連続性が要求されるだけなので、高精度な多節点要素を容易に定式化できる利点がある。しかし、本論文では、両端の節点での値から、1次多項式で表した2節点要素を用いて、後述の Bernoulli-Euler はり要素による結果と比較・検討する。

両節点での変位、回転とそり変位に関するパラメータの増分からなるベクトル Δd により、要素内の変位は、

$$\left. \begin{aligned}
\Delta u_i &= f_{u_i}^T \Delta d \\
\Delta \theta_i &= f_{\theta_i}^T \Delta d \\
\Delta \psi_1 &= f_{\psi_1}^T \Delta d
\end{aligned} \right\} \quad (25)$$

と表される。ここに、 f_{u_i}, f_{θ_i} と f_{ψ_1} は形状関数からなるベクトルである。

これより、変位増分 $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ 、変形量増分 $\Delta\epsilon_0, \Delta\kappa_1, \Delta\kappa_2, \Delta\kappa_3, \Delta\gamma_2, \Delta\gamma_3$ 、断面力増分 $\Delta N, \Delta M_3$ 等が両節点での変位増分 Δu_i 、回転増分 $\Delta\theta_i$ とパラメータ $\Delta\psi_1$ で表現される。

仮想ひずみエネルギーと荷重による仮想仕事に、これらを代入して、仮想仕事の原理を適用すると、線形剛性行列 k_L 、幾何剛性行列 k_G 、断面力ベクトル f 、荷重ベクトル $p, \Delta p$ と変位の非線形項から求められる荷重に関する行列 q が得られる。

このとき、厳密に積分して求めた剛性行列を用いて、せん断変形の影響の少ない、細長い部材を解析すると、精度が極端に悪化するせん断ロッキングを起こすので、次数低減積分法により剛性行列を求める⁹⁾。すなわち、要素中央での被積分関数と要素長の積で剛性行列を表す(1点積分)。なお、仮想ひずみエネルギー δU に含まれる断面力 N, M_3 等と κ_1 は、既に求められた各増分段階での要素中央での値の合計として求め、この値

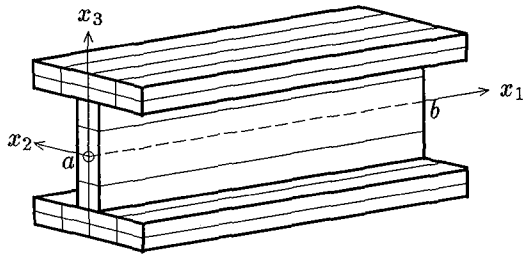


図-4 細要素分割

が要素内で部材軸方向に一定に分布しているものと仮定する。

剛性行列 k_L の計算には、部材軸方向の積分の他に、断面剛性 S_{11}^0 等の計算のための積分計算が必要になる。そこで、要素を構成する薄板を図-4のように板厚中心線に平行な方向と板厚方向に細要素分割し、これら細要素の中心に代表点を設け、この点の状態、その細要素全体の状態を代表させることにして、各細要素の断面剛性の総和により、その要素の断面剛性 S_{11}^0 等を表すことにする。

4.2 Bernoulli-Euler はり要素

部材の曲げ理論に Bernoulli-Euler はり理論、ねじり理論に曲げねじり理論を用いた要素を Bernoulli-Euler はり要素と呼ぶことにする。

この要素の基礎式は、拡張 Timoshenko はり理論の基礎式に、曲げによるせん断変形と曲げねじりによる2次せん断変形がゼロである、次の拘束条件を課すことにより得られる。

$$\Delta\gamma_2 = 0, \quad \Delta\gamma_3 = 0, \quad \Delta\psi_1 = \Delta\kappa_1 \quad (26)$$

これより、独立な変位量は、拡張 Timoshenko はり理論の七つから、 $\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3$ とねじり角 $\Delta\theta_1$ の四つに減る。しかし、変位関数には、 C^1 連続性が要求される。線形解析では、そのような変位関数を誘導し、定式化することも容易であるが、座屈解析や有限変位解析などの幾何学的非線形解析を正確に効率よく行うためには、変位関数の誘導に注意が必要であり、煩雑な定式化になる^{1),2)}。

文献2)より、そのような要素内の変位関数は、次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_1 &= f_{u_1}^T \Delta d \\ \Delta u_2 &= f_{u_2}^T \Delta d + \frac{1}{2} \Delta d^T F_{u_2} \Delta d \\ \Delta u_3 &= f_{u_3}^T \Delta d + \frac{1}{2} \Delta d^T F_{u_3} \Delta d \\ \Delta\theta_1 &= f_{\theta_1}^T \Delta d + \frac{1}{2} \Delta d^T F_{\theta_1} \Delta d \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

ここに、 f_{u_i}, f_{θ_1} は形状関数からなるベクトル、 F_{u_i}, F_{θ_1} は行列である。

$\Delta\theta_2, \Delta\theta_3$ と $\Delta\psi_1$ は、式(26)より、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta\theta_2 &\doteq -\Delta u_{3,1}(1 - \Delta u_{1,1}) + \frac{1}{2} \Delta\theta_1 \Delta u_{2,1} \\ \Delta\theta_3 &\doteq \Delta u_{2,1}(1 - \Delta u_{1,1}) + \frac{1}{2} \Delta\theta_1 \Delta u_{3,1} \\ \Delta\psi_1 &\doteq \Delta\theta_{1,1} + \frac{1}{2} (\Delta u_{3,1} \Delta u_{2,11} - \Delta u_{2,1} \Delta u_{3,11}) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

