

ランダム粒子-バネ系モデルによる セメント系複合材料の準微視的破壊過程の解析

SIMULATING MESOSCOPIC FRACTURE PROCESSES IN CEMENT-BASED COMPOSITES
USING RANDOM PARTICLE-SPRING SYSTEMS

劉 玉 擎*, 彦 坂 熙**, John BOLANDER Jr. ***, 齊 藤 成 彦****
Yuqing LIU, Hiroshi HIKOSAKA, John BOLANDER Jr. and Shigehiko SAITO

* 工修 九州大学大学院土木工学専攻博士課程 (〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1)

** 工博 九州大学教授 工学部建設都市工学科 (同上)

*** Ph.D Assistant Professor, Dept. of Civil Eng., Univ. of California, Davis, U.S.A.

**** 九州大学大学院土木工学専攻修士課程 (〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1)

A rigid particle-spring model is used to simulate mesoscopic fracture processes in cement-based composites. Composite material is represented using a three component model: cement matrix, aggregate inclusions and matrix-inclusion interfaces. Material continua are discretized using a large number of Voronoi polygons, each polygon being a rigid element with two translational and one rotational degrees of freedom. Special attention is given to creating the aggregate inclusions as part of the polygonal mesh. The rigid elements are interconnected by two sets of springs distributed over the polygon boundaries: one set acts normal to the boundaries and the other acts parallel to the boundaries. Spring properties are set according to the component type which they represent and reflect the overall properties of the continuum. Numerical results are given for a fracture test of concrete CT specimens.

Key Words: mesoscopic failure, rigid body-spring model, Voronoi diagram

1. 序論

コンクリートに代表されるセメント系複合材料は、ランダムに配置された骨材をセメントペーストで化学的に結合した非均質な多相材料であり、極めて小さい応力レベルで初期欠陥や粗骨材界面の微細ひびわれによる非線形性を呈する特徴がある。近年、セメント系複合材料を対象とした破壊力学の研究が精力的に行われているが、破壊進行領域のモデル化や破壊力学パラメータの設定には、材料の破壊と内部組織変化過程の関連性の解明が不可欠であると考えられる^{1) 2) 3)}。

コンピュータの著しい性能向上に伴い、メソスコピック・スケールでの材料の構造・性質の制御と評価技術の研究が超伝導材料、半導体材料および複合材料などの多くの先端領域で行われており、材料開発に新しい展望を与えている。これは、メソスコピック領域と呼ばれるミクロとマクロの中間領域の構造を最適化することにより、材料の特性を十分に発揮させ得ることが知られてきたことによる⁴⁾。セメント系複合材料に関しても、その内部破壊メカニズムと巨視的な力学挙動との対応を明らかに

するためには、材料を粗骨材とモルタルマトリックスの複合材として扱うメソスケールでの研究が有用であり⁵⁾、メソスコピック領域の特性計測技術の開発⁶⁾とともに、骨材粒子レベルでの準微視的シミュレーション手法の開発が望まれている。

本研究では、セメント系複合材料のメソスケールでの組織変化過程のシミュレーションや新しい複合材料開発への利用を目的として、ランダム粒子-バネ系モデルによる準微視的破壊過程の解析手法を提案する。すなわち、まず、ボロノイ図に基づく複合材の要素分割システムを述べ、次いで、骨材粒子の粒度およびランダムな配置を考慮した複合材料の離散化モデルの数値解析法を提示する。計算例として、コンクリートCT供試体の引張破壊試験をシミュレートし、界面はく離、ひびわれ進展、変形の局所化などの内部破壊現象を観察するとともに、破壊過程に及ぼす骨材粒径の影響を考察する。

2. ランダム粒子とボロノイ分割要素による セメント系複合材料の離散化モデル

粗骨材を含むセメント系複合材料について、骨材の寸法、粒度および分布のランダム性を考慮した力学挙動のシミュレーションを行うために、まずランダム骨材粒子の生成と配置を行う。3次元空間における材料供試体の形状と寸法を指定したのち、骨材粒子を完全な球で表し、球の中心座標 (x, y, z) を疑似乱数（初期値を1とする）により与えて、粒子を一個ずつ配置する。骨材の粒度分布に従って骨材量の粒径別目標値を定め、粒径の大きな骨材から始めて、その骨材量が目標値に達すると、順次粒径の小さな骨材を配置する。このとき、隣接する粒子の中心間隔 d は常に次式を満たすようにする。

$$d \geq \gamma \frac{d_1 + d_2}{2} \quad (1)$$

ここに、 d_1, d_2 は隣接する骨材粒子の直径を表し、本研究では文献7) に基づき $\gamma=1.1$ とした。

図-1 は直径10cmのコンクリート円柱供試体について、粗骨材の粒度の標準⁸⁾を考慮のうえコンピュータにより生成・配置した骨材分布の3次元モデルをある平面でスライスして得られる、2次元解析用モデルの一例である。ただし、本研究ではセメント系複合材料を骨材とモルタルマトリックスからなる二相材料と考え、粒径 3mm未満の骨材は独立の粒子として扱わずモルタルに含ませる。

