

RBSMを用いた弾性地盤上の板曲げ要素について

ON A PLATE BENDING ELEMENT ON THE ELASTIC FOUNDATIONS USING RBSM

竹内 則雄

Norio TAKEUCHI

工博 明星大学教授 理工学部土木工学科 (〒191 東京都日野市程久保 2-1-1)

Based on the experimental evidence of solids under the ultimate state of loading, Prof. Kawai proposed a family of new discrete models (Rigid Bodies-Spring Models : RBSM) in 1977. A plate bending element of RBSM is a special case derived from a three dimensional element. The formulation of the plate bending element, including the effects of the shear deformation, is shown first in this paper. In case of this element, effects of the foundations can be easily represented by a spring system obeying the assumed stress-strain relation (elastic or inelastic) which supports the plate continuously. A formulation of a new plate bending element on the elastic foundations is shown in this paper. The applicability of this model to the plate bending problems on the elastic foundations is also discussed by some numerical examples.

Key Words : RBSM, plate bending, limit analysis, elastic foundations

1. はじめに

RBSM[1]の板曲げ要素は、一般的な3次元要素の特別な場合として誘導することができる[2]。この要素には、せん断変形やねじりの影響が考慮されているが、都井[3]はこれらの影響を無視し、要素剛性行列のサイズが (4×4) となる平板要素を誘導している。また、著者[4]はRBSM平板要素のせん断変形のみを無視した要素を提案した。一方、近藤[5]は低次の形状関数と差分近似を利用して実用的な平板要素を提案している。渡辺[6]は、保存則表示を利用して平板要素の定式化を行っているが、この要素は、特殊な条件のもとに3次元のRBSMから誘導した結果と同じになる。

これらの平板要素のうち、RBSMを基礎とする板曲げ要素を用いた弾性解の精度は、ポアソン比の影響を無視した場合においても、若干低い。しかし、これはばね定数の考え方を変えることで改善することができる[7]。

一方、弾性基礎上に置かれた平板の場合、限られた条件のもとに解析的に解を求めている[8]-[10]。また、小林と園田[11]は、Mindlin理論を用いて線形粘弾性基礎上の平板の解析を、倉田ら[12]は差分法を用いて非線形ばね基礎上の平板の解析を試みている。松田と崎山[13]は平板の非線形性まで考慮した解析法を提案している。しかし、崩壊荷重を求める極限解析解は求められていない。

著者らは、地盤を考慮したRBSMの梁要素を提案した[14]。この要素では、弾性地盤上の梁をばね支点を持つ梁のように扱う。RBSMの場合、梁要素も平板要素も取り扱いが同等であるため、この方法を平板要素に適用す

れば、地盤を考慮した平板要素の開発が可能である。

近年、斜面上の置かれたコンクリート法枠をアンカーで固定する工法が多用されるようになってきたが、この場合、時間とともに緊張力が緩むため、地盤や法枠への影響を検討する必要がある。また、最近では、地盤と法枠の間にパッキング材を挿入する工法も開発されているが、これらの力学的な挙動に関する研究はあまり行われていない。RBSMは一般化された離散化解析手法であり、地盤にWinkler型のばねが利用できれば、地盤の塑性やクリープ現象などの非線形現象を取り込んだ、コンクリート平板の耐力を容易に解析できるものと思われる。

このような理由から、本研究では、離散化極限解析を前提とする地盤を考慮した板曲げ要素の開発を行うことを目的として、新しいばね定数の考え方を導入したRBSMの板曲げ要素の定式化を示し、つづいてWinkler型を仮定した地盤ばねを各要素単位に積分することで平板要素に取り込む方法を提案する。

最後に、簡単な数値計算例を用いて、本要素モデルにより得られる解の特性についても言及する。

2. RBSMの面外変形平板要素の定式化

面外荷重が作用する平板要素の剛体変位場は、図1に示すように、 z 軸方向のたわみ(w)と x 軸、 y 軸回りの剛体回転角(θ, ϕ)によって表すことができる。ここで、便宜上全体座標系($x-y-z$)の z 軸を要素境界面に沿った局所座標系($s-t-n$)の t 軸と一致させ、 z 軸ならびに t 軸の原点を図1に示すように板厚方向の中心に設けるものとする。

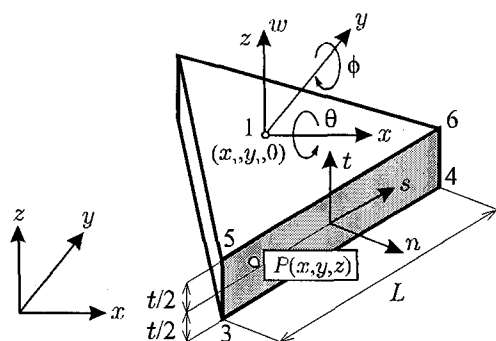


图1 面外变形平面要素

このとき、要素内の任意点 $P(x,y,z)$ における x,y,z 方向の移動量 (U,V,W) は、点1の剛体変位ならびに剛体回転角を用いて次のように表すことができる。

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & z \\ 0 & -z & 0 \\ 1 & (y-y_1) & -(x-x_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで, (x_1, y_1) は自由度設定位置の座標値を表す.