また、増分段階の部材に生じている断面力は、次のように表す。

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{1}{2} (N_a + N_b), \quad M_2 = N_1 M_{2a} + N_2 M_{2b} \\ M_3 &= N_1 M_{3a} + N_2 M_{3b}, \quad M_1^{st} = N_1 M_{1a}^{st} + N_2 M_{1b}^{st} \\ M_w &= N_1 M_{wa} + N_2 M_{wb}, \quad M_r = \frac{1}{2} (M_{ra} + M_{rb}) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

ここに、 N_a, N_b などは、それぞれ、両端の節点 a と b での断面力を表している。また、 $N_1 = 1 - x_1/\ell$, $N_2 = x_1/\ell$ である。

上式は、 M_1^{st} と M_w を除いて、文献2)と同じである。これらの Saint-Venant のねじりモーメントと曲げねじりモーメントは、文献2)では、 $M_w/EI_w = M_{1,1}^{st}/GJ (= \theta_{1,11})$ の関係を考慮した式を仮定している。しかし、弾塑性状態ではこのような単純な式で表現できないので、Sakimoto ら¹⁰⁾も用いている上式のような仮定を用いる。

式(27),(29)と拡張 Timoshenko はり要素の対応する式を比べると拡張 Timoshenko はり要素の方が簡潔な式で表され、定式化が容易になっていることが分かる。

4.3 計算アルゴリズム

有限要素法の定式化により、節点変位ベクトル ΔD に関する、次のような構造全体の剛性方程式が得られる。

$$(K_L + K_G - Q)\Delta D = \Delta P + P - F \quad (30)$$

ここに、 K_L, K_G 等は、個々の要素の k_L, k_G 等をまとめたものである。

この増分形の剛性方程式の計算アルゴリズムについて述べる。

いま、正確なつり合い状態が求められている増分段階から、次の増分段階のつり合い状態を上式により求めると、その増分段階の構造に生じている断面力ベクトル F は、荷重ベクトル P に等しいはずである。しかし、実際には増分量に関する線形化による誤差のために、これらのベクトルは等しくならず不平衡力を生じる。そこで、まず、線形化による誤差を減らすために新たな荷重増分 ΔP を与えないで、不平衡力を荷重と見なして、不平衡力が許容値以下になるまで、この計算を繰り返す。このとき、座標系の更新を行う。このようにしてつり合い状態が得られても、増分途中に弾性域から塑性域、またはその逆の状態へ移行した領域があると、それは正しいつり合い状態を表していないので、弾性域から塑性域へ移行する降伏点に相当するつり合い点(つり合い曲線上の点)や塑性域から弾性

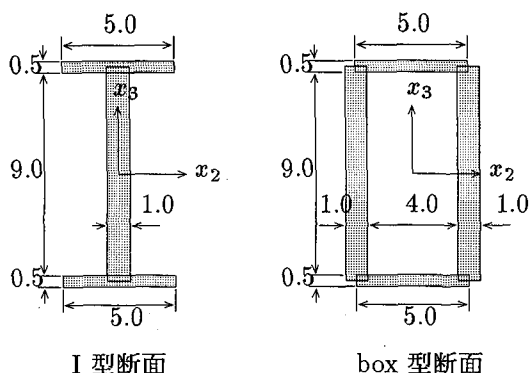


図-5 断面形状 (単位:cm)

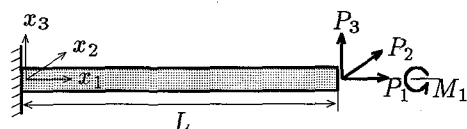


図-6 片持ちはり

域へ移行する除荷点に相当するつり合い点が増分途中のつり合い曲線上に来ないように、荷重増分や変位増分量を修正して、不平衡力を減らすための繰り返し計算をやり直す。このようにして、得られたつり合い状態と現つり合い状態の間に材料状態の移行した細要素がなければ次の増分段階の計算に移る。なお、不平衡力が許容値以下になるまでは、つり合い曲線上の降伏点の探索は行わない。また、除荷点については、現増分段階に戻って、除荷の生じた細要素を弾性域にあるものとして計算をやり直す。

5. 数値計算例

数値計算により、拡張 Timoshenko はり要素と Bernoulli-Euler はり要素による計算結果を比較し、せん断変形の影響の少ない細長い部材を、拡張 Timoshenko はり要素により解析することの有効性を、線形解析、線形座屈解析、弾性有限変位解析、弾塑性有限変位解析のそれぞれについて調べる。

5.1 線形解析

図-6のような片持ちはりの自由端に集中荷重が作用したときの自由端の変位を、Bernoulli-Euler はり要素と拡張 Timoshenko はり要素の要素数を変えて求め、精度を比較する。なお、断面寸法は図-5、その他の諸元は次の通り。

$$E = 2.11 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$$

$$G = 8.15 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$$

$$L = 100 \text{ cm}, \quad P_1 = P_3 = 0 \text{ kgf}$$

$$P_2 = 100 \text{ kgf}, \quad M_1 = 10000 \text{ kgf cm}$$

図-7(a),(b) は、部材に図-5の I 型断面部材を用いたときの x_2 方向変位 u_2 と x_1 軸回りの回転角 θ_1 、同図 (c) は、box 型断面部材を用いたときの x_1 軸回りの回転角 θ_1 を示している。図-7(a) より、部材が曲げられたときの変位は、変位関数に 3 次多項式を用いる Bernoulli-Euler はり要素では、1 要素で正しい値が得られるのに比べて、変位関数に 1 次多項式を用いた (拡張) Timoshenko はり要素では、要素数を多くしなければ精度の良い解が得られないことが分かる。同図 (b) より、部材がねじられたときの回転角は、どちらの要素を用いてもほぼ同程度の精度の解が得られ、同図 (c) では、逆に拡張 Timoshenko はり要素を用いた方が精度の良い解を得ている。