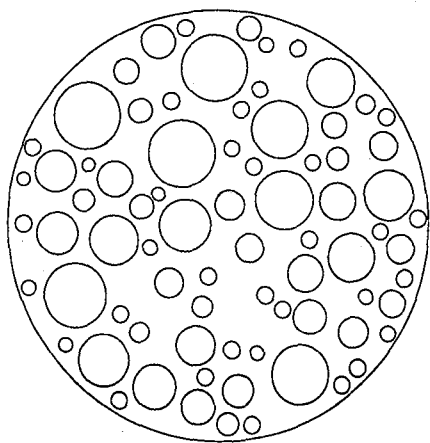


図-1 2次元骨材粒子のランダム構造

解析におけるひびわれの進展がメッシュ分割形状に依存することを避けるとともに、ランダム粒子として配置した骨材を除くモルタルマトリックスもランダムな形状の多角形要素に分割するために、本研究ではボロノイ図を用いることとした^{9) 10)}。ボロノイ図は計算幾何学の概念であり、空間内に置かれた有限個の点（母点）の勢力圏を表す領域分割図である。この分割手法の特徴はボロノイ図の母点を任意の空間位置に設定でき、すべての分割線がその両側の母点から等距離に位置することにある。ボロノイ図の形状は岩盤の割れ目の形成過程に類似するとされ、ひびわれの進展をシミュレートするための要素分割手法として有用であると考えられる¹¹⁾。

いま平面上に n 個の点 $P_1, \dots, P_n$ が与えられたとき、点 P_i のボロノイ領域 V_i は次のように定義される¹²⁾。

$$V_i = \{x \in E: d(x, P_i) \leq d(x, P_k), k=1, 2, \dots, n\} \quad (2)$$

ここに、 V_i は点 $P_1, \dots, P_n$ の中で P_i が最近点であるような点の集合であり、点 P_i の勢力圏である。 x は Euclidean space E の点を、 $d(x, P_i)$ は点 x と P_i のユークリッド距離を表す。

図-2の疑似乱数により発生させた母点(P_i)に対し、ボロノイ分割要素を生成する。要素辺（ボロノイ辺）は隣接している母点との垂直二等分線であり、要素頂点（ボロノイ点）は隣接している3つの要素の母点からな

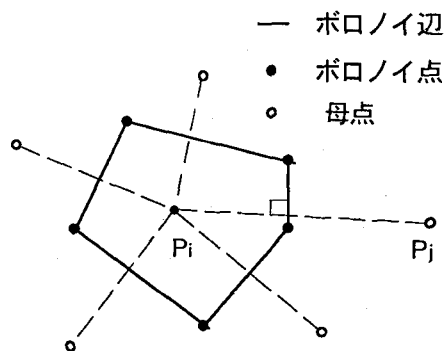


図-2 ボロノイ図

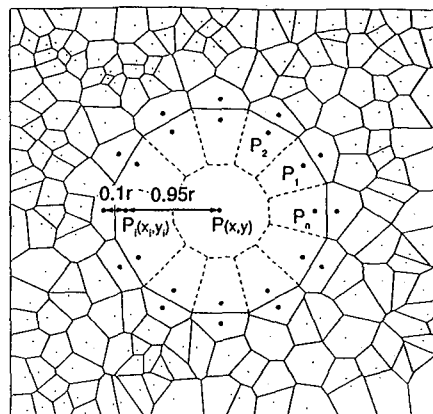


図-3 粒子を含む要素メッシュ分割法

る三角形の外心である。二相材料としてのセメント系複合材料の準微視的数値解析には、予めランダムに配置された骨材粒子を含む要素メッシュの自動生成システムの開発が新たに必要になる。

まず、正多角形骨材要素の生成を、図-1に示される各円形粒子の中心座標 $P(x, y)$ と半径 r に基づき行う。円形粒子の中心 $P(x, y)$ を1つの母点として、円周の内側と外側上に、正 n 角形骨材要素の辺数 n に応じる $2n$ 個の母点を決める。ここに、 n は骨材周りの要素とマトリックス要素とのサイズの整合性を考慮し、円形粒子の半径 r に応じて $7 \leq n \leq 24$ の値を与える。図-3のように、この $2n$ 個の母点の座標 $P_i(x_i, y_i)$ は

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x + R \cos(2\pi i/n) \\ y_i &= y + R \sin(2\pi i/n), (i=1, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

で与えられる。Rと粒子半径rとの関係は、両側の母点から等距離にあるボロノイ辺が円形粒子に外接するように設定する。本研究では、内側点で $R=0.95r$ 、外側点で $R=1.05r$ とする。すべての円形骨材粒子に対し、上述の方法で新しい母点を決定する。次に、半径 $R=1.05r$ の円形領域外に疑似乱数によりマトリックス分割の母点を生成する。最後に上述のすべての母点に基づきボロノイ要素分割を行い、骨材粒子を1つの正n角形要素で表す。こうして骨材粒子を含む複合材料のメッシュ分割が得られる。

