

ポテンシャル導関数の積分方程式を用いたスロッシング解法

APPLICATION OF BOUNDARY INTEGRAL EQUATION USING DERIVATIVE UNKNOWNNS
TO SLOSHING ANALYSIS

阿部和久*, RUSBANDI**

Kazuhisa ABE and RUSBANDI

*工博 新潟大学助教授 工学部建設学科 (〒950-21 新潟市五十嵐二の町 8050 番地)

** Tridinanti Univ., Indonesia (研究当時 新潟大学大学院学生)

A boundary element equation in which tangential and normal derivatives of the velocity potential are boundary unknowns is employed in two-dimensional sloshing analysis method. Since in the introduced boundary integral equation weakly singular kernel is the only singularity, discretization of the equation and calculation of the matrix coefficients can be readily carried out. Through the application to a potential problem, it is found that the rate of convergence and accuracy of the solution are improved by using the new equation. In the sloshing analysis method, the tangential derivative of the potential (ϕ_s) is evaluated by numerical differentiation with 4th-order Lagrange polynomials. As a time integration scheme 4th-order Runge-Kutta method is employed. Since, in the introduced boundary element equation, ϕ_s and flux q must satisfy the continuity condition, two equations of those restricted conditions are coupled with the boundary element equation. Numerical experiments show that the improvement of the rate of convergence and accuracy of the solution can be accomplished by the constructed method, without using higher-order elements.

Key Words : *sloshing analysis, boundary element method, derivative unknowns, weakly singular kernel*

1. はじめに

スロッシング問題や造波問題などに代表される自由水面の動的解析において、液体の運動場を速度ポテンシャル ϕ により表す場合、その速度場は ϕ の勾配によって与えられるが、自由水面の運動は流体粒子速度に基づいて決定されるので、その際には速度ポテンシャル勾配を自由水面上で求めることが必要となる。また、各時間ステップにおける速度ポテンシャル増分は、圧力方程式に基づき与えられるが、その計算においても流体粒子速度の評価が必要となる。なお、時間積分として陽的スキームを用いる場合、速度ポテンシャルの増分は圧力方程式に基づいて前ステップの値から与えられることとなるので、各ステップにおいて速度ポテンシャルは自由水面における既知量として扱われる。通常、この問題に境界要素法を適用する場合、速度ポテンシャルとその法線方向導関数である流束 q とに関する境界積分方程式に基づいた定式化が用いられるが、法線方向速度成分は、これを解き自由水面上の流束を求めることで与えられることとなる。一方、自由水面境界の接線方向速度成分すなわち速度ポテンシャルの接線方向導関数 ϕ_s は、一般に ϕ の数値微分により求められている。したがって、スロッシング問題の解析精度の向上には、境界要素方程式による流束成分の評価精度の改善、および数値微分による ϕ_s

の評価精度の改善が必要である。

本論文では、ポテンシャル導関数を未知量とした弱い特異核を有する境界積分方程式を用いた解法を構成し、解析精度向上に向けての検討を行う。まず、速度ポテンシャルの接線方向導関数は 4 次の Lagrange 補間に基づき、速度ポテンシャルの数値微分より求める。一方、自由水面の流束成分の評価には、 ϕ_s と q に関する境界要素方程式を用いる。なお、 ϕ_s と q に関する境界要素方程式は、速度ポテンシャルと流束とに関する通常の境界要素方程式よりも高い収束次数を有するので、精度改善が期待できる。ここに構成した解法の有効性については解析例を通し検討し、精度や収束次数の向上などについて検証する。

2. ポテンシャル導関数を与える積分方程式

ポテンシャル導関数 ϕ_s, q を境界値関数とした境界積分方程式は強い特異性を持つものと、弱い特異性を持つものの二種類に分類することができる。本論文では、弱い特異性を持つものを用いるが、ここでは、本解析の中心となる境界要素方程式の基本的特徴を理解するために、各方程式の、誘導過程から見た関係や、核関数の特異性により境界値などに課される連続性について整理する。なお、各式の誘導過程の詳細については文献 1) を

参照されたい。

2.1 強い特異核を持つ積分方程式

二次元ポテンシャル問題を考える。直接法に基づいたポテンシャル ϕ の積分表現式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{X}) = & - \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{X}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) d\Gamma_y \\ & + \int_{\Gamma} \phi^*(\mathbf{X}, \mathbf{y}) q(\mathbf{y}) d\Gamma_y \quad (\mathbf{X} \in \Omega) \quad (1)\end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{X}$ は領域 Ω 内の点、 Γ は境界、 q は流束 ($= \partial\phi/\partial n_y$)、 ϕ^* は基本解、 $q^* = \partial\phi^*/\partial n_y$ である。なお、 $\partial/\partial n_y$ は Γ 上の点 $\mathbf{y}$ における外向き法線方向微分を、また $d\Gamma_y$ は $\mathbf{y}$ に関する境界積分を意味する。

式 (1) の両辺を X_i について偏微分することで、 ϕ の導関数を得る。

$$\frac{\partial\phi}{\partial X_i} = - \int_{\Gamma} \frac{\partial q^*}{\partial X_i} \phi d\Gamma_y + \int_{\Gamma} \frac{\partial\phi^*}{\partial X_i} q d\Gamma_y \quad (2)$$

式 (2) より、 Ω 内の点 $\mathbf{X}$ における、互いに直交し合ったある方向 n_X, s_X への導関数は次式で与えられる。

$$\frac{\partial\phi}{\partial n_X} = - \int_{\Gamma} \frac{\partial q^*}{\partial n_X} \phi d\Gamma_y + \int_{\Gamma} \frac{\partial\phi^*}{\partial n_X} q d\Gamma_y \quad (3)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial s_X} = - \int_{\Gamma} \frac{\partial q^*}{\partial s_X} \phi d\Gamma_y + \int_{\Gamma} \frac{\partial\phi^*}{\partial s_X} q d\Gamma_y \quad (4)$$

ここで、 $\partial q^*/\partial n_X, \partial q^*/\partial s_X$ は次のように表すことができる。

$$\frac{\partial q^*}{\partial n_X} = - \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial s_X \partial s_y}, \quad \frac{\partial q^*}{\partial s_X} = - \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial n_X \partial s_y} \quad (5)$$

ただし、 $\partial/\partial s_y$ は Γ 上の点 $\mathbf{y}$ における接線方向微分である。

式 (5) を (3), (4) の右辺第一項に代入し、境界接線方向に部分積分を施し、 $\mathbf{X} \in \Omega \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma, n_X \rightarrow n_x, s_X \rightarrow s_x$ の極限移行をとると、最終的に $\phi_s (= \partial\phi/\partial s)$ と q に関する、互いに共役な二つの境界積分方程式を得る。

$$\frac{1}{2} q(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \frac{\partial\phi^*}{\partial n_x} q d\Gamma_y = - \int_{\Gamma} \frac{\partial\phi^*}{\partial s_x} \phi_s d\Gamma_y \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \phi_s(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \frac{\partial\phi^*}{\partial n_x} \phi_s d\Gamma_y = - \int_{\Gamma} \frac{\partial\phi^*}{\partial s_x} q d\Gamma_y \quad (7)$$