RBSMでは、隣接する要素間の相対変位を利用し、要素境界辺上に設けられたばねに蓄えられるエネルギーを用いて剛性行列を誘導する。平板要素に対してもこの考え方を適用し、相対変位を計算するため、式(1)における (U, V, W) を要素境界辺に沿った局所座標系 $(s-t-n)$ の成分 $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$ に変換する。いま、図1に示した座標系に従えば、局所座標系と全体座標系の変位ベクトルには次の関係が成立する。

$$\begin{Bmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \\ \bar{W} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ m & -l & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} \quad (2)$$

ここで, l, m は方向余弦であり, 次の関係にある.

$$l = \frac{x_{43}}{L}, \quad m = \frac{y_{43}}{L}, \quad L = \sqrt{x_{43}^2 + y_{43}^2}$$

ただし, x_{ij}, y_{ij} の下付き添字 ij は次のような意味を持つ.

$$x_{ij} = x_i - x_j \quad , \quad y_{ij} = y_i - y_j \quad .$$

いま，要素境界辺 $\overline{43}$ の中点を代表点として相対変位を求めるものとすれば式 (1), (2) より次の関係が得られる.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \overline{U} \\ \overline{V} \\ \overline{W} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -mz & lz \\ 1 & \Delta_{12} & -\Delta_{11} \\ 0 & lz & mz \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} (-m\theta + l\phi)z \\ w + \Delta_{12}\theta - \Delta_{11}\phi \\ (l\theta + m\phi)z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{ns} \\ \overline{w} \\ \theta_n \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

ただし, Δ_{11}, Δ_{12} は次の関係にある.

$$2\Delta_{11} = x_{41} + x_{31} \quad , \quad 2\Delta_{12} = y_{41} + y_{31}$$

ここで、図2に示すよう、 θ_{ns} は要素境界边上の midpoint に

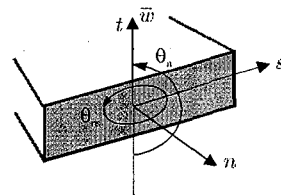


図2 要素境界面上の変位

おける局所座標 n 軸回りの回転角であり， θ_n は s 軸回りの回転角，すなわち，曲げに関する回転角となっており， $\overline{w}$ は要素境界辺上の中点におけるたわみを表している．

図1の点1における自由度とこれら要素境界边上の中点における変位との間には次の関係がある。

$$\begin{Bmatrix} \theta_{ms} \\ w \\ \theta_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -m & l \\ 1 & \Delta_{12} & -\Delta_{11} \\ 0 & l & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix} \quad (4)$$

式(3)は1つの要素に対する座標変換後の面外平面要素の剛体変位場を示したものである。この関係を用いれば、図3に示すような隣接する2要素の要素境界辺上の中点における移動量は、次のように表すことができる。

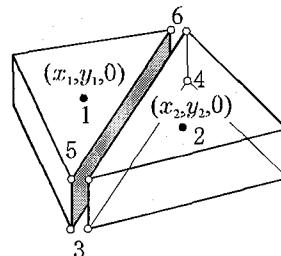


図3 隣接する2要素の自由度設定位置

$$\bar{U} = Z \cdot \theta = Z \cdot Q \cdot u \quad (5)$$

$$\bar{U} = (\bar{U}_1, \bar{V}_1, \bar{W}_1; \bar{U}_2, \bar{V}_2, \bar{W}_2)^t, \quad u = (w_1, \theta_1, \phi_1; w_2, \theta_2, \phi_2)^t$$

$$\theta = (\theta_{ns1}, \bar{w}_1, \theta_{n1}; \theta_{ns2}, \bar{w}_2, \theta_{n2})^t$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -m & l & 0 & -m & l \\ 1 & \Delta_{12} & -\Delta_{11} & 1 & \Delta_{22} & -\Delta_{21} \\ 0 & l & m & 0 & l & m \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$$

$$2\Delta_{21} = x_{42} + x_{32}, \quad 2\Delta_{22} = y_{42} + y_{32}$$

式(5)のように変換された変位 $\bar{U}$ を用いれば, 2要素間の相対変位は次のように計算することができる.

$$\delta = M \cdot \bar{U} \quad (6)$$

$$\delta = (\delta_s, \delta_t, \delta_n)^t, \quad M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ここで, $(\delta_s, \delta_t, \delta_n)$ は, それぞれ, 要素境界面上の局所座標軸 s, t, n に沿った相対変位成分を表している.

以上の関係を用いれば、要素境界边上の midpoint における相対変位は、各要素の剛体変位ならびに剛体回転角を用いて次のように求めることができる。

$$\delta = Z \cdot \delta \theta = Z \cdot M \cdot Q \cdot u = Z \cdot B \cdot u \quad (7)$$

$$\delta \theta = M \cdot \theta = (\delta \theta_{ns}, \delta \bar{w}, \delta \theta_n)^t$$

$$B = M \cdot Q = \begin{bmatrix} 0 & m & -l & 0 & -m & l \\ -1 & -\Delta_{12} & \Delta_{11} & 1 & \Delta_{22} & -\Delta_{21} \\ 0 & -l & -m & 0 & l & m \end{bmatrix}$$

ここで、 $\delta \theta_{ns}$ はねじりに関する相対回転角、 $\delta \theta_n$ は曲げに関する相対回転角、 $\delta \bar{w}$ は相対たわみに該当する。

一方、面内変形平面問題の場合と同様、相対変位(δ)と単位面積当たりの表面力(σ)の間には次の関係が成立するものと仮定する。

$$\sigma = D \cdot \delta \quad (8)$$

$$\sigma = (\tau_s, \tau_t, \sigma_n)^t, \quad D = \begin{bmatrix} k_s & 0 & 0 \\ 0 & k_s & 0 \\ 0 & 0 & k_n \end{bmatrix}$$