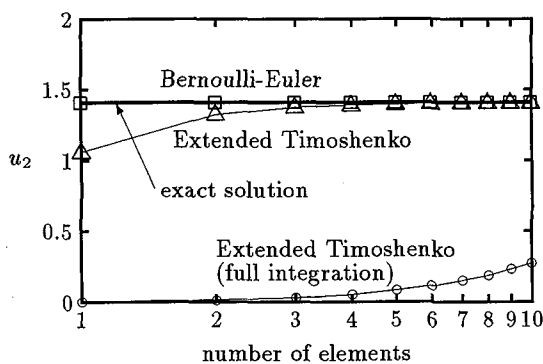
これは、Bernoulli-Euler はり要素の変位関数は、分布荷重のない曲げの場合には、つり合い式の解に一致するが、曲げねじりの場合には、3 次多項式で表した変位関数は曲げねじりのつり合い式の近似式でしかなく、 αL ($\alpha^2 \equiv GJ/EI_w$) が大きくなると誤差が拡大することと、拡張 Timoshenko はり要素では、次数低減積分法により αL が大きいときでも精度の悪化がない (付録 I 参照) ためと考えられる。なお、これらの図には、拡張 Timoshenko はり要素の剛性行列を厳密に積分した場合の結果も示している。また、図中の正解は、通常の曲げねじり理論による解析解であるが、拡張 Timoshenko はり理論による解析解との差は、0.1% 程度であり、図示してもその差違は認められない。

5.2 線形座屈解析

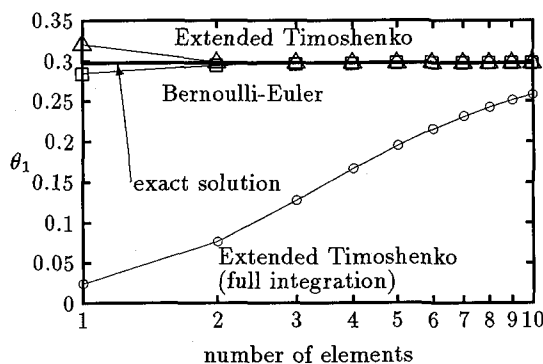
線形解析の場合と同じ材料諸元の box 型断面からなる片持ちはりの軸圧縮荷重 $-P_1$ による曲げ座屈荷重と x_3 方向荷重 P_3 による横倒れ座屈荷重を、Bernoulli-Euler はり要素と拡張 Timoshenko はり要素により求めたのが図-8である。図中の mode x_2 と x_3 がそれぞれ、 x_2 方向と x_3 方向の座屈モードを有する曲げ座屈荷重 $-P_{1cr}$ 、mode t_1 は横倒れ座屈荷重 P_{3cr} を表している。これより、Bernoulli-Euler はり理論による片持ちはりの曲げ座屈荷重は、1 要素で 1% 以下の誤差を有するのみであるのに比べて、本計算例で用いた低次の (拡張) Timoshenko はり要素では、精度の良い解を得るのに多くの要素数を必要とすることが分かる。しかし、横倒れ座屈解析では、低次の変位関数を用いているにも関わらず Bernoulli-Euler はり要素と同程度の精度を有していることが分かる。

5.3 弾性有限変位解析

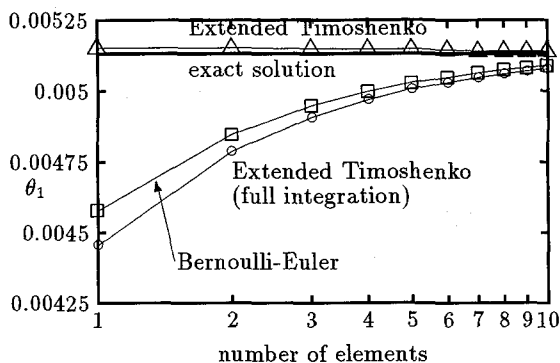
線形座屈解析に用いた材料定数を有する box 型断面片持ちはりの曲げ座屈後の弾性有限変位解析を行う。



(a) I 型断面



(b) I 型断面



(c) box 型断面

図-7 線形解析

初期不整として、曲げ座屈荷重 P_{1cr} の $1/10000$ 倍の荷重を、 x_2 方向に作用させ、荷重作用点の回転角 θ_3 を制御パラメータにとった変位増分法により、軸圧縮荷重と変位の関係を、Bernoulli-Euler はり要素と拡張 Timoshenko はり要素により求め、精度と収束性を検討する。なお、要素数には、軸方向の伸びを無視した楕円積分による解析解¹¹⁾との誤差が 1 % 以下になる分割数として 10 要素を用いている。

図-9(a) は、二種類の要素を用いて解析した荷重-変位関係を表しており、どちらの要素を用いても同程度の精度の解が得られた。また、要素数を少なくした場合にも、Bernoulli-Euler はり要素と拡張 Timoshenko はり要素の誤差は同程度である。同図(b),(c) は、それぞれ Bernoulli-Euler はり要素と拡張 Timoshenko はり