ただし、 $\mathbf{x}$ で境界は滑らかであるものとする。

式 (6), (7) における積分核の特異性は $1/r (r = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|)$ のオーダーであり、Cauchy の主値程度の強い特異性となっている。上式の適用は Athanasiadis²⁾ によってなされているが、離散化において境界形状は基本的に C^1 連続性をみとす必要がある。なお、この連続性に関する制約は、選点における特異積分に起因して課されるものである。一方、境界値関数 ϕ_s, q については C^0 連続性だけが要求される。したがって、実際の解法構成において、選点法を採用する場合、選点を要素内部にとり、不連続要素を用いるか、さもないければスプライン補間や Overhauser 要素³⁾ などにより、少なくとも境界形状に対しては C^1 連続性を確保する必要がある。

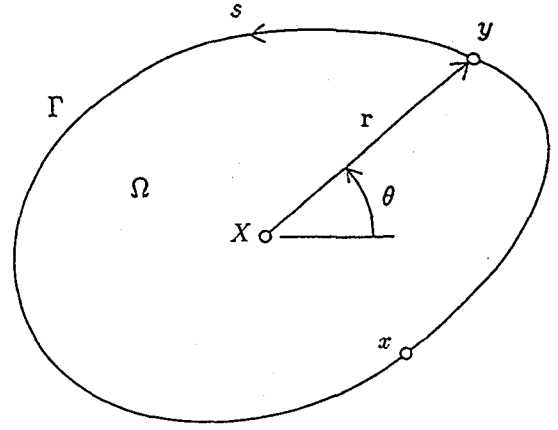


図-1 解析領域の各定義

2.2 弱い特異核を持つ積分方程式

図-1 に示すように内点 $\mathbf{X}$ と積分点 $\mathbf{y}$ を結ぶベクトル $\mathbf{r}$ が水平軸となす角度を例えば θ としたとき、基本解 q^* は次式で与えられる¹⁾。

$$q^* = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial s_y} \quad (8)$$

式 (8) を (1) に代入し、部分積分すると、次の積分表現式を得る。

$$\phi(\mathbf{X}) = \phi(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \frac{\theta}{2\pi} \phi_s d\Gamma_y + \int_{\Gamma} \phi^* q d\Gamma_y \quad (9)$$

ここで $\mathbf{x}$ は Γ 上の積分における適当な始点である。

式 (9) で $\mathbf{X} \in \Omega \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma$ の極限移行をとると次の積分方程式を得る。

$$\int_{\Gamma} \frac{\theta}{2\pi} \phi_s d\Gamma_y = \int_{\Gamma} \phi^* q d\Gamma_y \quad (10)$$

なお、式 (10) に相当する静弾性問題の積分方程式は、ここに示したものと同様の定式化に基づき Ghosh 等⁴⁾ によって示されている。

また、式 (10) にも式 (6), (7) と同様に共役な積分方程式が存在する。これは、Choi and Kwak⁵⁾ の複素表示に基づいた定式化によって示されたが、複素表示を用いなくても、以下のように誘導することができる。

まず、 ϕ と θ に対して Green の公式を適用すると次式を得る。

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \Delta\phi \cdot \theta d\Omega = & \int_{\Gamma} q\theta d\Gamma_y - \int_{\Gamma} \frac{\partial\theta}{\partial n_y} \phi d\Gamma_y \\ & + \int_{\Omega} \phi \cdot \Delta\theta d\Omega \quad (11)\end{aligned}$$

ここで、 Δ は Laplacian である。

式 (11) において、領域積分項がゼロとなることを示すことができ、その結果次式を得る。

$$0 = - \int_{\Gamma} \frac{\partial\theta}{\partial n_y} \phi d\Gamma_y + \int_{\Gamma} \theta q d\Gamma_y \quad (12)$$

さらに $\partial\theta/\partial n_y$ は次式のように書き表すことができる。

$$\frac{\partial\theta}{\partial n_y} = 2\pi \frac{\partial\phi^*}{\partial s_y} \quad (13)$$

すると次式を得る。

$$\int_{\Gamma} \frac{\theta}{2\pi} q \, d\Gamma_y = \int_{\Gamma} \frac{\partial\phi^*}{\partial s_y} \phi \, d\Gamma_y \quad (14)$$

式(14)の右辺を部分積分し、 $\mathbf{X} \in \Omega \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma$ の極限移行をとれば、式(10)に共役な境界積分方程式が得られる。

$$\int_{\Gamma} \frac{\theta}{2\pi} q \, d\Gamma_y = - \int_{\Gamma} \phi^* \phi_s \, d\Gamma_y \quad (15)$$

式(10),(15)における積分核は $\log r$ のオーダーの弱い特異性しか持たないので、境界形状に対しても C^0 連続な関数による離散化が適用可能であり、かど点に選点をとることもでき、さらに、離散化後の境界積分も容易に行うことができる。一般に広く用いられている境界要素は C^0 連続なものであるため、以上のような特徴は実際の適用に際して大きな利点となる。そこで、本研究では式(10),(15)の積分方程式に基づいて境界要素方程式を構成する。

2.3 定式過程から見た各積分方程式の関係について

以上に ϕ_s と q を境界値関数とした境界積分方程式と、その誘導過程の概略について示した。式(6),(7)で与えられた強い特異性を持つ積分方程式は、2.1に示したように、式(1)を微分して得られるポテンシャル勾配に関する積分表現式(2)から導かれた。このポテンシャル勾配の積分表現式に対して境界への極限移行をとると、 ϕ と q から境界上のポテンシャル導関数を与える積分表現式を得るが、これは積分核が $1/r^2$ の特異性を持っており、境界形状および ϕ に対して評価点で C^1 連続性が要求される。また、特異点での積分を発散積分の有限部分として評価する必要があり、直線境界以外ではその処理に多少の工夫を要する。式(6),(7)の積分方程式はこのポテンシャル導関数の積分表現式を部分積分して得られたものであるが、この部分積分過程によって核関数における上述の超特異性を Cauchy の主値程度の強い特異性にまで低減することができた。

また、式(10)で与えられる弱い特異核を持つ積分方程式は、強い特異核を持つ積分表現式(1)に部分積分を施し、特異性を減ずることで誘導されたものであるが、その過程で導かれた弱い特異核を持つポテンシャル ϕ の積分表現式(9)を微分することで式(6),(7)を誘導することも可能である。これは形式的には、2.1に示した定式過程における微分と部分積分の順序を交換したものとなすことができる。