ここで、 $(\tau_s, \tau_t, \sigma_n)$ は、単位面積当たりの表面力で、それぞれ、局所座標系における s 軸、 t 軸方向のせん断力、 n 軸方向の軸力に対応する。また、 D は、ばね行列であり、 k_s はせん断に抵抗するばね、 k_n は n 軸方向の軸力に抵抗するばねを表している。

これらのばね定数は、実験などを参考にして求めることもできるが、ここでは、従来のRBSMと同様、平面応力状態を想定し、便宜上、次のように仮定した。

$$k_s = \frac{E}{(1+\nu)h}, \quad k_n = \frac{E}{(1-\nu^2)h} \quad (9)$$

ただし、 h は図4に示すように、各要素の自由度設定位置から要素境界面に下した垂線の高さを表すものとする。

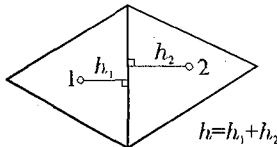


図4 垂線の定義

以上から、変形後に2要素間の分布ばね系に蓄えられるエネルギーを求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_A (\delta^t \cdot D \cdot \delta) dA \\ &= \frac{1}{2} u^t \cdot B^t \int_A (Z^t \cdot D \cdot Z) dA \cdot B \cdot u \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 A は隣接要素との接触面を意味している。いま、

$$\bar{D} = \int_A (Z^t \cdot D \cdot Z) dA$$

$$= \int_A \begin{bmatrix} \frac{EZ^2}{(1+\nu)h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{(1+\nu)h} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EZ^2}{(1-\nu^2)h} \end{bmatrix} dA = L \begin{bmatrix} \frac{Et^3}{12(1+\nu)h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Et}{(1+\nu)h} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)h} \end{bmatrix}$$

とすれば、式(10)は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} u^t \cdot B^t \cdot \bar{D} \cdot B \cdot u = \frac{1}{2} u^t \cdot K \cdot u \\ &\quad (K = B^t \cdot \bar{D} \cdot B) \end{aligned} \quad (11)$$

したがって、Castiglianoの定理から、一つの接触面に対する要素剛性行列が以下のように求められる。

$$F = \frac{\partial V}{\partial \delta} = K \cdot u \quad (12)$$

ここで、 F は外力であり、

$$F = (Q_1, L_1, M_1; Q_2, L_2, M_2)^t$$

Q_i がせん断力、 L_i が x 軸回りのモーメント、 M_i が y 軸回りのモーメントを表している。

3. 地盤ばねの導入

一般に弾性地盤上に置かれた平板では、要素のたわみがあると、そのたわみに抵抗するばねが分布しているため反力が生ずる。したがって、要素のたわみに関する4階の微分方程式にもこれに関係する項が追加され、要素剛性行列は関数を含む複雑なものとなる。

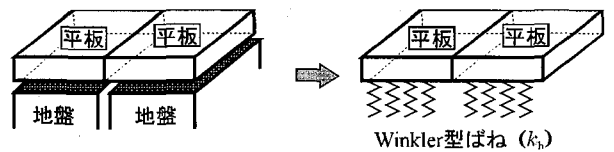


図5 地盤ばねの考え方

そこで、本研究では、図5に示すようなWinkler型のばねを仮定し、近似的に地盤反力を考慮することにした。

図中、 k_n は地盤反力係数を表している。

いま、図3に示す要素1に着目し、平板の任意点における沈下(W)を求めてみると、式(1)より次のようになる。

$$W = \bar{Q}_1 \cdot u_1 \quad (13)$$

$$\bar{Q}_1 = (1, (y-y_1), -(x-x_1)) \quad u_1 = (w_1, \theta_1, \phi_1)^t$$

このとき、地盤ばねに蓄えられるエネルギーは以下のよう求められる。

$$V_{R1} = \frac{1}{2} \int_A (u_1^t \cdot \bar{Q}_1^t \cdot k_n \cdot \bar{Q}_1 \cdot u_1) d\bar{A} \quad (14)$$

ここで、 $\bar{A}$ は地盤と平板の接触面積である。この積分を実行すると、式(14)は次のように表すことができる。

$$V_{R1} = \frac{1}{2} u_1^t \cdot \bar{k}_{n1} \cdot u_1 \quad (15)$$

$$\bar{k}_{n1} = \int_A (\bar{Q}_1^t \cdot k_n \cdot \bar{Q}_1) d\bar{A} = k_n \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & G_{x1} & -G_{y1} \\ I_{x1} & I_{xx1} & -I_{xy1} \\ sym. & & I_{y1} \end{bmatrix}$$

$$I_{x1} = \int_A (y-y_1)^2 d\bar{A} \quad I_{y1} = \int_A (x-x_1)^2 d\bar{A}$$

$$I_{xy1} = \int_A (x-x_1)(y-y_1) d\bar{A}$$

$$G_{x1} = \int_{\bar{A}} (y - y_1) d\bar{A} \quad G_{y1} = \int_{\bar{A}} (x - x_1) d\bar{A}$$

もし、平板要素の自由度設定位置が要素図心であれば、式(15)における $\bar{k}_{h1}$ の非対角項は0となる。また、この式には、平板の回転に伴う沈下も考慮されており、地盤反力分布は線形を仮定したことになる。