3. ランダム粒子-バネ系モデルによる数値解析法

セメント系複合材料は、物性の異なるモルタルマトリックスと骨材粒子からなるランダムな非均質性を持ち、極めて小さい応力レベルで微細ひびわれによる非連続性を呈するので、有限要素法などの連続体力学モデルに基づく粒子レベルでの数値シミュレーションは困難である。本研究では、2次元の剛体-バネモデル¹³⁾をシミュレーションモデルとして用いる。剛体-バネモデルは破壊の不連続現象を要素境界辺上のバネの特性で比較的簡単に表せる点に特徴を有するので、極限解析法のマクロモデルとFEMなどのミクロモデルの中間に位置する有効な手段として、構造物の破壊解析に活用されている。骨材粒子要素およびマトリックス要素を剛体と仮定し、要素の境界辺に分布する垂直バネとせん断バネからなるバネ系を設ける。各要素の重心点に2次元剛体変位の3自由度(u, v, θ)を配置し、表面力に関する評価点としての積分点を要素境界辺上の中点に取る(図-4)。その垂直およびせん断方向のバネ定数(k_n, k_s)の計算には次式を用いる。

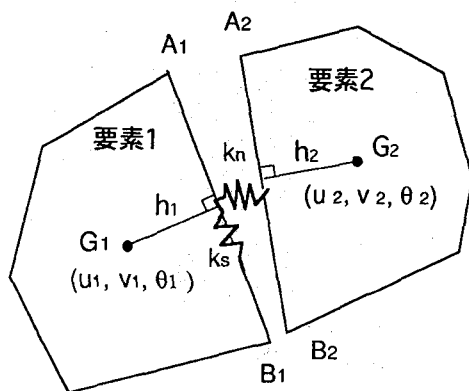


図-4 2次元剛体-バネモデル

$$k_n = \frac{(1-\Omega)E}{h_1+h_2} \quad (4)$$

$$k_s = \frac{(1-\Omega)E}{2(1+\nu)(h_1+h_2)} \quad (5)$$

ここに、 h_1, h_2 は隣接する2つの要素の重心から要素境界辺上に下した垂線の長さを表す。E, ν はヤング係数とポアソン比である。 Ω は本研究の2次元解析でセメント系複合材料の3次元非均質性を考慮するために導入した損傷度パラメータであり、解析当初の無応力状態では全バネについて $\Omega=0$ にセットされる。

セメント系複合材料を骨材粒子(a)、マトリックス(m)および骨材-マトリックス界面(i)からなると考え、それぞれの弾性定数(ヤング係数 E_a, E_m, E_i とポアソン比 ν_a, ν_m, ν_i)および引張強度($f_{t,a}, f_{t,m}, f_{t,i}$)を設定する。骨材粒子およびマトリックスの材料パラメータは、材料試験により決めることが可能である。骨材-マトリックス界面の付着引張強度を表す $f_{t,i}$ についても測定結果¹⁴⁾¹⁵⁾が報告されている。 E_i, ν_i については、実際には極めて薄い界面を考慮して、本研究では $E_i=E_m, \nu_i=\nu_m$ と仮定する。

本研究では、内部破壊過程の2次元シミュレーションに際して、破壊が逐次発生するように変位制御により載荷する。骨材粒子の存在によるトラッピング効果などを考えれば、ひびわれなどの内部破壊が発生しても、その破壊は供試体の厚さ方向に直ちに貫通するわけではない。そこで、式(4)、(5)に損傷度 Ω を導入することにより、このような段階的な破壊特性を考慮する。損傷度 Ω の設定については、バネの完全破壊に至るまでの破壊回数を3回として損傷度 Ω_k ($k=1, 2, 3$)を与える。本研究のシミュレーションでは、「k回目の破壊後の非損傷度 $(1-\Omega_k)$ は前回の破壊後の非損傷度 $(1-\Omega_{k-1})$ の1/2に低下する」と仮定することにより、 $\Omega_1=1/2, \Omega_2=3/4, \Omega_3=1$ とした。

図-4における要素厚さをt、要素境界辺ABの長さをLとすると、隣接する2要素間のバネ剛性行列 $[k]$ は次の線積分により求められる¹³⁾。

$$[k] = \int_L [B]^T [D] [B] t \, ds \quad (6)$$

ここに、 $[B]$ は要素重心の剛体変位を2要素間の相対変位と関連づける 2×6 の行列、また

$$[D] = \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_s \end{bmatrix}$$

式(6)の 6×6 のバネ剛性行列をもとに、各要素重心の剛体変位をパラメータとして全体剛性行列 $[K]$ を組み立てる。本研究では、次の増分形剛性方程式を用いる。

$$[K] \{ \Delta u \} = \{ \Delta f \} + \{ f_r \} \quad (7)$$

ここに、 $\{ \Delta u \}$ および $\{ \Delta f \}$ はそれぞれ変位増分および荷重増分ベクトル、 $\{ f_r \}$ は前ステップにおけるバネの破損に伴う解放力ベクトルである。