式(10)の共役である式(15)は、(12)の部分積分により与えられたが、式(12)は式(1)における基本解 ϕ^* に対して共役な関数 θ を核関数に持つ積分方程式であり、式(1)から式(10)を誘導した過程の完全な共役として、式(12)から式(15)までの誘導過程を解釈することがで

きる。さらに、式(12)を出発点として、それを微分し、その後部分積分を行うか、または部分積分の後微分を行い、極限移行をとることで、式(6),(7)を誘導することも可能である。

以上を要約すると、定式化の出発点は式(1),(12)であり、これらの式に順序に関わらず微分および部分積分を施せば式(6),(7)の強い特異核を持つ境界積分方程式が得られ、部分積分のみ施して極限移行すれば式(10),(15)の弱い特異核を持つ境界積分方程式を得る、という関係が得られる。

3. ϕ_s と q に関する境界要素方程式の基本的特性

3.1 境界要素方程式の離散化

本研究では、 ϕ_s と q に関する境界積分方程式として式(10),(15)の弱い特異性を持つものを用いる。なお、境界形状と境界値の表現には一次要素を用い、離散化に際し選点法を適用する。式(10)および(15)より得られる境界要素方程式はそれぞれ次のようになる。

$$\mathbf{A}\{\phi_s\} = \mathbf{G}\{q\} \quad (16)$$

$$\mathbf{A}\{q\} = -\mathbf{G}\{\phi_s\} \quad (17)$$

ここで、 $\{\phi_s\}, \{q\}$ は ϕ_s と q の節点値よりなるベクトルであり、 $\mathbf{A}, \mathbf{G}$ は式(10),(15)を離散化して得られる係数行列である。なお、行列 $\mathbf{G}$ は ϕ と q を未知量とした通常用いられる境界要素方程式における、 ϕ^* を核関数とした係数行列に一致する。一方、 $\mathbf{A}$ は $\theta/2\pi$ を核関数とした係数行列である。各行列成分の計算における積分は解析的に求めた。

$\mathbf{A}$ の係数成分は θ を含む積分で与えられるが、この積分を解析的に閉じたかたちで求めるのは一見困難に思える。しかし、部分積分を行えば、以下のようにして容易に求めることができる。

まず、 $\mathbf{A}$ の係数成分は次の積分で構成されている。

$$\int_{\Gamma_j} \frac{\theta}{2\pi} \psi_k \, d\Gamma \quad (18)$$

ここで、 Γ_j は境界要素、 ψ_k は Γ_j 上で定義された補関関数であり、今の場合は区間一次関数となる。 Γ_j の要素長を h_j とし、要素中央に原点を持つ要素座標 s を用いれば、式(18)は次式で与えられる。

$$\int_{\Gamma_j} \frac{\theta}{2\pi} \psi_k \, d\Gamma = \int_{-h_j/2}^{h_j/2} \frac{\theta}{2\pi} \psi_k \, ds \quad (19)$$

式(8)より、基本解 q^* は $\partial\theta/\partial s$ により与えられるので、式(19)を部分積分することで θ に関する積分を q^* に関する積分に変換することができる。

$$\begin{aligned} & \int_{h_j/2} \frac{\theta}{2\pi} \psi_k \, ds \\ &= \left[\frac{\theta}{2\pi} \Psi_k \right]_{-h_j/2}^{h_j/2} - \int_{-h_j/2}^{h_j/2} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial\theta}{\partial s} \Psi_k \, ds \\ &= \left[\frac{\theta}{2\pi} \Psi_k \right]_{-h_j/2}^{h_j/2} + \int_{-h_j/2}^{h_j/2} q^* \Psi_k \, ds \end{aligned} \quad (20)$$

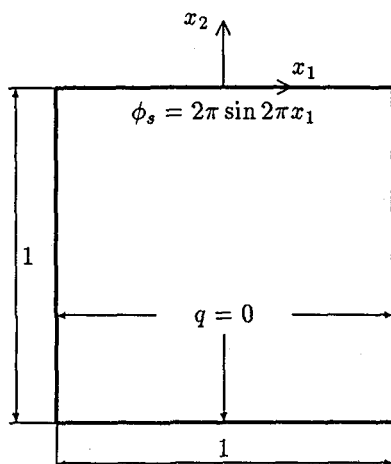


図-2 解析条件

ただし,

$$\Psi_k = \int \psi_k ds \quad (21)$$

である.

式(20)の q^* に関する積分は ϕ と q に関する通常の積分方程式に現れる積分であり, 解析的に求めることができる. よって, 式(20)によれば A の係数成分が容易に求められることとなる.

3.2 求解方程式の構成

一般の境界値問題の求解において, 式(16)または(17)のいずれか一方の方程式だけを用いる方法と, 両式を混用する方法とが考えられるが, 行列 A の成分を対角に持つような方程式系では解が安定に求められないことが知られている⁵⁾. そこで, 混合境界値問題において, q が未知となる選点では式(16)を用い, ϕ_s が未知となる選点では式(17)を用いる. この場合, 最終的な方程式系は次式のように与えられる.

$$\begin{bmatrix} G_{11} & -A_{12} \\ A_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ \phi_{s2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & -G_{12} \\ -G_{21} & -A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_{s1} \\ \bar{q}_2 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

ここで, $\{\bar{\phi}_{s1}, \bar{q}_2\}$ は既知成分, $\{q_1, \phi_{s2}\}$ は未知成分であり, $G_{11} \dots, A_{11} \dots$ は各部分ベクトルに対応した G および A 行列の部分行列である.

3.3 解の精度と収束次数

ϕ_s と q に関する境界要素方程式による解の精度と収束次数を解析例を通して調べた. 対象とした問題は, 図-2に示したポテンシャル問題である. この問題は矩形容器内の線形スロッシングモードに対応したものである. 境界条件は, 自由水面で ϕ_s が, また壁面で q がそれぞれ図-2のように規定されているものとする. 境界要素の離散化には, 各辺 10, 20, 30, 40 要素による一様分割を用い

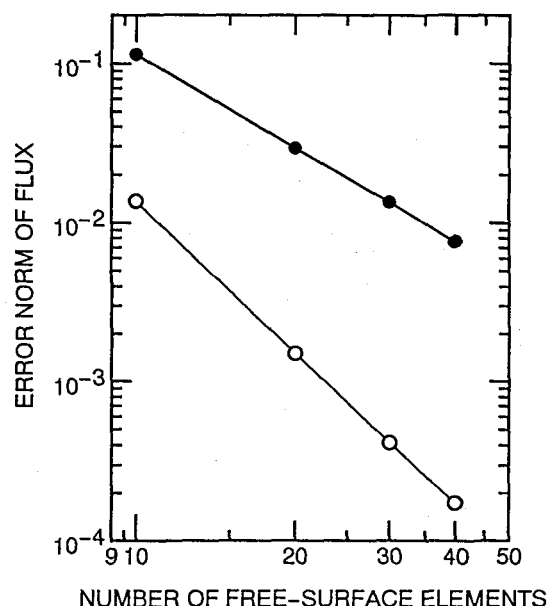


図-3 流束の精度 (o: ϕ_s, q に関する境界要素方程式, •: ϕ, q に関する境界要素方程式)

た. 計算精度は自由水面境界における流束成分の精度に基づき, 次のノルムで評価した.

$$\begin{aligned} \|q - \bar{q}\| &= \int_{\Gamma_f} |q - \bar{q}| d\Gamma \\ &\approx \sum |q_i - \bar{q}_i| h_i \end{aligned} \quad (23)$$

ここで, Γ_f は自由水面境界, q_i は流束節点値, $\bar{q}_i$ は真の値, h_i は節点 i に代表される境界長である.