式(15)をすべての要素について計算し、加え合わせれば、沈下に伴う地盤ばね全体に蓄えられるエネルギーは以下ようになる。

$$V_R = \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \cdot \bar{\mathbf{k}}_h \cdot \mathbf{u} \quad (16)$$

したがって、構造物に作用する荷重として地盤反力を求めると次のようになる。

$$\mathbf{R} = -\frac{\partial V_R}{\partial \mathbf{u}} = -\bar{\mathbf{k}}_h \cdot \mathbf{u} \quad (17)$$

これを式(12)に考慮すれば、弾性地盤上に置かれた平板の解くべき方程式が以下のように求められる。

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} \quad (18)$$

式(18)に式(17)の関係を代入することにより、最終的に以下の方程式を解けばよいことになる。

$$\mathbf{F} = (\mathbf{K} + \bar{\mathbf{k}}_h) \mathbf{u} \quad (19)$$

以上のようなモデル化では、地盤を単純なばねで置換しているため、地盤の非線形性を容易に考慮することができる。ただし、本論文では、要素モデルの開発を目的としているため、地盤については弾性を仮定し、平板のみの材料非線形性を考慮することにする。

4. 平板の非線形問題の解析法

2節で定式化したRBSMの板曲げ要素では、要素境界边上における曲げモーメント(M_n)、ねじりモーメント(M_J)、せん断力(Q)を取り扱うため、破壊規準もこれらの物理量を用いて表す必要がある。ここでは、破壊規準そのものに関する詳細な議論は行わず、式(20)に示すような破壊規準が与えられたと仮定して、非線形問題の解析法を中心に述べる。

$$f(M) = \left(\frac{M_J}{M_{PJ}} \right)^2 + \left(\frac{Q}{Q_y} \right)^2 + \left(\frac{M_n}{M_{Pn}} \right)^2 - 1 \quad (20)$$

M_{PJ} : 全塑性ねじりモーメント

Q_y : 全塑性せん断力

M_{Pn} : 全塑性曲げモーメント

RBSMの平板要素ではねじりモーメント、せん断力、曲げモーメントの3種類の表面力を用いる。いま、降伏関数 $f(M)$ と塑性ポテンシャル $Q(M)$ を等しいとする関連流れ則に従えば、増分表面力の関係式を次のように表すことができる。

$$\Delta \mathbf{M} = \left(\mathbf{K}^e - \frac{\mathbf{K}^e \frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}} \mathbf{K}^e}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}} \mathbf{K}^e \frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}}} \right) \Delta \mathbf{u} \quad (21)$$

ここで、 $\mathbf{K}^e$ は式(8)で表される弾性のばね行列 $\bar{\mathbf{D}}$ である。

式(20)から、塑性化後の剛性行列の成分 $K_{ij}^{(p)}$ は次のように表すことができる。

$$K_{ij}^{(p)} = K_{ij}^{(e)} \delta_{ij} - \frac{1}{K_i^{(e)} \bar{f}_i^2} \bar{f}_i \bar{f}_j K_i^{(e)} K_j^{(e)} \quad (22)$$

ここで、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタ、 $\bar{f}_i = \partial f / \partial M_i$ であり、 $M_i = (M_J, Q, M_n)$ である。また $K_i^{(e)}$ は弾性時におけるばね行列の対角成分を表している。具体的な塑性化後の $\mathbf{K}^{(p)}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} K_{11}^{(p)} &= k_J - \frac{1}{F} \left(k_J \frac{M_J}{M_{PJ}^2} \right)^2, \quad K_{22}^{(p)} = k_G - \frac{1}{F} \left(k_G \frac{Q}{Q_y^2} \right)^2 \\ K_{33}^{(p)} &= k_M - \frac{1}{F} \left(k_M \frac{M_n}{M_{Pn}^2} \right)^2, \quad K_{12}^{(p)} = -\frac{1}{F} \left(k_J k_G \frac{M_J Q}{M_{PJ}^2 Q_y^2} \right) \\ K_{13}^{(p)} &= -\frac{1}{F} \left(k_J k_M \frac{M_J M_n}{M_{PJ}^2 M_{Pn}^2} \right), \quad K_{23}^{(p)} = -\frac{1}{F} \left(k_G k_M \frac{Q M_n}{Q_y^2 M_{Pn}^2} \right) \\ F &= \left(k_J \frac{M_J^2}{M_{PJ}^4} + k_G \frac{Q^2}{Q_y^4} + k_M \frac{M_n^2}{M_{Pn}^4} \right) \end{aligned}$$

$$k_J = \frac{Et^3 L}{12(1+\nu)h}, \quad k_G = \frac{EtL}{(1+\nu)h}, \quad k_M = \frac{Et^3 L}{12(1-\nu^2)h}$$

なお、除荷については塑性仕事から求めるべきであるが、ここでは、便宜上、次式を用いて判定する。

$$\lambda < 0 \quad (23)$$

$$\lambda = \frac{\mathbf{K}^e \frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}} \mathbf{K}^e \frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}}} \Delta \mathbf{u}$$

非線形解析法としては、 $r_{\min}$ 法による荷重増分法を用いる[15]。 $r_{\min}$ 法では、荷重増分ステップが変わる毎に、剛性を変化させるため、計算時間はかかるが、1本つっぱねを降伏させるため、破壊の進展を追跡することができる。また、完全弾塑性体、もしくは応力-ひずみ曲線が折れ線で近似できる場合、精度の高い崩壊荷重を計算することができる。