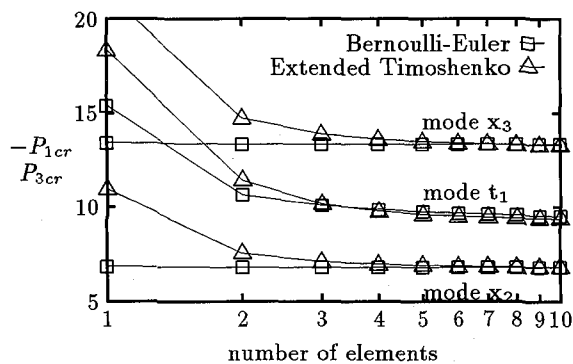
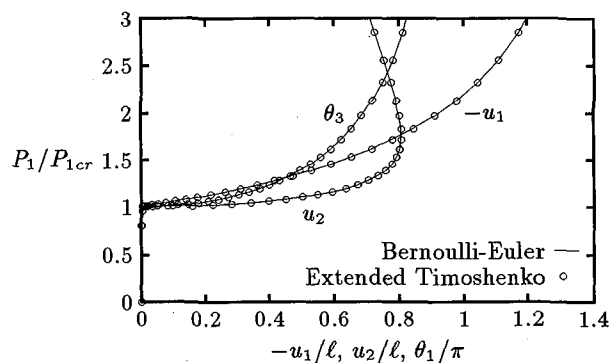
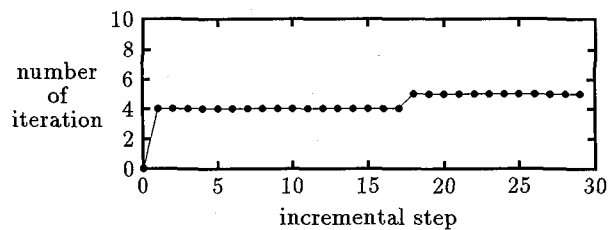


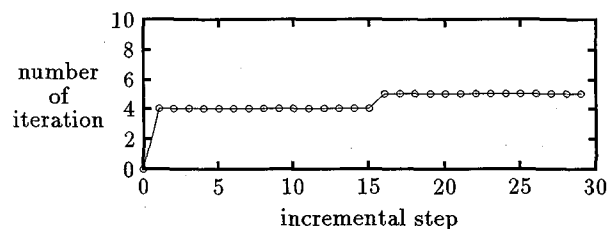
図-8 線形座屈解析



(a) 荷重変位曲線



(b) Bernoulli-Euler はり要素

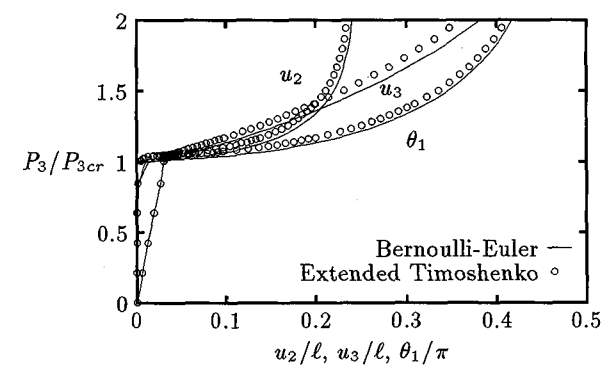


(c) 拡張 Timoshenko はり要素

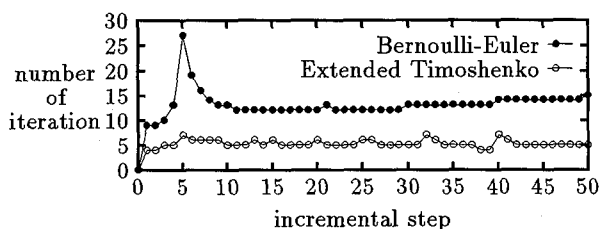
図-9 曲げ座屈後の弾性有限変位解析

り要素を用いたときの各増分段階での収束に要した繰り返し回数を表しており、同程度の収束性を示していることが分かる。

図-10は、横倒れ座屈後の弾性有限変位解析結果を示している。ここで対象とした部材は、I 型断面からなる片持ちはりで、その長さは $L = 300$ cm である。初期不整には、横倒れ座屈荷重 P_{3cr} の $1/1000$ 倍の荷重を x_2 方向に作用させている。変位増分法の制御パラメー



(a) 荷重変位曲線



(b) 各増分段階での反復回数

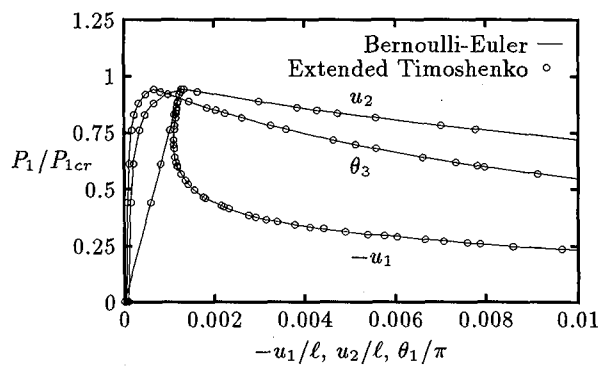
図-10 横倒れ座屈後の弾性有限変位解析

タには、荷重作用点の変位 u_3 を用いている。また、要素数は 10 である。同図 (a) を見ると、Bernoulli-Euler はり要素と拡張 Timoshenko はり要素の結果に若干の違いがあるが、図には示していないが、要素数を倍にして同じ計算を行うと、拡張 Timoshenko はり要素による結果には変化がなく、Bernoulli-Euler はり要素の結果が拡張 Timoshenko はり要素の結果に接近し、図上での差が認められなくなるので、拡張 Timoshenko はり要素の方が精度よく求められているものと思われる。また、同図 (b) の各増分段階での反復回数を比べると、拡張 Timoshenko はり要素の方が収束性のよいことが分かる。