結果を図-3に示す. なお, 図-3には比較のため, ϕ と q に関する通常の境界要素方程式を用い, Γ_f 上で ϕ を既知として求めた q の評価精度も示した. 通常の境界要素方程式においても, 用いた要素の種類, 分割方法は ϕ_s と q に関する境界要素法と同一のものである. 図より, 通常の境界要素方程式における解の収束次数が2次であるのに対し, ϕ_s と q に関する境界要素方程式では3次となっており, 通常のものより1次高い収束性が得られていることがわかる. また, 精度自体で比較しても, ϕ_s と q に関する境界要素方程式を用いることで大幅な改善が認められ, ノルムで1~2桁の差が確認できる.

3.4 ϕ_s と q における連続条件の必要性

式(10),(15)における角度 θ を評価する際の基準は水平軸である必要はなく, 基本的には任意である. すなわち, θ の代わりに $\theta + \theta_0$ (θ_0 : 任意定数)を用いたとき, θ_0 の値によらず, 式(10),(15)の解は一意に存在しなければならない. このことが, 式(10),(15)を離散化して得られる境界要素方程式においても成り立つためには, 境界要素解が次の条件をみたす必要がある⁵⁾.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{\theta}{2\pi} q d\Gamma &= \int_{\Gamma} \frac{\theta + \theta_0}{2\pi} q d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\theta}{2\pi} q d\Gamma + \frac{\theta_0}{2\pi} \int_{\Gamma} q d\Gamma \end{aligned} \quad (24)$$

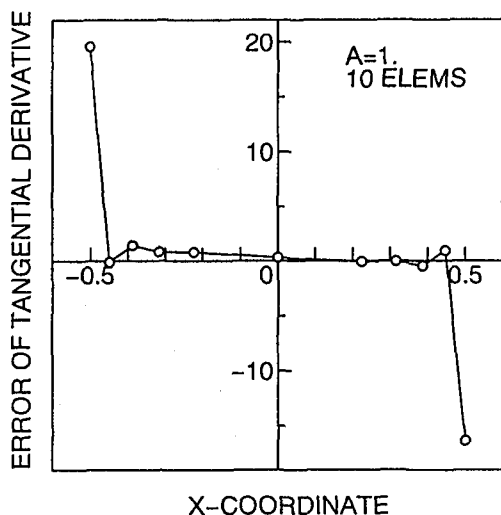


図-4 ϕ_s 節点誤差分布 (q が連続条件をみたさない場合)

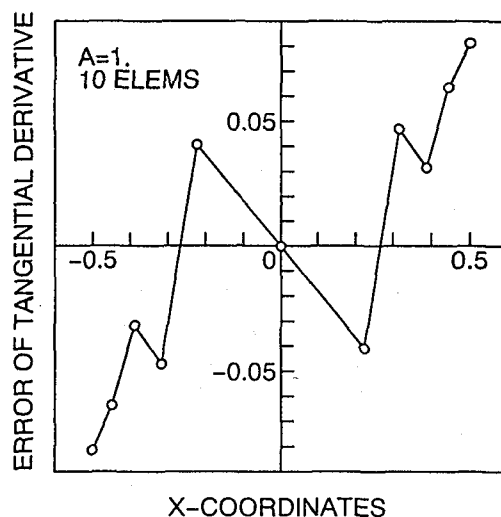


図-5 ϕ_s 節点誤差分布 (q が連続条件をみたす場合)

よって,

$$\int_{\Gamma} q \, d\Gamma = 0 \quad (25)$$

同様に,

$$\int_{\Gamma} \phi_s \, d\Gamma = 0 \quad (26)$$

式 (25) は Ω 内におけるベクトル場の連続条件の積分表示であり, 式 (26) は速度ポテンシャル ϕ の連続条件である. すなわち, 式 (16), (17) または (22) における境界要素解は付帯条件として, 式 (25), (26) の連続条件をみたす必要がある. なお, 通常の境界要素方程式においては, q に対し式 (25) のような条件を課す必要はなく, この条件は ϕ_s と q に関する境界要素方程式に特有のものである.

ϕ_s, q が連続条件をみたさない場合の結果を解析例で示す. 解析条件には, 図-2 の問題において, 全境界で q を規定したものを用い, 式 (17) より ϕ_s を求めた. 自由水面の分割を左右対称な不等分割とし, 式 (25) の連続条件を特に考慮せず, q の節点値に真の値を用いた場合と, 同一の不等分割の下で, 式 (25) の連続条件の離散化式が成り立つように q の節点値を補正した場合の 2 ケースに対する, 自由水面上の ϕ_s の節点誤差分布をそれぞれ図-4, 5 に示す. なお, 図は各辺 10 要素分割の場合であり, 壁面では一様分割としている. また, 前者では, 不等分割点における q に真値を与えているので, その補間で与えられる区間一次関数は式 (25) をみたしていない. 図-4 より, 連続条件が課されない場合, かど点において非常に大きな誤差が生じており, 分割が対称であるにもかかわらず, 非対称解が得られ, 節点誤差が非対称となっていることがわかる. なお, 要素数を増やして計算してみたが, この非対称性は次第に改善されて行くものの, かど点での精度はほとんど改善されなかった. 一方, q に連続条件を課した図-5 では, かど点で相対的に

誤差が大きくなっているものの, 全体に精度は良好で, 対称解が得られており, 連続条件が必須であることがわかる. なお, 本研究で構成するスロッシング解析過程における連続条件の具体的処理方法については次節で述べる.

4. スロッシング解析過程の構成

速度ポテンシャル導関数値の評価精度改善には, 高精度な数値微分を用いる方法の他に, 数値微分は用いず, 積分表現⁶⁾や積分方程式による手法が考えられる. 著者らは以前, ϕ_s と q とを未知量とした境界積分方程式により ϕ_s を求める解析手順を構成した¹⁾. この方法による場合, 一次要素における ϕ_s の収束次数は 3 次となり, 3 次関数補間に基づく数値微分程度のオーダーの精度を得ることができた. しかし, q の計算には通常用いられる境界要素方程式を用いる必要があり, ここでの解の収束次数が一次要素において 2 次となり, ここで生ずる誤差が支配的となるため, 結局全体の解析精度の向上までには至らなかった.