$r_{\min}$ 法による荷重増分量は、増分量を ΔM として

$$f(M + r \cdot \Delta M) = 0 \quad (24)$$

なる r を求めることによって決定することができる。具体的には、破壊条件が式(20)のように表される場合、次の r に関する2次方程式を解けばよい。

$$Ar^2 + Br + C = 0 \quad (25)$$

$$A = \left(\frac{\Delta M_J}{M_{PJ}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta Q}{Q_y} \right)^2 + \left(\frac{\Delta M_n}{M_{Pn}} \right)^2$$

$$B = 2 \left(\frac{M_J \Delta M_J}{M_{PJ}^2} + \frac{Q \Delta Q}{Q_y^2} + \frac{M_n \Delta M_n}{M_{Pn}^2} \right)$$

$$C = \left(\frac{M_J}{M_{PJ}} \right)^2 + \left(\frac{Q}{Q_y} \right)^2 + \left(\frac{M_n}{M_{Pn}} \right)^2 - 1$$

$r_{\min}$ 法は、このような荷重増分率を降伏していないすべてのばねについて計算し、それらのうち、最小の r を今回の荷重増分とする方法である。

一旦、降伏したばねは、除荷が発生するまで、式(22)で示した塑性化後のばね行列を用い、降伏曲面の上を移動するものとする。

5. 数値計算例

本要素モデルによって得られる解の特性を検討するため、図6に示す簡単なモデルを設定した。荷重条件は、板全体に等分布荷重が作用する場合と、図中、黒く網掛けした部分にのみ等分布荷重が作用する場合の2通りを取り上げた。後者のような荷重条件を考えたのは、RBSMでは集中荷重の取り扱いが困難なため、近似的に集中荷重を表現するためである。以後、この荷重状態を部分荷重状態と呼ぶことにする。

使用した基本材料定数を図中に示す。本解析では、最終的に離散化極限解析を前提とするため、ポアソン比の影響は無視している。また、平板の破壊規準は式(20)において、全塑性曲げモーメントのみを考慮した。

境界条件は周辺単純支持で、解析領域は対称性を考慮して全体の1/4とした。

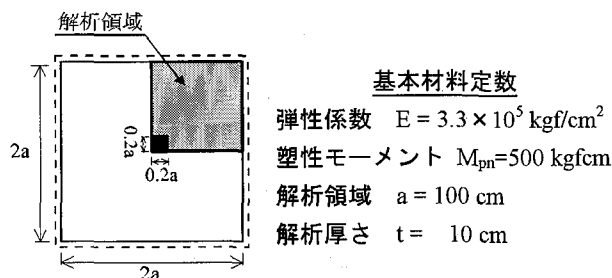


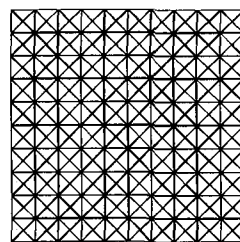
図6 解析モデルと基本材料定数

5.1 地盤を無視した平板要素の弾性解の精度

はじめに、要素分割による影響を検討するため、図7に示すように、正方形をクロス分割した要素の集合として平板全体の要素分割を行った。図7は、縦横10分割の例である。

誤差(ϵ)は解析解を ϕ_{exact} 、RBSMによる解を ϕ として以下の式より計算した。

$$\epsilon = \frac{\|\phi_{\text{exact}} - \phi\|}{\|\phi_{\text{exact}}\|} \quad (26)$$



分割数：10

図7 要素分割例

図8は、荷重条件として平板全体に等分布荷重が作用した状態を仮定し、要素分割数に対するたわみ、曲げモーメント、せん断力の誤差をプロットしたものである。せん断力の収束状況が他の2つより悪いものの、10分割程度すれば、すべての誤差が1%以内に収まっている。以後の計算は特に断らない限り10分割した要素分割を用いて行った。

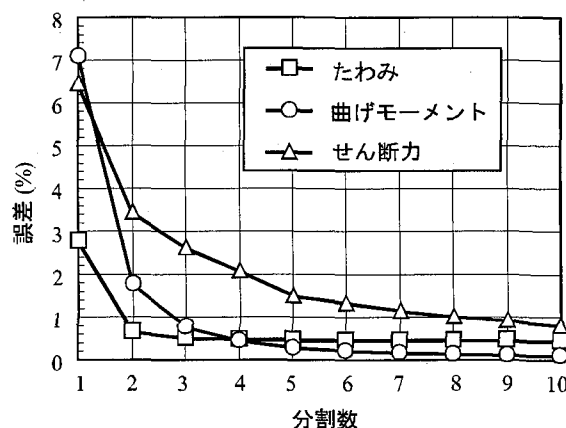


図8 等分布荷重が作用した場合の誤差

図9は等分布荷重が作用した場合のたわみ、曲げモーメント、せん断力分布を解析解[16]と比較した図である。実線が解析解を、白抜き丸がRBSMによる解を表している。また、図中の()内の数字は誤差(%)で示した値である。図10は部分荷重が作用した場合の同様な図である。せん断力の誤差が他に比較してやや大きい、両者とも良好な結果が得られているものと思われる。

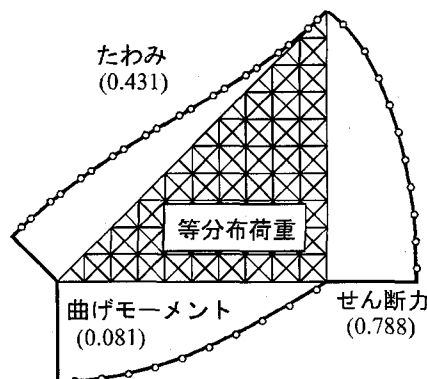


図9 解析解との比較(等分布荷重)