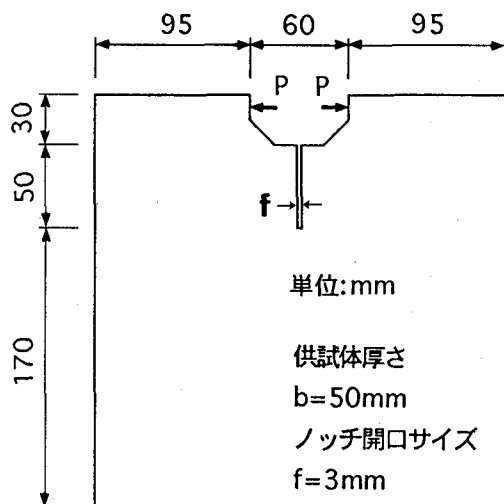
本論文で取り扱うような引張破損が卓越する問題に限定した場合、粒子レベルでの破損は垂直バネの引張破損とそれに伴うせん断バネの破損に基づき判定し、圧縮破損は考慮しないこととする¹⁰⁾。すなわち、変位を増加させるごとにすべての垂直バネの応力 σ と引張強度 f_t の比

$$s = \sigma / f_t \quad (8)$$

を算定する。 $s \geq 1$ でかつ最大の s 値を持つバネを見出し、その境界辺の垂直およびせん断バネが破損するものとする。破損バネの応力を解放し、解放された力を再分配する。ここに、バネの応力は一度に全部解放せず、1, 2 回目の破損バネの解放応力を $0.5 f_t$ 、3 回目の破損バネの解放応力を f_t とする。損傷度 Ω に応じて式(4) (5) のバネ定数を与えて剛性マトリックスを組み直し、新しく破損するバネがなくなるまで繰り返し計算する。もし与えられた変位に対する応力比 s が全バネについて $s < 1$ であれば、その中で最大の s 値を有するバネが破損規準 $s = 1$ を満たすように次の変位を与える。

また、本解析では微細ひびわれの閉鎖を考慮する。すなわち、微細ひびわれが存在した境界辺上において、計算過程で垂直バネの相対変位が負（圧縮）になった時、その微細ひびわれは閉鎖すると判定する。この時閉鎖した境界辺のバネ定数 k_n は前回破損時の値に回復させるが、せん断バネ定数 k_s は回復しないものとする。

4. CT 供試体の引張破壊過程のシミュレーション



供試体

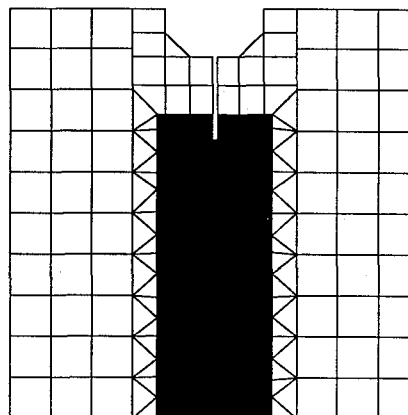
4.1 供試体のモデル化

各種材料の破壊力学パラメータを決定するための標準試験の一つに CT (Compact Tension) 供試体によるものがある。図-5は本研究で解析対象とするコンクリートCT供試体の例⁶⁾を示したものである。ランダム粒子モデルは供試体全領域に用いる必要はなく、主ひびわれおよびその周辺の微細ひびわれを含む破壊領域（図中、黒のハッチ部）のみに用いればよい。残りの非破壊領域には等方性材料の2次元剛体-バネモデルを用いる。

骨材の最大寸法 $G_{\max}$ をそれぞれ 10mm, 15mm, 20mm に変化させた3つの供試体の解析を行う。表-1に示す骨材量の粒径別目標値に基づき2節の方法でコンピュータにより粒径3mm以上の骨材を生成・配置する。粒径3mm以下の骨材をも考慮した骨材の重量はコンクリート全重量の約62%である。ただし、本解析では粒径 3mm未満の骨材は独立の粒子として扱わずモルタルマトリックスに含ませている。供試体の破壊領域の要素メッシュを図-6に示す。

表-1 骨材分布の目標値

骨材粒径 (mm)			単位骨材量の 目標値 (kg/m^3)
10.0	15.0	20.0	50.00
9.5	14.0	18.5	80.00
9.0	13.0	17.0	80.00
8.5	12.0	15.5	80.00
8.0	11.0	14.0	80.00
7.5	10.0	12.5	80.00
7.0	9.0	11.0	75.00
6.5	8.0	9.5	75.00
6.0	7.0	8.0	75.00
5.5	6.0	6.5	75.00
5.0	5.0	5.0	100.00
3.5	3.5	3.5	100.00



解析モデル

図-5 CT 供試体の諸元と解析モデル

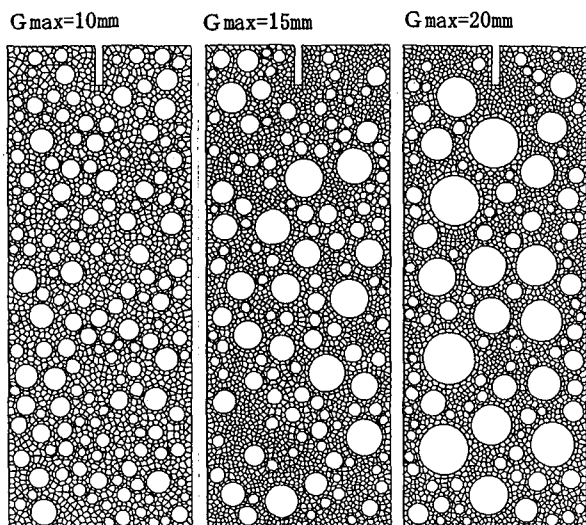


図-6 供試体破壊領域のメッシュ分割

セメント系複合材料の非均質性を骨材(a), モルタルマトリックス(m), 骨材-マトリックス界面(i)の3種の異なるパネで表す。3種の材料のヤング係数 E_a, E_m, E_i , ポアソン比 ν_a, ν_m, ν_i および引張強度 $f_{t,a}, f_{t,m}, f_{t,i}$ は表-2のように設定した。