文献 1) における手法の問題点は, 自由水面の q の評価のために ϕ と q に関する通常の境界要素方程式を用いた点にある. 本論文では, そこでの結果を踏まえ, 解析精度向上に向け, 解法を構成する.

4.1 基礎方程式

図-6 に示すような二次元容器内のスロッシング問題を考える. 液体を非粘性, 非圧縮とすると, 非回転場における液体の速度場は, 速度ポテンシャル ϕ の導入により, その勾配場で与えられることとなる. また, 支配方程式は次の Laplace 方程式で与えられる.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (27)$$

自由水面 Γ_f 上では, 流体粒子の運動学的条件式と圧

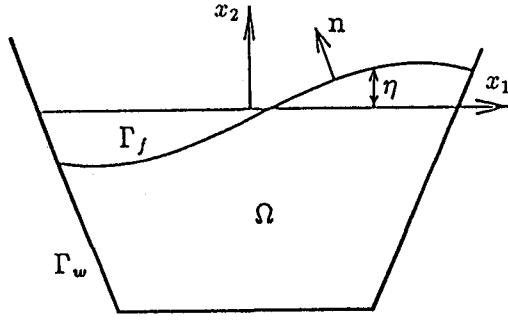


図-6 解析領域の定義

力方程式とが境界条件として課される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{Dx_i}{Dt} &:= u_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, (i=1,2) \\ \frac{D\phi}{Dt} &= \frac{1}{2}|\nabla \phi|^2 - g\eta \end{aligned} \right\} \quad (\text{on } \Gamma_f) \quad (28)$$

ここで、 D/Dt は物質微分、 u_i は x_i 方向の流体粒子速度、 g は重力加速度、 η は静止水面からの高さである。

壁面 Γ_w においては、壁面の運動が規定されているものとし、壁面と流体粒子との運動学的適合条件より、流束 q に次の境界条件が課される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} := q = \bar{q} \quad (\text{on } \Gamma_w) \quad (29)$$

ここで、 $\bar{q}$ は壁面の運動により規定された流束値である。

4.2 解法の基本構成

自由水面の移動の追跡には、境界要素節点を流体粒子に固定して計算を進める Lagrange 記法を用いる。本研究におけるスロッシング解析法の基本構成は次のようなものである。

まず、時間積分には 4 次の Runge-Kutta 法を用い、時刻 t から $t+\Delta t$ の 1 ステップ間の計算で、中間時刻 $t = \Delta t/2$ においても方程式を解く方法を採用した。このスキームは陽解法であるので、式 (28) の圧力方程式に基づき前ステップの解から新たな時間ステップにおける ϕ を更新することができる。自由水面で ϕ が与えられたならば、4 次の Lagrange 補間に基づいた数値微分により、各節点における ϕ の接線方向導関数 ϕ_s の値を求める。ただし、数値微分の評価には Grilli ら⁷⁾と同様に、5 つの連続した節点の内の中央に位置する節点に評価点を取り、補間区間を評価節点と共に移動させる方法を用いる。なお、評価節点が自由水面端およびそれに隣接する節点である場合、評価点を連続する 5 節点の中央にとることができない。したがって、この場合には、自由水面端から 5 つ目までの節点で Lagrange 補間を行い、当該節点での数値微分を求める。また、境界要素方程式の係数行列成分の計算や、 ϕ_s の評価には、境界節点における単位法線 (接線) 方向ベクトル成分が必要となる。本手法では、これらの値も 4 次の Lagrange 補間に基づ

いて求める。また、壁面においては式 (29) より流束規定値 $\bar{q}$ を与える。

以上より、 Γ_f 上では ϕ_s が、また Γ_w 上では q が規定されることとなるので、式 (22) に示した ϕ_s と q に関する境界要素方程式により、この混合境界値問題を解けば、 Γ_f 上の q を求めることができる。

以上の手順で本研究におけるスロッシング解析手法が概ね構成されることとなるが、境界要素方程式におけるかど点処理や、式 (25),(26) に示した ϕ_s と q の連続条件の処理などがさらに必要である。そこで以下に、本研究で用いたこれらの処理方法について述べる。

4.3 境界要素方程式

境界要素には境界形状と同様に、区間一次関数を用いる。境界要素総数を N_w 、自由水面端を除くかど点総数を N_c とすると、かど点で ϕ_s, q を不連続とする場合、自由水面端の節点値と合わせ、境界値の自由度は $N_w + N_c + 2$ となる。このときの境界要素方程式は式 (22) より次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{ff} & -\mathbf{A}_{fw} \\ \mathbf{A}_{wf} & \mathbf{G}_{ww} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_f \\ \phi_{sw} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_f \\ b_w \end{Bmatrix} \quad (30)$$

ただし、

$$\begin{Bmatrix} b_f \\ b_w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ff} & -\mathbf{G}_{fw} \\ -\mathbf{G}_{wf} & -\mathbf{A}_{ww} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_{sf} \\ \bar{q}_w \end{Bmatrix} \quad (31)$$

ここで、 $(\cdot)_f, (\cdot)_w$ はそれぞれ Γ_f, Γ_w 上の節点に関する値である。なお、ベクトル $\{q_f, \phi_{sw}\}$ の自由度は $N_w + N_c + 2$ であり、自由水面要素数を N_f とすると、部分ベクトル $\{q_f\}$ の成分は $N_f + 1$ 個となる。

4.4 ϕ_s と q の連続条件式

各境界節点で境界値に関して与えられる補間関数を $\psi_i (i=1, \dots, N_w + N_c + 2)$ とすると、式 (25),(26) の連続条件は次式のように書ける。

$$\begin{aligned} \sum_i \int_{\Gamma} \psi_i d\Gamma q_i &= 0 \\ \sum_i \int_{\Gamma} \psi_i d\Gamma \phi_{si} &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

ここで、 q_i, ϕ_{si} は q および ϕ_s の節点 i における節点値である。

式 (32) で既知量を右辺へ移項すれば、以下の二方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1f} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{2w} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_f \\ \phi_{sw} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \quad (33)$$

ここで、 $\mathbf{C}_{1f}, \mathbf{C}_{2w}$ は式 (32) の係数成分より構成される行ベクトルであり、 d_1, d_2 は ϕ_s と q の規定値より得られる値である。

なお、速度ポテンシャルと流束に関する境界要素方程式を用いた通常の解法では、連続条件が陽に課されない。一方、本手法では、式 (33) を課しているため、解は質量保存をみたしたものとなる。