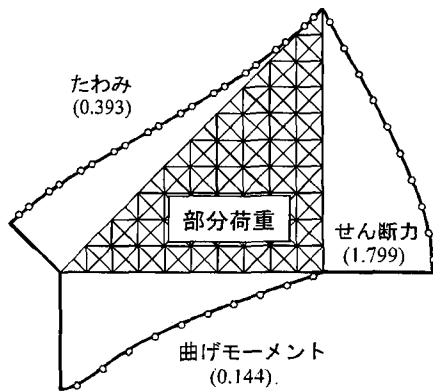


図10 解析解との比較（部分荷重）

5.2 地盤を無視した平板の離散化極限解析

次に、極限解析解[17]と比較するため、RBSMによる離散化極限解析を行った。解析モデルと材料定数定数は図6に示す値を用いた。

図11には、等分布荷重が作用した場合の無次元化された荷重－変位曲線と極限解析解の値が示されている。ここで、 p は分布荷重の値、 w はたわみ、 D は以下に示す平板の曲げ剛性を表している。

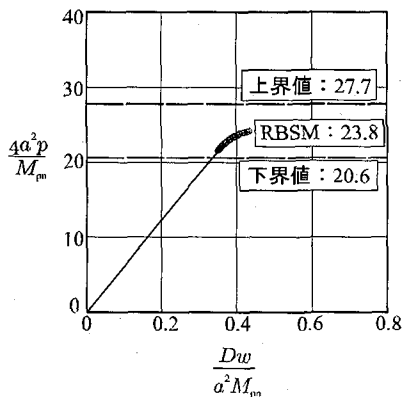


図11 荷重－変位曲線（分布荷重）

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (27)$$

ただし、本論文で示したRBSMの定式化では要素図心に自由度を設けているため、平板の中心のたわみを求めることができない。そこで、便宜上、図12に示すように平板中心に一番近い要素（ここでは境界用の要素）の図心点におけるたわみを用いた。図11によれば、RBSMによる耐力は極限解析解における上界値と下界値の間の値となっている。

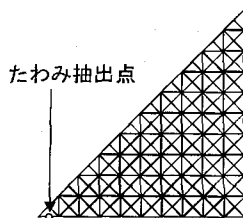


図12 たわみ抽出点

このときの曲げ破壊による塑性ヒンジ線を図13に示す。この破壊モードは極限解析において仮定された破壊モードと一致している。

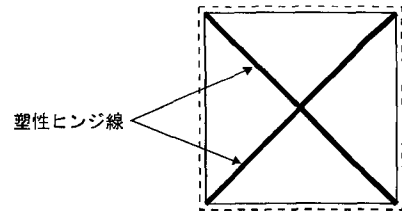


図13 塑性ヒンジ線（分布荷重）

一方、部分荷重が作用した場合の荷重－変位曲線を図14に示す。ただし、図中の記号は図11と同じ意味を持つ。RBSMによる離散化極限解析解は、等分布荷重の場合と同様、極限解析解[16]の上界値と下界値の中間程度の値となる。図15はこのときの塑性ヒンジ線を示したものである。主たるヒンジ線は分布荷重の場合と同位置に発生するが、それ以外に中心部から広がる短いヒンジ線も発生している。

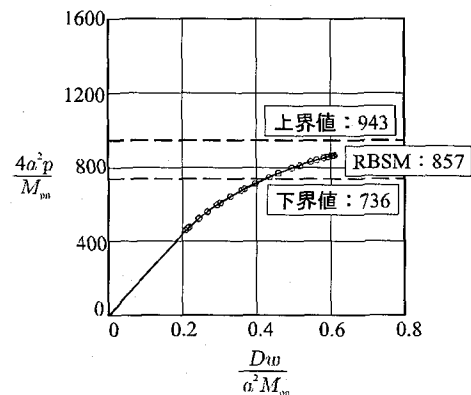


図14 荷重－変位曲線（部分荷重）

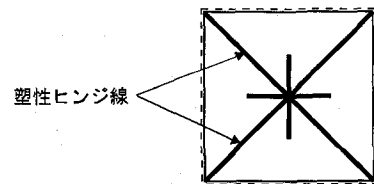


図15 塑性ヒンジ線（部分荷重）

5.3 弾性地盤を考慮した解析

はじめに、本論文で提案した弾性地盤上の板曲げ要素の収束性を検討するため、図6に示した解析モデルを用い、5.1節で行った方法と同様な方法により要素分割を細分化して式(26)より弾性解[9]との誤差を求めた。図16は地盤反力係数 k_n を 10kgf/cm^3 とした場合のたわみ、曲げモーメント、せん断力の誤差を分割数に応じてプロットした図である。地盤を無視した場合と同様、せん断力の収束性は他の2つより悪いものの、10分割程度すれば、どの誤差も1%以内に収まる。なを、地盤反力係数は、たわみ等の絶対量が小さくならないよう実際より小さい値を用いた。

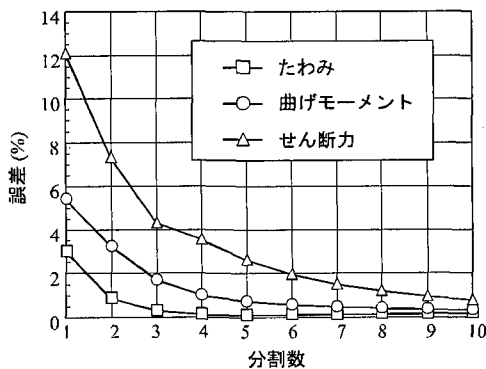


図16 等分布荷重が作用した場合の誤差 ($k_h=10\text{kgf/cm}^3$)