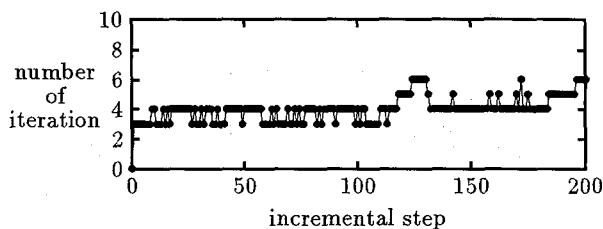
5.4 弾塑性有限変位解析

曲げ座屈後の弾性有限変位解析に用いた box 型断面片持ちはりを、 $\sigma_Y = 2836 \text{ kgf/cm}^2$, $H/E = 0.025$ の線形硬化弾塑性体として解析を行った結果が、図-11 である。これは、座屈荷重と降伏荷重が一致する問題である。部材内の塑性域の進展を考慮するために、フランジは幅方向に 10 分割、板厚方向に 1 分割、ウェブは高さ方向に 1 分割、板厚方向に 4 分割している。また、有限要素には 10 要素用いている。

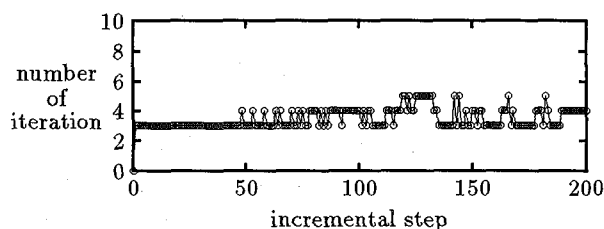
図-11(a) は、二種類の要素を用いて解析した荷重-変位関係を表しており、どちらの要素を用いても同程度の精度の解が得られた。同図 (b), (c) は、荷重が、座屈荷重の 2 倍になるまで増分計算を行ったときの各増分段階での収束に要した繰り返し回数を表しており、拡張 Timoshenko はり要素の方が若干収束性の良いこと



(a) 荷重変位曲線



(b) Bernoulli-Euler はり要素



(c) 拡張 Timoshenko はり要素

図-11 曲げ座屈後の弾塑性有限変位解析

が分かる。なお、Bernoulli-Euler はり要素でも塑性域の進展を評価するために、断面内、部材軸方向とも拡張 Timoshenko はり要素と同じ細要素分割数を用いている。

図-12 は、弾性有限変位解析に用いた I 型断面部材の横倒れ座屈を伴う弾塑性有限変位解析を行った結果を示している。降伏応力と硬化係数は、 $\sigma_Y = 2800 \text{ kgf/cm}^2$, $H/E = 0.025$ とし、塑性域の進展を考慮するために、ウェブ、フランジとも板厚方向に 4 分割、高さ方向に 10 分割している。これらの他の定数は、弾性有限変位解析に用いたものと同じである。また、有限要素には、20 要素用いている。

図-12(a) は、二種類の要素を用いて解析した荷重-変位関係を表しており、どちらの要素を用いても同程度の精度の解が得られた。同図 (b) は、 $P_3/P_{3cr} \approx 0.2$ 付近に荷重が低下するまで増分計算したときの各増分段階での収束に要した繰り返し回数を表しており、拡張 Timoshenko はり要素の方が収束性の良いことが分かる。なお、要素分割数を倍にしても、荷重-変位関係は変わらないので、この程度の分割数で精度の良い解が得られているものと考えられる。

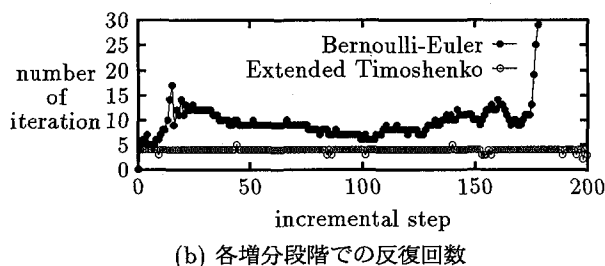
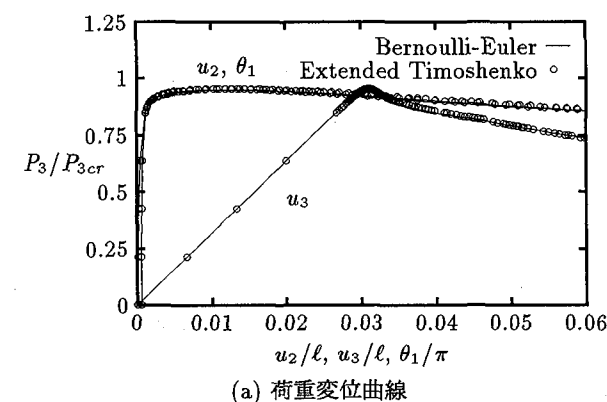


図-12 横倒れ座屈後の弾塑性有限変位解析

線形解析や線形座屈解析では、曲げに関しては低次の変位関数を用いた拡張 Timoshenko はり要素よりも Bernoulli-Euler はり要素の方が優れていたが、これらの結果より、曲げ座屈後の弾性、弾塑性有限変位解析とも、同程度の精度が得られ、ねじり変形を伴う横倒れ座屈後の弾性、弾塑性有限変位解析では、拡張 Timoshenko はり要素の方が精度と収束性とも優れている。これは、最低次の 2 節点要素を用いた拡張 Timoshenko はり要素が線形解析に比べて非線形解析では高精度になったと考えるよりも、従来の Bernoulli-Euler はり理論と曲げねじり理論による要素の方が、非線形解析では、変位関数や断面力の仮定に含まれる誤差が拡大し、拡張 Timoshenko はり要素に比べて精度が悪化しているものと思われる。

6. あとがき

本論文は、曲げによるせん断変形と曲げねじりによる 2 次せん断変形を考慮するために開発された拡張 Timoshenko はり理論を、これらの変形の影響の少ない細長い部材の非線形解析に適用したときの有効性を確認するために、文献4)の理論を弾塑性有限変位問題に拡張して、Bernoulli-Euler はり理論と曲げねじり理論を組み合わせた、通常よく用いられるはり要素との精度と収束性を比較検討した。