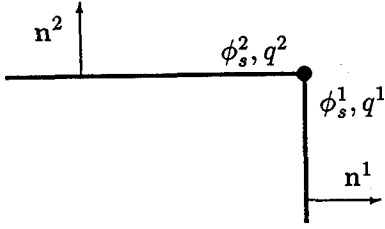


図-7 かど点における諸量の定義

4.5 かど点における ϕ_s, q の適合条件式

境界上の選点を要素端点にとる場合、式(30)で得られる方程式の総数は最大で N_w である。よって、式(33)で与えられる ϕ_s と q の2本の連続条件式を付加しても、方程式総数は未知量の総数より N_c 少ない。これは、かど点において境界値の未知量が2つずつ存在するのに対し、境界要素方程式が1つしか与えられていないことによるものであり、何らかのかど点処理が必要である。

かど点処理の1つとして、かど点におけるポテンシャル勾配の一価性に基いた適合条件式を用いる方法がある。Grilli and Svendsen⁸⁾はこの条件を自由水面問題のかど点処理に用いている。ただし、文献8)では ϕ と q に関する通常の境界要素方程式を用いているので、壁面上のかど点のように、かど点に接する両境界上で流束が規定されている場合は、単に速度ポテンシャル ϕ のかど点における連続条件のみが課されることとなり、 ϕ より与えられる ϕ_s と q に関する適合条件は考慮されなくなる。一方、本研究では、境界要素方程式における未知量が ϕ_s と q であるので、壁面上のかど点においても、適合条件を課すことができる。

以下に、かど点において適用される適合条件を示す。図-7に示すようなかど点において ϕ の導関数 $\partial\phi/\partial x_1, \partial\phi/\partial x_2$ は一意に存在する。このとき、 ϕ_s, q は、かど点に隣接した両境界上で、次式により与えられる。

$$\left. \begin{aligned} q^i &= \frac{\partial\phi}{\partial x_1} n_1^i + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} n_2^i \\ \phi_s^i &= \frac{\partial\phi}{\partial x_1} s_1^i + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} s_2^i \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2) \quad (34)$$

ここで、 $(\cdot)^i$ は i 番側の境界上における値であり、 n_j^i, s_j^i は法線および接線方向の単位ベクトル成分である。

式(34)で $\partial\phi/\partial x_i$ を消去すると次の ϕ_s と q に関する適合条件式を得る。

$$\begin{Bmatrix} \phi_s^1 \\ \phi_s^2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{n_1^1 n_2^2 - n_2^1 n_1^2} \begin{bmatrix} -n^1 \cdot n^2 & 1 \\ -1 & n^1 \cdot n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{Bmatrix} \quad (35)$$

ここで、 $\cdot$ は内積である。

4.6 最終的な方程式の構成

式(35)の ϕ_s と q に対する適合条件式は、基本的に各かど点で2つずつ与えられる。したがって、自由水面端

と壁面上の N_c 個のかど点全てにおける適合条件式を採用したとすると、合計で $2(2 + N_c)$ 個の方程式が得られることとなる。よって、全ての要素端点における境界要素方程式を用いる場合、式(33)の連続条件式と合わせ、方程式総数は $N_w + 2N_c + 6$ となる。一方、未知量総数は $N_w + N_c + 2$ であったから、この場合には未知量より方程式の数の方が多くなる。したがって、最終的な方程式系の構成には、使用する方程式の取捨選択が必要となる。本研究では、採用する方程式総数を調整し、未知量の数に合わせる方法と、連続条件式と適合条件式を付帯条件として、Lagrange 乗数を導入して方程式系を構成する方法の2ケースについて検討する。

(1) 方程式総数を未知量に合わせる方法(ケース1)

自由度総数は $N_w + N_c + 2$ であったので、各種方程式の数も、 $N_w, N_c, 2$ を基準に組合せを考える方が自然、且つ容易である。そこで、まず式(33)の連続条件式2本と、壁面かど点での適合条件式 $2N_c$ 本を採用する。この場合、未知量に対して、さらに $N_w - N_c$ 本の方程式が必要となる。全ての節点における境界要素方程式を用いると、 N_w 本の方程式が得られるので、その中からいづれか N_c 個の節点における方程式を除く必要がある。ところで、壁面のかど点では、流束が完全に規定されているので、適合条件式から ϕ_s の値を一意に決定することができる。そこで、壁面のかど点に対する N_c 本の境界要素方程式を除き、残りの $N_w - N_c$ 本の境界要素方程式を採用することとする。

以上より、 $N_w - N_c$ 本の境界要素方程式、 $2N_c$ 本の適合条件式および2本の連続条件式が用いられ、合計 $N_w + N_c + 2$ 本の方程式が得られ、求解可能となる。

(2) Lagrange 乗数を用いる方法(ケース2)

全節点における境界要素方程式を用い、連続条件式と、自由水面端を含む全てのかど点における適合条件式を付帯条件として、Lagrange 乗数を導入して方程式系を構成する。

なお、自由水面端のかど点においては、壁面側の流束 $\bar{q}_w$ と自由水面側の接線方向導関数 $\bar{\phi}_{sf}$ が与えられており、自由水面と壁面の法線ベクトル $\mathbf{n}_f$ と $\mathbf{n}_w$ とが直交しない限り、 $\mathbf{n}_f \cdot \mathbf{n}_w \neq 0$ となり、式(35)の2本の適合条件から未知量である q_f, ϕ_{sw} を決定することができる。しかし、鉛直壁の場合、壁面が一種の対称面となるので、幾何学的条件により、自由水面端は壁面に対して垂直になる。Grilli and Svendsen⁸⁾は、この条件を自由水面端の幾何条件に課している。本研究では、この条件を陽に用いてはいないが、解析において自由水面端の要素は鉛直壁に対して自然とほぼ垂直になるので、 $\mathbf{n}_f \cdot \mathbf{n}_w \approx 0$ となる。なお、 $\mathbf{n}_f \cdot \mathbf{n}_w = 0$ とした場合、かど点における適合条件式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\phi}_{sf} \pm \bar{q}_w &= 0 \\ q_f \mp \phi_{sw} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{複合同順}) \quad (36)$$

ここで、符号は左右の自由水面で異なる。式(36)から2つの未知量 q_f, ϕ_{sw} に関して1本だけ適合条件式が与えられることとなる。よって、 $\mathbf{n}_f \cdot \mathbf{n}_w$ がゼロの場合と、そうでない場合とで利用できる方程式数が異なってくる。本研究では、方程式の構成手順を簡潔にするために、自由水面かど点に対しては、式(35)のうち、次の一式だけを用いることとする。

$$\phi_{sw} = \frac{1}{n_{w1}n_{f2} - n_{w2}n_{f1}} [-\mathbf{n}_w \cdot \mathbf{n}_f \quad 1] \begin{Bmatrix} \bar{q}_w \\ q_f \end{Bmatrix} \quad (37)$$