表-2 パネの材料特性

パネ構成	骨材	モルタル	界面
E (GPa)	$E_a=60.0$	$E_m=20.0$	$E_i=E_m$
ν	$\nu_a=0.25$	$\nu_m=0.18$	$\nu_i=\nu_m$
f_t (MPa)	$f_{t,a}=6.0$	$f_{t,m}=3.5$	$f_{t,i}=1.75$

4.2 破壊進行過程のシミュレーション

粗骨材の最大寸法 G_{max} を10mm, 15mm, 20mmとする3つの供試体の荷重-ひびわれ開口変位関係の解析および同じ G_{max} を与えた大塚らによる実験結果⁶⁾を図-7に示す。本解析に用いたコンクリートは, G_{max} 以外の配合データが大塚らのコンクリートと同じでないため、解析と実験結果を定量的に比べることはできない。実験では, G_{max} が大きいほど荷重-開口変位曲線の軟化領域に入ってから傾きが緩くなる傾向が見られる。解析結果もこの傾向を定性的に表しているが、最大荷重以降の軟化域において、破壊部のパネ破断が集中的に生じるため、荷重が急激に低下している。これは、粒径の小さな粗骨材の界面破損後のパネの残存剛性と残存強度が、粒径の大きな粗骨材のそれらに比べて大きいことを、本解析で正しくシミュレートできていないためであり、供試体厚さ方向の3次元非均質性を2次元モデルで定量的に取り扱う難しさを示すものと思われる。なお、図-7の荷重-開口変位曲線下の面積とCT供試体リガメントの面積から、「ひびわれが単位面積進展する間に消費されるエネルギー」で定義されるコンクリートの破壊エネルギー G_F を計算できるが、本解析による G_F は実験値より小さくなる。

図-7における荷重-変位曲線上の点A~Dについて、主ひびわれの進展と周囲の微細ひびわれによる破壊の進行状態を示せば、図-8の通りである。図中の太線は3回目のパネ破断を経た貫通ひびわれを、細いひびわれは1回目のパネ破断を表す。2回目のパネ破断は両者の中間の太さで示しているが、その数は極めて少なく、2回目のパネ破断が生じると、直後に貫通ひびわれが形成されている。