その結果、つぎのような知見が得られた。

- (1) 曲げ線形解析では、通常の要素に比べて精度が劣るが、ねじり線形解析では同等の精度かそれ以上

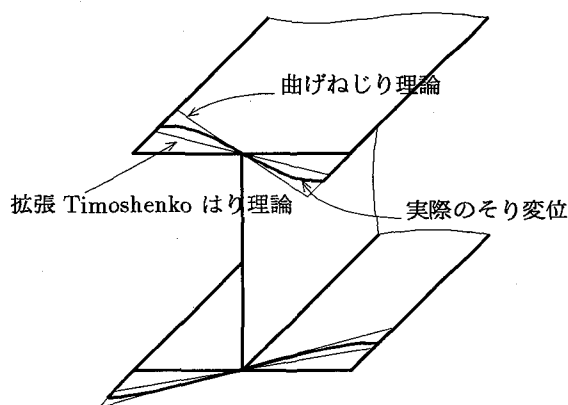


図-13 はりのそり変位の仮定

の精度の解が得られる。

- (2) 線形座屈解析でも精度に関して線形解析と同様の傾向にある。
- (3) 弾性有限変位解析では、ねじりを伴わない平面的な変形を示す問題では、通常の要素と同程度の精度と収束性を有し、ねじりを伴う問題では、拡張 Timoshenko はり要素の方が精度と収束性が良い。
- (4) 弾塑性有限変位解析でも精度と収束性に関して弾性有限変位解析と同様の傾向にある。

本論文で用いた拡張 Timoshenko はり要素は、二節点直線要素であり、通常のはり要素に比べて低次の形状関数を用いているにも係わらず、非線形解析では、同等かそれ以上の精度と収束性を有することから、せん断変形の影響の少ない細長い骨組部材でも、その有効性が確認された。また、有限要素の定式化も通常の要素に比べて容易であることと、容易にアイソパラメトリック高次要素を定式化できる利点がある。

付録 I 拡張 Timoshenko はり線形理論

通常の曲げねじり理論では、Saint-Venant ねじり(単純ねじり、一樣ねじり)のそり関数 $\omega(x_2, x_3)$ と部材軸のねじり率 $\theta_{1,1}(x_1)$ との積でそり変位を表す。両端のみにねじりモーメントが作用し、そり変位が拘束されない Saint-Venant ねじりでは、ねじり率が部材軸方向に一定であるので、そり変位による部材軸方向のひずみや応力は生じない。ところが、曲げねじり理論が対象とするような端部でそり変位が拘束される場合や部材内部にねじりモーメントが作用する場合などでは、ねじり率が部材軸方向に変化することになり、そり変位による部材軸方向のひずみや応力が生じる。通常の曲げねじり理論では、このそり変位による部材軸方向の応力とつりあうべき 2 次せん断応力あるいは 2 次せん断ひずみを考慮していない。

実際には、そり変位による部材軸方向の応力とつり

あうべき 2 次せん断応力の存在により、そり変位は図-13のような曲線分布になる。

拡張 Timoshenko はり理論では、断面内でのそり変位の形を、通常の曲げねじり理論でのそり変位と相似になるものと仮定し、実際の曲線分布との相違は、曲げにおける Timoshenko はり理論の仮定と同様に、そり変位による実際のせん断ひずみとエネルギー的に等価になるような補正係数を導入して修正する。すなわち、Saint-Venant ねじりの単位そり関数 $\omega(x_2, x_3)$ と、部材軸のねじり率とは異なる関数(そり関数の拡大係数) $\psi_1(x_1)$ との積によりそり変位を表す。

これより、部材内の変位は次のように表される。

$$u = -\omega\psi_1, \quad v = -x_3\theta_1, \quad w = x_2\theta_1 \quad (I.1)$$

また、ひずみは次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= -\omega\psi_{1,1} \\ 2\varepsilon_{12} &= -(\omega_{,2} + x_3)\theta_{1,1} - \omega_{,2}(\psi_1 - \theta_{1,1}) \\ 2\varepsilon_{13} &= -(\omega_{,3} - x_2)\theta_{1,1} - \omega_{,3}(\psi_1 - \theta_{1,1}) \\ \varepsilon_{22} &= \varepsilon_{33} = 2\varepsilon_{23} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (I.2)$$

上式中のせん断ひずみ $2\varepsilon_{12}$ と $2\varepsilon_{13}$ の右辺第 1 項は Saint-Venant ねじりに相当するひずみを表し、第 2 項がそり変位による 2 次せん断ひずみを表している。

応力とひずみの関係は次のようにおく。

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}, \quad \sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{13} = 2G\varepsilon_{13} \quad (I.3)$$

これらより、仮想ひずみエネルギーは次式のようになる。

$$\begin{aligned} \delta U &= [(M_1^{\text{st}} - M_1^\omega)\delta\theta_1 + M_\omega\delta\psi_1]_0^\ell \\ &\quad - \int_0^\ell \{ (M_{1,1}^{\text{st}} - M_{1,1}^\omega)\delta\theta_1 \\ &\quad \quad + (M_{\omega,1} - M_1^\omega)\delta\psi_1 \} dx_1 \end{aligned} \quad (I.4)$$

ここに、 M_ω , M_1^{st} , M_1^ω は、それぞれ曲げねじりモーメント、Saint-Venant のねじりモーメント、そり拘束 2 次せん断応力によるねじりモーメントを表し、2 軸対称断面では、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} M_\omega &\equiv -\int_A \sigma_{11}\omega dA = EI_\omega\psi_{1,1} \\ M_1^{\text{st}} &\equiv -\int_A \{ \sigma_{12}(\omega_{,2} + x_3) + \sigma_{13}(\omega_{,3} - x_2) \} dA \\ &= GJ\theta_{1,1} \\ M_1^\omega &\equiv -\int_A (\sigma_{12}\omega_{,2} + \sigma_{13}\omega_{,3}) dA \\ &= k_1 G(I_r - J)(\psi_1 - \theta_{1,1}) \end{aligned} \right\} \quad (I.5)$$