最終的な方程式系は、式(33)の連続条件式、壁面かど点に対する式(35)の適合条件式、および自由水面かど点における式(37)の適合条件式を付帯条件として構成する。すなわち、境界要素方程式

$$[\mathbf{K}]\{x\} = \{b\} \quad (38)$$

を、式(33),(35),(37) からなる付帯条件

$$[\mathbf{C}]\{x\} = \{d\} \quad (39)$$

の下で解く。ここで、 $[\mathbf{K}], \{b\}$ は式(30)で与えられる境界要素方程式の係数行列と、既知ベクトル、 $\{x\}$ は未知な境界節点値ベクトルである。なお、 $[\mathbf{K}]$ は $N_w \times (N_w + N_c + 2)$ の長方形行列である。

式(39)の条件をみatus $\{x\}$ に対しては、一般に式(38)の等式は成り立たない。そこで、式(38)の残差ベクトル $\{r\}$ を

$$\{r\} := [\mathbf{K}]\{x\} - \{b\} \quad (40)$$

と定義し、 $[r]^t \{r\}$ が最小となるように方程式を構成する。すなわち、Lagrange 乗数ベクトル $\{\lambda\}$ を導入し、

$$J = [r]^t \{r\} + 2[\lambda]^t \{Cx - d\} \quad (41)$$

の停留条件を導く。

すると、最終的な方程式系として次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^t \mathbf{K} & \mathbf{C}^t \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{K}^t b \\ d \end{Bmatrix} \quad (42)$$

5. 解析例に基づく検討

5.1 矩形容器内の自由振動解析

(1) 解析条件

解析例として図-8に示すような矩形容器内の定常スロッシング問題を用いる。初期条件には、次式による自由水面形状を与え、重力作用下での自由振動応答を解析する。

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(x, 0) = & (A + \frac{1}{32}A^3 - \frac{47}{1344}A^5) \cos x \\ & + (\frac{1}{2}A^2 - \frac{79}{672}A^4) \cos 2x \\ & + (\frac{3}{8}A^3 - \frac{12563}{59136}A^5) \cos 3x \\ & + \frac{1}{3}A^4 \cos 4x + \frac{295}{768}A^5 \cos 5x \end{aligned} \quad (43)$$

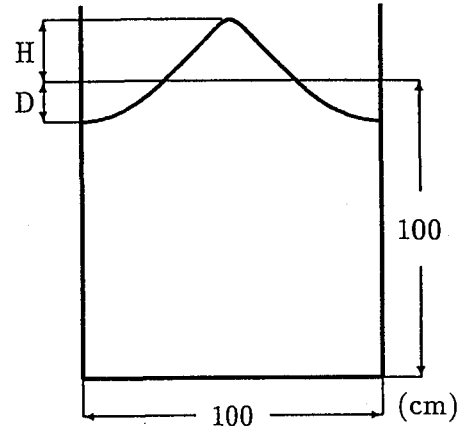


図-8 矩形容器内のスロッシング問題における解析条件

ここで、 A は振幅に関するパラメータであり、 x は無次元化した水平座標である。

式(43)を初期の水面形状に持つ、無限水深での定常応答解が Penney and Price⁹⁾により解析的に求められている。本解析では有限水深の問題に式(43)の初期水面形状を与えているが、水深が十分に深いので、無限水深に対する応答との差は無視できる。したがって、解の精度は文献9)に与えられた解析解に基づき、水面形状に関する次のノルムで評価した。

$$Norm = \sqrt{\frac{\sum_{Step} \sum_{Node} (\eta - \bar{\eta})^2}{\sum_{Step} \sum_{Node} \bar{\eta}^2}} \quad (44)$$

ここで、 η は境界要素解における各節点での自由水面高さ、 $\bar{\eta}$ は解析解であり、 $\sum_{Step} \sum_{Node}$ は各時間ステップ、および各節点についての総和を意味する。

なお、以下の全解析において、時間ステップ幅は0.002 Secとし、500 Stepまで計算を行った。また、自由水面における初期分割には、水平軸に対して一様な分割を与えた。壁面では、全ステップに亘り、側壁を10要素、底面を5要素で等分割した。

(2) 解の精度と収束次数

式(43)において $A = 0.01$ とした問題における、自由水面要素数と $Norm$ との関係を図-9に示す。なお、 $A = 0.01$ における波高は図-8に定義した値に対し、 $H=0.16(\text{cm}), D=0.158(\text{cm})$ であり、線形微小振幅に近いものとなっている。図には前節に説明したケース1とケース2に対する結果に加え、自由水面の q の評価に ϕ と q に関する境界要素法を用いた従来型の解法における結果も示した。従来手法では要素数に対する収束次数が2次であるのに対し、本手法では3次に近い収束次数が得られている。また、精度で比較しても、全ての要素分割数に対し、本手法を用いたことによる大幅な改善が認められる。一方、ケース1とケース2を比較してみると、いずれもほぼ同様の収束性が得られているが、ケース1による方が精度自体は良く、その傾向は要素数

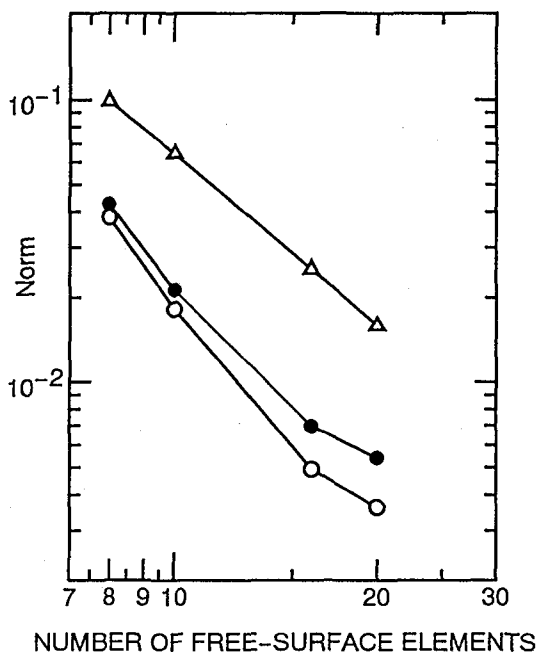


図-9 自由水面要素数と解の精度 ($A = 0.01$). ケース 1:○, ケース 2:●, 従来法:△

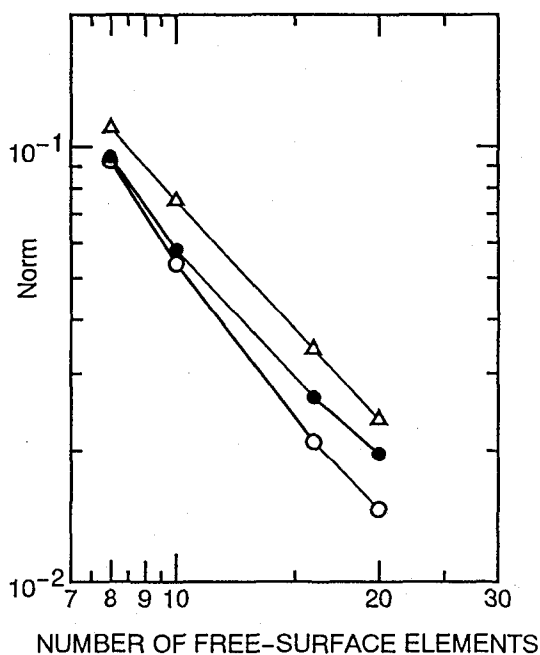


図-10 自由水面要素数と解の精度 ($A = 0.4$). ケース 1:○, ケース 2:●, 従来法:△

の増加と共に次第に顕著に現れている。このことから、かど点での適合条件を完全に満たすことよりも、各選点での境界要素方程式の残差をゼロにとる方が、精度の向上には重要であることがわかる。