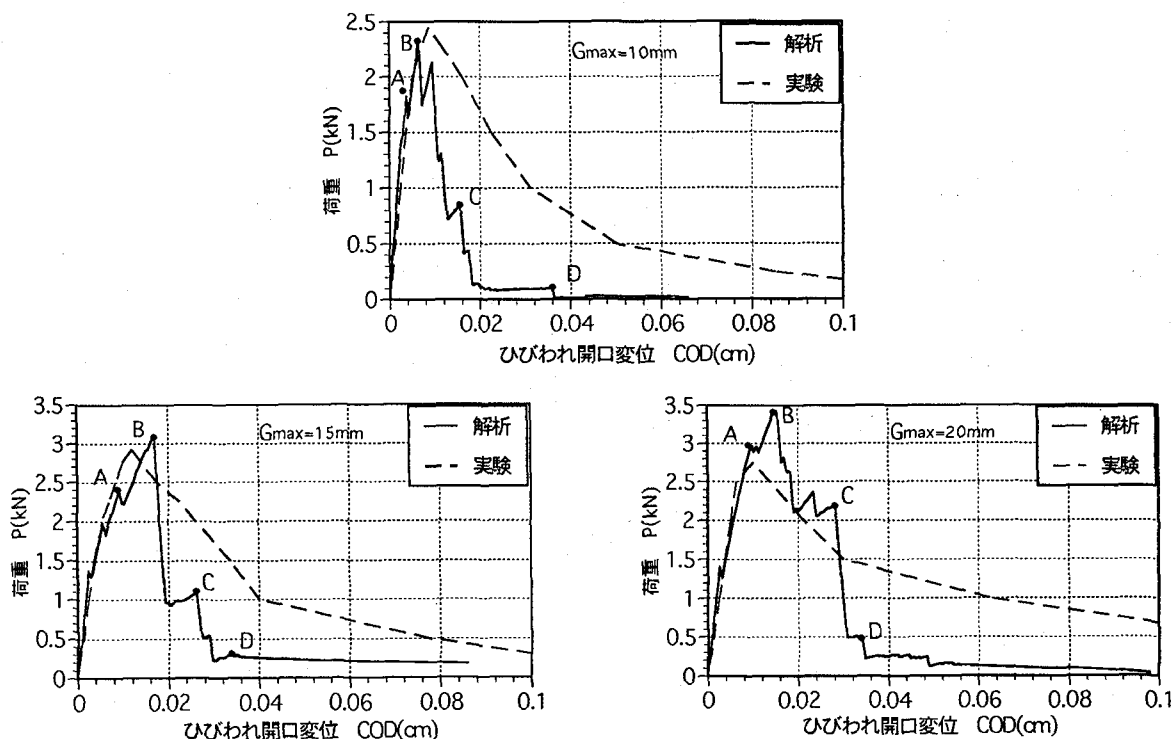
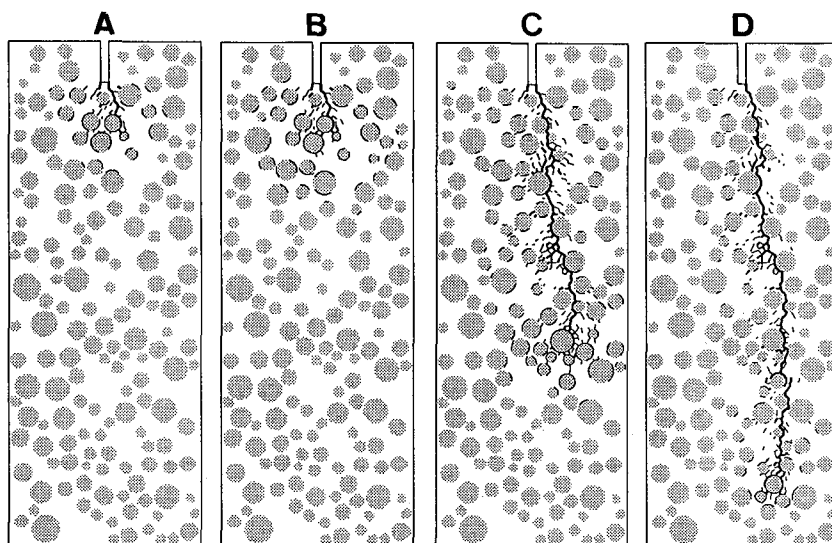
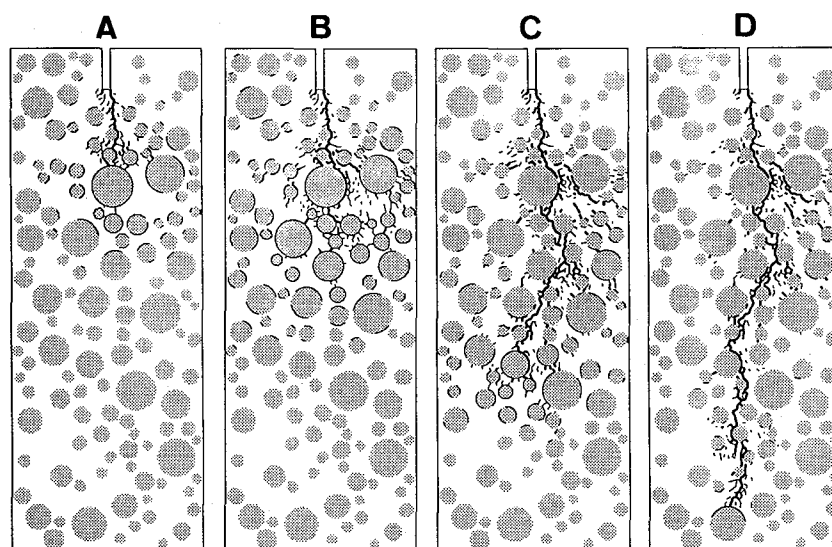