上式の M_1^ω に関する定義式を積分すると、 $k_1 = 1$ とおいた式が得られるが、式中の k_1 は、実際のせん断ひずみによるエネルギーと、ここで仮定したそり変位によるせん断ひずみエネルギーが等価になるように定める補正係数である。

荷重による仮想仕事は、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_0^\ell (m_1\delta\theta_1 + m_\omega\delta\psi_1) dx_1 \\ &\quad + [\bar{n}_1(\bar{M}_1\delta\theta_1 + \bar{M}_\omega\delta\psi_1)]_0^\ell \end{aligned} \quad (I.6)$$

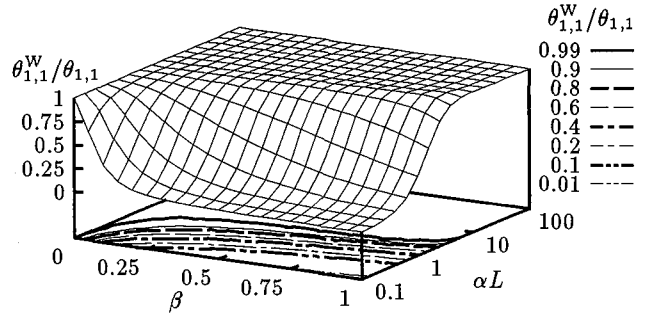


図-14 自由端での解の比較 ($\theta_{1,1}^W / \theta_{1,1}$)

ここに、 m_1 , m_ω は、それぞれ分布ねじりモーメント荷重と分布曲げねじりモーメント荷重、 $\bar{M}_1$, $\bar{M}_\omega$ は端部に作用するねじりモーメント荷重と曲げねじりモーメント荷重であり、次式で与えられる。

$$m_1 = \int_A (-p_2x_3 + p_3x_2) dA, \quad m_\omega = -\int_A p_1\omega dA$$

$$\bar{M}_1 = \int_A (-\bar{P}_2x_3 + \bar{P}_3x_2) dA, \quad \bar{M}_\omega = -\int_A \bar{P}_1\omega dA$$

これらを仮想仕事の原理に適用すると、次のつり合い式が得られる。

$$\delta\theta_1; \quad M_1^{\text{st}} - M_1^\omega + m_1 = 0 \quad (I.7)$$

$$\delta\psi_1; \quad M_{\omega,1} - M_1^\omega + m_\omega = 0 \quad (I.8)$$

また、境界条件式は次式で与えられる。

$$\delta\theta_1; \quad M_1^{\text{st}} - M_1^\omega = \bar{n}_1\bar{M}_1 \quad (I.9)$$

$$\delta\psi_1; \quad M_\omega = \bar{n}_1\bar{M}_\omega \quad (I.10)$$

固定端でねじり角とそり変位が拘束された片持ちはりの自由端に、ねじりモーメント M_1 が作用したときのねじり角 θ_1 とそり変位に関するパラメータ ψ_1 を上述の拡張 Timoshenko はり理論で求めると次のようになる。

$$\theta_1 = \frac{M_1 L}{GJ} \left\{ \xi + (1 - \beta^2) \frac{\sinh[\lambda(1 - \xi)] - \sinh \lambda}{\lambda \cosh \lambda} \right\} \quad (I.11)$$

$$\psi_1 = \frac{M_1}{GJ} \left\{ 1 - \frac{\cosh[\lambda(1 - \xi)]}{\cosh \lambda} \right\} \quad (I.12)$$

ここに、座標 ξ は、固定端に原点があり、自由端で $\xi = 1$ である。また、 β , λ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{GJ}{EI_\omega}, \quad \beta^2 = \frac{1}{1 + \frac{k_1(I_r - J)}{J}} \\ \lambda^2 &= (\alpha L)^2 (1 - \beta^2) \end{aligned} \right\} \quad (I.13)$$

上式中のパラメータ β は、0 ~ 1 の範囲の値をとり、曲げねじりによる 2 次せん断変形を考慮していない曲げねじり理論での解は、 $\beta = 0$ とおいた式になる。また、そのの生じない円形充実断面では、 $\beta = 1$ となる(このとき、 α は無限大になる)。なお、 $\beta = 0$ のときには $\psi_1 = \theta_{1,1}$ となる。

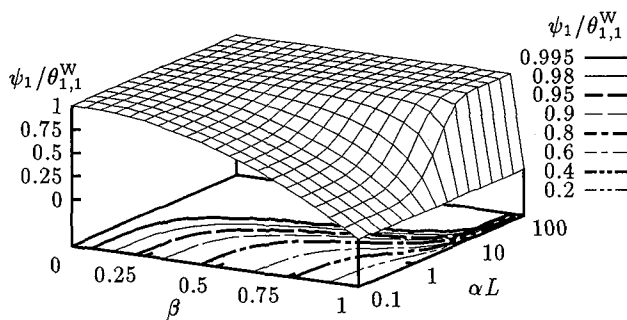


図-15 自由端での解の比較 ($\psi_1/\theta_{1,1}^W$)