図17は要素分割を10分割し、等分布荷重を作用させた場合のたわみ、曲げモーメント、せん断力に関するRBSMの解と解析解[9]を比較した図である。図中、実線が解析解、白抜きの丸がRBSMによる解を表しており、()内の値は解析解との誤差を(%)で示している。図18は部分荷重が作用した場合の同様な図である。せん断力の精度が若干劣るが、比較した解析解も収束性が悪いので、200項まで考慮して計算を打ち切っており、若干精度が低い。

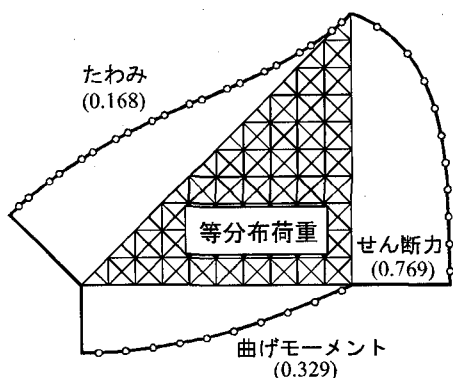


図17 解析解との比較：等分布荷重 ($k_h=10\text{kgf/cm}^3$)

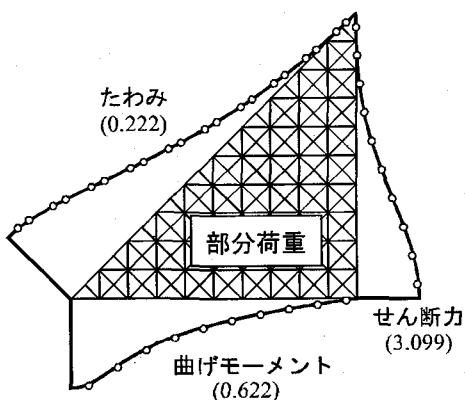


図18 解析解との比較：部分荷重 ($k_h=10\text{kgf/cm}^3$)

図19は要素分割数を10として、等分布荷重を作用させ、地盤反力係数を変えた場合のたわみ、曲げモーメント、せん断力の誤差をプロットした図である。せん断力の誤差が多少大きいものの、全体的には、地盤反力係数にあまり影響を受けない。

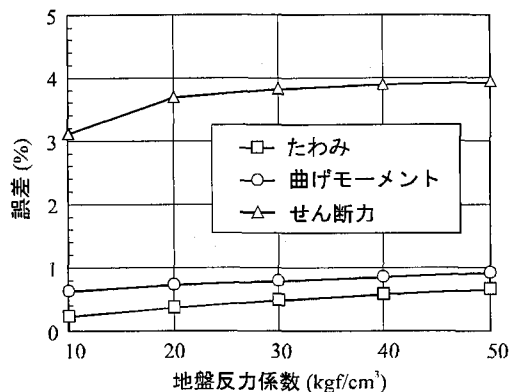


図19 地盤反力係数の相違による誤差 (等分布荷重)

一方、図20は部分荷重が作用した場合の同様な結果を示したものである。せん断力の誤差が大きいのは、解析解の収束性の問題もあると思われるが、分布荷重と同様、地盤反力係数にはあまり左右されない。

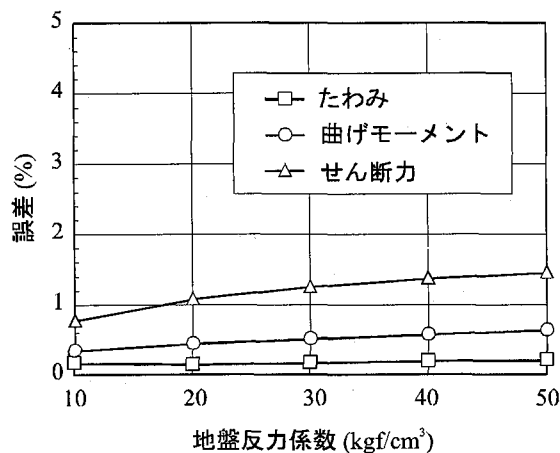


図20 地盤反力係数の相違による誤差 (部分荷重)

最後に、平板の非線形性を考慮した場合の塑性ヒンジ線の進展状況を示す。図21は等分布荷重が作用した場合の結果が示されている。

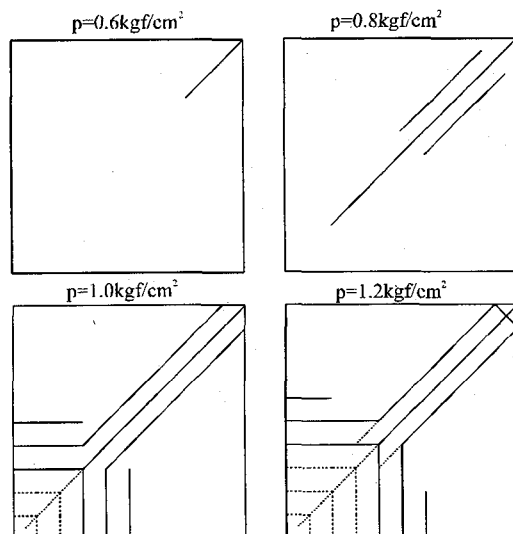


図21 弾性地盤上の平板の塑性ヒンジ (等分布荷重)