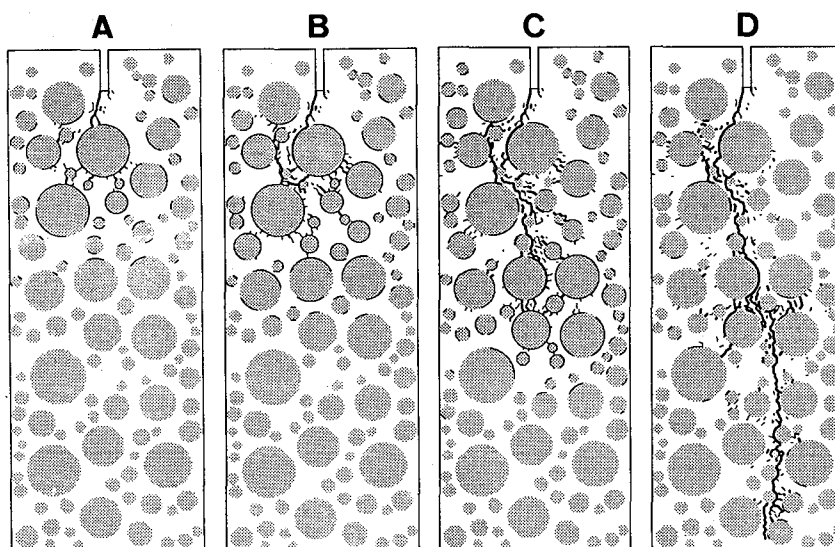
図-7 荷重-ひびわれ開口変位関係



(a) $G_{max}=10mm$



(b) $G_{max}=15mm$

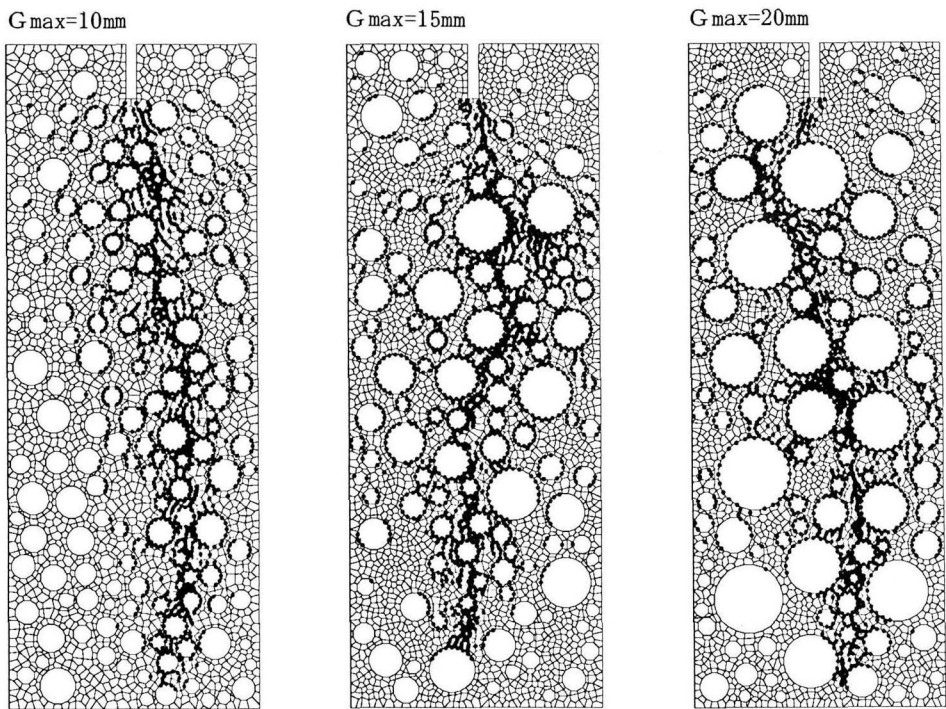


(c) $G_{max}=20mm$

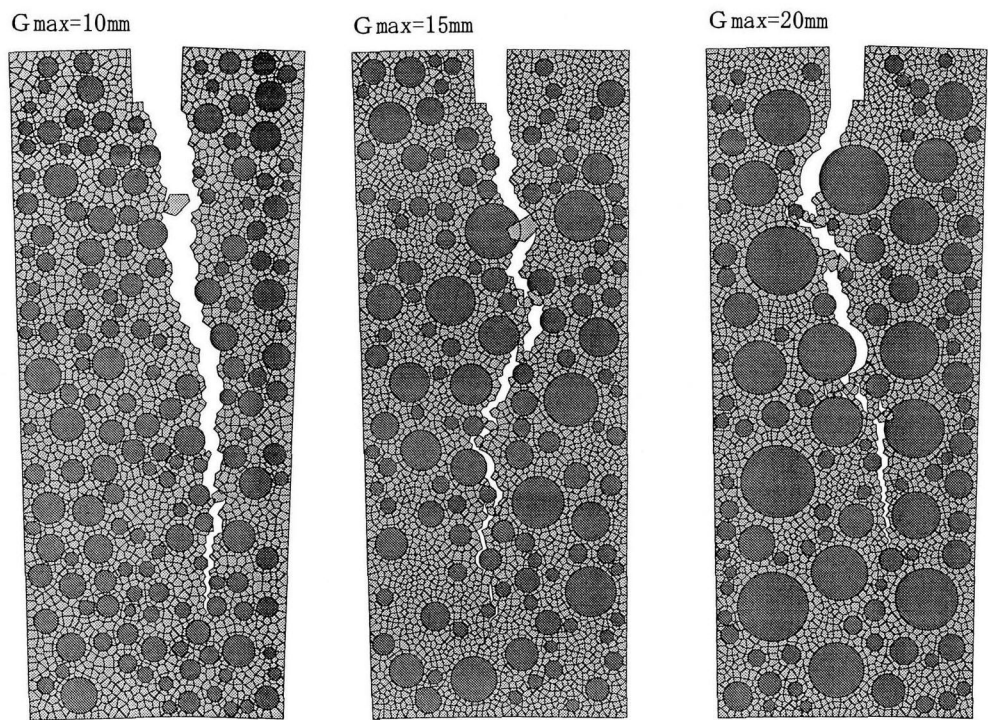
図-8 ひびわれ進展状態

図－7の曲線上のA点は最大荷重のおよそ80%である。この時点での解析によるひびわれ進展状況は、ノッチ先端近傍に複数の微細ひびわれが発生する実験観察結果⁶⁾と一致する。また、これら多数の微細ひびわれはほとんどが界面ひびわれであり、主ひびわれの両側領域に集中して発生する。ノッチ先端から進展してきた主ひびわれがかなり大きな粗骨材に最初に到達すれば、最大荷重はこの時点(A点)の荷重をさらに上回ることになる。

最大荷重時(B点)までに進展した微細ひびわれはある幅を持つひびわれ領域を形成する。この時点から、主ひびわれは解放されたエネルギーで進展していくことができる。開口変位が増大するにしたがって、主ひびわれはその先端領域に微細ひびわれを伴って進展する(C図)。また、パネ破損領域の幅は、最大荷重時(B点)が最大であり、軟化領域に入ってパネ破損領域が段々と狭くなる。載荷の最終段階に近いD点のひびわれ分布状態をC点