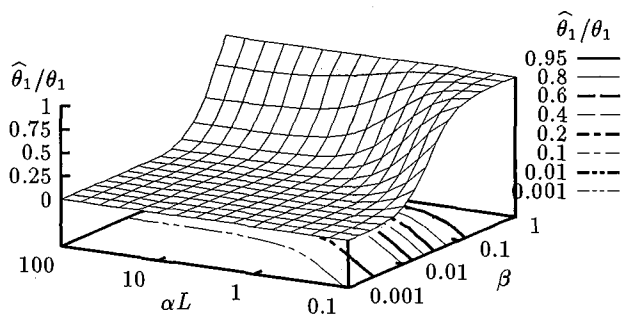


図-16 厳密積分による自由端のねじり角

断面形状と部材長からなるパラメータ αL と β による、両理論による解の違いを示すために、拡張 Timoshenko はり理論によるねじり率 $\theta_{1,1}$ 、パラメータ ψ_1 と曲げねじり理論によるねじり率 $\theta_{1,1}^W$ の比 $\theta_{1,1}^W/\theta_{1,1}$ 、 $\psi_1/\theta_{1,1}^W$ を、それぞれ図-14,15に示す。

この図より、パラメータ β が大きく、 αL が小さい場合には、拡張 Timoshenko はり理論と、通常の曲げねじり理論の違いが顕著に現れるが、 αL が大きい、すなわち細長い部材では、両理論間の違いは少ない。なお、第5章で用いた I 形断面では、 $\alpha = 0.0758$ 、 $\beta = 0.0092$ 、箱型断面では、 $\alpha = 2.67$ 、 $\beta = 0.38$ である。

次に、拡張 Timoshenko はり要素でのロッキングによる精度低下と次数低減積分法の効果を示す。同じ片持ちはりの自由端のねじり角を、本文で用いた2節点拡張 Timoshenko はり要素を1要素用いて求めると次のようになる。

$$\hat{\theta}_1 = \frac{M_1 L}{GJ} \frac{\beta^2(\beta^2 + \lambda^2/3)}{\beta^2(1 + \lambda^2/4) + \lambda^2/12} \quad (\text{厳密積分})$$

$$\hat{\theta}_1 = \frac{M_1 L}{GJ} \frac{\beta^2 + \lambda^2/4}{1 + \lambda^2/4} \quad (\text{低減積分})$$

また、図-16,17に、これらの解と式 (I.11) から求めた自由端での解析解 θ_1 との比を示す。図-16より、剛性行列 (ひずみエネルギー) を厳密に積分すると、パラメータ β が大きく、 αL が小さい場合には、精度の良い解を得るが、 β が小さい場合、あるいは αL が大きい場合には、極端に精度の悪化していることが分かる。また、図-17より、次数低減積分法を用いると、 β が小さく、 αL も小さい場合に精度の悪化が見られるが、全体的には厳密積分による結果より精度の向上していることが分かる。

参考文献

- 1) 林 正・岩崎英治：幾何学的非線形解析における薄肉曲線材の折れ線近似の妥当性，土木学会論文集，第392号，pp.327-334，1988.4.
- 2) 岩崎英治・林 正：立体骨組構造の有限変位解析の精密化，構造工学論文集 (土木学会)，Vol.37A，pp.353-366，1991.4.

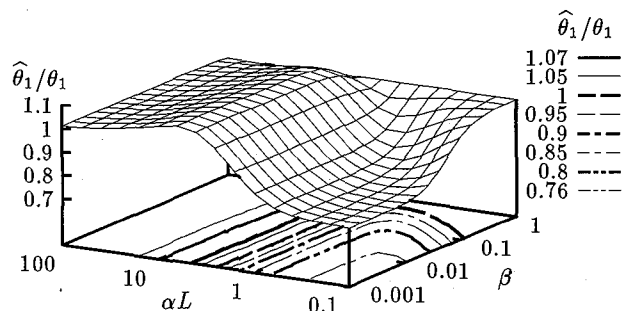


図-17 低減積分による自由端のねじり角

- 3) T.Kawai : Studies on the ultimate strength analysis of a ship structure by means of a new discrete thin-walled beam element (I)，日本造船学会論文集，第150号，pp.381-388，1981.12.
- 4) 池上隆三・窪田浩司・藤谷義信：有効せん断係数を用いた薄肉はりの曲げおよびねじりの有限要素解析，日本鋼構造協会第17回大会研究集会マトリックス解析法研究発表論文集，pp.173-178，1983.7.
- 5) H.Chen and G.Blandford : A C^0 finite element formulation for thin-walled beams, *Int.j.numer.methods eng.*, Vol.28, pp.2239-2255, 1989.
- 6) 深沢泰晴・太田貞次：ティモシェンコ理論の薄肉開断面はりの曲げねじり理論への拡張，構造工学論文集 (土木学会)，Vol.33A，pp.217-228，1987.3.
- 7) 西野文雄・長谷川彰夫・名取悦朗：断面変形とせん断変形を考慮した長方形薄肉はりの理論，土木学会論文報告集，第248号，pp.25-40，1976.4.
- 8) 井浦雅司・平嶋政治：三次元有限回転を伴う Timoshenko はりの幾何学的非線形理論，土木学会論文集，第380号，pp.411-417，1987.4.
- 9) G.Prathap and G.R.Bhashyam : Reduced integration and the shear-flexible beam element, *Int.j.numer.methods eng.*, Vol.18, pp.195-210, 1982.2.
- 10) T.Sakimoto, T.Yamao, R.Kikuchi and T.Sakata : Nonlinear analysis of thin-walled frames and members with arbitrary open cross sections, *Structural Eng./Earthquake Eng.*, Vol.2, No.2, pp.385-393, 1985.10.
- 11) S.P.Timoshenko and J.M.Gere : *THEORY OF ELASTIC STABILITY*, 2nd ed., McGraw-Hill, pp.76-82, 1963.

(1995年9月18日受付)