実線が塑性ヒンジ線、点線が除荷状態を示している。分布荷重の場合、周辺から中央に向かって塑性ヒンジが発生するが、これは、弾性基礎を無視した場合と同様な傾向である。ただし、図13に示した結果とは異なり、ヒンジ線が分散する傾向にある。この結果では、地盤が弾性であるため、崩壊メカニズムを形成することはない、したがって耐力も求められないが、破壊進展の状況から推測すると、地盤の塑性を考慮したとしても耐力はかなり大きくなることが予想できる。

図22には部分荷重が作用した場合の結果が示されている。等分布荷重と異なり、中央から塑性ヒンジ線が発達する。この場合も、ヒンジ線は弾性地盤を無視した場合より分散する傾向にある。

6. むすび

ばね定数を修正したRBSMの板曲げ要素を用いて解析を行った結果、次のことが明らかになった。

- 1) RBSMの板曲げ要素を離散化極限解析用のモデルと位置づけ、ポアソン比の影響を無視すれば、たわみ、曲げモーメント、せん断力とも弾性解はほぼ解析解と一致する。
- 2) もし、要素分割に正しい塑性ヒンジ線が含まれていれば、RBSMによる離散化極限解析解は理論的な極限解析解における上界値、下界値の間の値を示すものと思われる。

次に、このRBSMの平板要素にWinkler型のばねを導入し、弾性地盤上の板曲げ要素を開発した。この方法は、取り扱いが容易であり、計算時間にもあまり影響しない。弾性解析を行い、解析解と比較検討した結果、このような単純な方法によっても、ある程度要素分割を細分化すれば十分な精度の解を得られることが明らかとなった。

本論文では、地盤を弾性と仮定したため、地盤上の平板の耐力を求めることができなかったが、地盤ばねの応力-ひずみ関係に非線形性を考慮すれば、弾性から崩壊に至るまでの連続的な解析が可能になるものと思われる。

本研究を進めるにあたり、川井忠彦先生（東京理科大学教授）からは、貴重なご意見をいただいた。ここに記して感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 川井忠彦：離散化極限解析法概論，培風館，1991。
- 2) 竹内則雄：地盤力学における離散化極限解析，培風館，1991。
- 3) 都井裕：鋼構造の離散化極限解析，培風館，1990
- 4) 竹内則雄：東京大学提出学位論文，1981。
- 5) 近藤一夫他：低次の形状関数を用いた新しい板曲げ要素，日本造船学会論文集，No. 143, pp259-265, 1978。

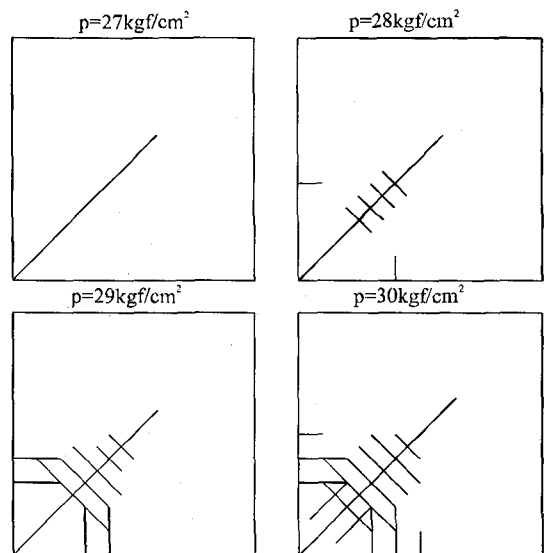


図22 弾性地盤上の平板の塑性ヒンジ（部分荷重）

- 6) 渡辺正明，川井忠彦：保存則モデルによる板曲げの塑性解析，土木学会第34回年次学術講演会講演概要集(I)，pp77-78, 1979。
- 7) 竹内則雄：RBSM板曲げ要素を用いた離散化極限解析，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，Vol. 19, pp125-130, 1995。
- 8) Timoshienko, S. and Woinowsky-Krieger, S. : Theory of Plates and Shells, McGRAW-HILL, 1959。
- 9) 原口忠次郎：弾性基礎上の矩形板，山海堂，1964。
- 10) 能町純雄：弾性基礎にある四辺，四隅自由な矩形板の曲げについて，土木学会論文報告集，No.32, pp26-32, 1956
- 11) Kobayashi, H. and Sonoda, K. : Rectangular thick plates on linear viscoelastic foundations, Proc. of JSCE, No.341, pp33-40, 1984。
- 12) 倉田宗章他：非線形ばね基礎上の周辺自由な平板の数値解析，土木学会論文報告集，No.208, pp13-21, 1972。
- 13) 松田浩，崎山毅：非線形弾性地盤上の矩形板の非弾性曲げの一解析法，構造工学論文集，Vol.34A, pp79-86, 1988。
- 14) 竹内則雄他：新しい梁要素による地盤を考慮した骨組構造物の極限解析，土木学会第27回構造工学シンポジウム論文集，pp189-198, 1981。
- 15) Yamada, Y. et al. : Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elasto-plastic problems by a finite element method, Int. J. of Mechanical Science, Vol.10, pp343-354, 1968。
- 16) 土木学会編：構造力学公式集，土木学会，1974。
- 17) 田中尚：構造物の極限解析，彰国社，1966。

(1995年9月18日受付)