図－9 破損したパネの分布状況



図－10 最大荷重後(D点)の変形状態

のそれと比較すれば、主ひびわれの両側領域の微細ひびわれの分布範囲が縮小している。D点での解析における垂直バネの相対変位を調べると、微細ひびわれの閉鎖現象が見られる。 G_{max} の異なる3つの供試体について載荷の最終段階までに1度でも破損したバネの位置を図-9に黒丸で示す。図-8のD点のひびわれ進展状態と比較することにより、微細ひびわれの閉鎖が G_{max} の大きさに関わらず広く生じていることがわかる。

4.3 破壊特性に及ぼす骨材粒径の影響

ここでは、破壊特性に与える骨材最大寸法の影響を考察する。図-8の破壊進展状態より、バネ破損領域の幅が骨材の G_{max} によってかなり異なることが観察される。 G_{max} が大きい場合には、主ひびわれが骨材に沿って蛇行する傾向が顕著であり、バネ破損領域の幅が大きくなるとともに、主ひびわれの進展に伴う破損領域幅の変動も大きくなる。

図-10は図-7の曲線D点における変形状態である。界面はく離、モルタルひびわれ進展などの内部破壊現象が観察される。

5. 結語

非均質なセメント系複合材料の準微視的破壊過程をシミュレートするために、計算幾何学の概念であるボロノイ図を適用することにより、粒子分散型複合材料の離散化手法を構築し、剛体-バネモデルに基づくランダム粒子-バネ系モデルを提案した。解析例として、コンクリートCT試験のシミュレーション結果を示した。本解析により、主ひびわれの発生・進展を含む破壊進行特性および界面はく離、変形の局所化などの内部破壊現象が観察でき、破壊進行領域に及ぼす骨材粒径の影響が明らかになった。また、最大荷重以降、開口変位が増大するとともに主ひびわれの両側領域における微細ひびわれの閉鎖現象が認められた。本モデルでコンクリートのような骨材粒子を含む複合材料の内部破壊過程の準微視的シミュレーションが可能になると期待できる。

本研究のランダム粒子-バネ系モデルは非均質な脆性複合材料の内部組織変化過程のシミュレーションや新しい複合材料の開発への利用を目的とするもので、当面の適用対象は材料強度試験用供試体のレベルに限られる。また、本来3次元非均質性を持つセメント系複合材料を2次元モデルによって取り扱うことには限界があり、粒子レベルでの数値解析に用いる破壊基準をさらに検討すべきである。しかし、脆性材料の準微視的破壊特性を連続体力学モデルにより捕らえるのはかなり困難であり、連続体力学理論を構築するには、材料の微視的破壊メカニズムと巨視的力学パラメータの関連性を解明しなければならない。したがって、ここに提示したランダム粒子-バネ系モデルは、新たな連続体力学モデルを開発するため、材料試験により得られる情報を補うにも有用

であると考えられる。

参考文献

- 1) 破壊力学の応用研究委員会：破壊力学の応用研究委員会報告書，日本コンクリート工学協会，1993.10.
- 2) Zaitsev, Y. B. and Wittmann, F. H.: Simulation of Crack Propagation and Failure of Concrete, Materials and Structures, No.83, pp.357-365, 1981.
- 3) 堀井秀之：フラクチャープロセスゾーン問題とコンクリート・岩石・セラミックスに対する破壊力学の体系化，土木学会構造工学論文集，Vol.35A, pp.309-320, 1989.3.
- 4) 長村光造・落合庄治郎・酒井 明：メゾ材料の構造と物性およびその設計，材料，Vol.43, No.492, 1994.
- 5) Wittmann, F.H. (三橋博三訳)：コンクリートの内部構造と力学的特性，コンクリート工学，Vol.21, No.3, pp.19-30, 1983.
- 6) 大塚浩司・勝部宏明：コンクリートの破壊進行領域の性状に及ぼす骨材寸法の影響，土木学会論文集，No.478/V-21, pp.109-116, 1993.11.
- 7) Hsu, T.T.C.: Mathematical analysis of shrinkage stresses in a model of hardened concrete, J. Am. Concrete Inst., Vol.60, pp.371-390, 1963.
- 8) 土木学会：コンクリート標準示方書[平成3年版]施工編，pp.28, 1991.
- 9) 竹内則雄・上田真稔・鬼頭宏明・樋口晴紀・上林厚志：ボロノイ分割を用いたRBSMによる無筋コンクリート梁の寸法効果解析，土木学会構造工学論文集，Vol.40A, pp.519-527, 1994.3.
- 10) 都井 裕・清末考範：マイクロインクルージョンを含む脆性固体の2次元破壊解析，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，第19巻，pp.25-30, 1995.7.
- 11) 大西有三・河野正雄：ボロノイ分割法を適用した岩盤の個別要素解析について，土木学会論文集，第376号/III-6, pp.231-239, 1986.12.
- 12) Witold, B., Jean-Pierre, D. and Bennett, L.F.: Construction of Voronoi Polyhedra, Journal of Computational Physics 29, 1978.
- 13) 川井忠彦：New Element Models in Discrete Structural Analysis, 日本造船学会論文集，第141号，1977.
- 14) Hsu, T.T.C and Slate, F.O.: Tensile bond strength between aggregate and cement paste or mortar, J. AM. Concrete Inst., Vol.60, pp.465-486, 1963.
- 15) 鈴木純也・水上国男：骨材とペーストの付着強度について，セメント技術年報，XXIX, 1975.

(1995年9月18日受付)