次に、 $A = 0.4$ とした問題に対する結果を図-10 に示す。なお、 $A = 0.4$ とした場合の波高は、 $H=8.16(\text{cm})$, $D=5.438(\text{cm})$ である。本手法をこの問題に適用したところ、自由水面形状に短波長成分の発生が認

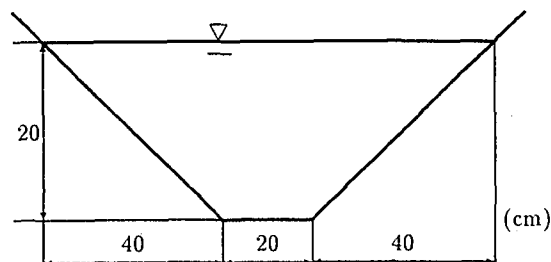


図-11 台形容器内の強制振動問題における解析条件

められ、最後まで計算を進めることができなかった。原因は明かでないが、従来手法ではその様な不安定解は生じていないので、 ϕ_s と q とに関する境界要素方程式に関係していると思われる。ちなみに、文献 2) に構成した解法においては、自由水面の ϕ_s を求めるために ϕ_s と q に関する境界要素方程式を用いたが、その際に今回のような不安定性は認められなかった。ここでは、解の安定性を確保するために、自由水面要素の一樣再配置と境界値および水面形状に対するスムージング処理¹⁰⁾を 50 Step に 1 回ずつ導入した。図-10 を見ると、問題の非線形性により、従来法を含め、いずれの手法においても解の収束次数が $A = 0.01$ の場合より低下している。 $A = 0.01$ の場合ほど顕著な精度改善は認められないが、いずれの要素分割数に対しても従来法に比べ精度が向上している。また、この問題においても、ケース 1 の方がケース 2 よりも良好な結果を与えている。

5.2 台形容器内の強制振動応答解析

図-11 に示すような、逆台形状の容器に次式で与えられる強制振動を加えた場合のスロッピング解析に、ケース 1 の手法を適用した。

$$u_x = A \sin \omega t \quad (45)$$

ここで、 u_x は容器の水平移動量、 A は振動振幅、 ω は角振動数 (rad/sec) である。解析条件として、 $A=0.003(\text{m})$, $\omega=3.55(\text{rad/sec})$ とし、自由水面を 10 要素で分割し、 $\Delta t=0.005(\text{sec})$ の下で 4000 Step (20 sec) まで計算した。なお、リメッシングとスムージングは 40 Step に 1 回ずつ行った。右側自由水面端の鉛直方向移動量を図-12 に示す。なお、図には 20 Step 毎の応答を白丸でプロットした。鉛直方向移動量は 7 cm 近くまで達しており、水平方向へは約 14 cm 移動していることになる。図より、本問題のように、逆台形状の容器において、自由水面端が水平方向に大きく移動するような場合でも、本手法が十分適用可能であることが確認できる。また、解析対象時間内で左右に最も大きく振動している 3740 Step と 3900 Step における自由水面形状を示すと図-13 のようである。なお、図は鉛直方向に拡大している。図中の白丸は節点位置を示しているが、一樣再配置を併用しているため、節点の局在は生じていない。

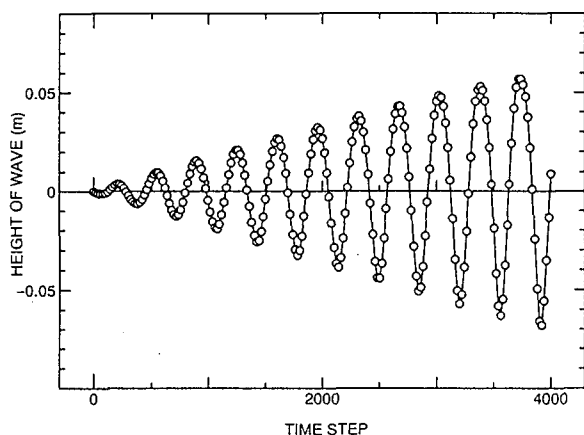


図-12 自由水面端の鉛直移動量

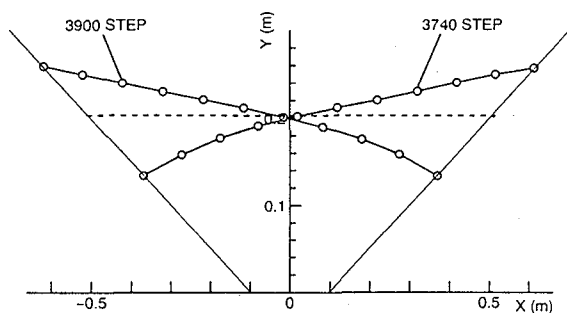


図-13 自由水面形状

6. おわりに

速度ポテンシャルの境界接線方向導関数 ϕ_s と流束 q に関する境界要素方程式を用いた二次元スロッシング解析手法を構成した。離散化の対象とした ϕ_s と q に関する境界積分方程式は対数程度の弱い特異性しか持たないので、境界形状と境界値関数の両方共、区間線形関数で近似することができ、係数行列成分の計算も容易に行うことができた。

線形スロッシングモードに対応したポテンシャル問題に適用した結果、速度ポテンシャル ϕ と q に関する通常の境界要素方程式における解の収束次数が2次であるのに対し、 ϕ_s と q に関する境界要素方程式では3次の収束次数を得ることができ、精度自体も大幅に向上することがわかった。

本研究で用いた境界要素方程式において良好な解を得るためには、 ϕ_s と q における連続条件を確保する必要がある。そこで、この連続条件を拘束条件に持つ方程式系として、境界要素方程式と連続条件式および壁面かど点

における ϕ_s と q に関する適合条件式を連立し、求解に必要な数の方程式を確保する方法(ケース1)と、連続条件式とかど点の適合条件式を付帯条件としてLagrange乗数を導入し、方程式を構成する方法(ケース2)を考えた。矩形容器内の自由振動解析に適用した結果、ケース1,2共に従来法より精度が向上することがわかった。特に、振幅が小さく線形応答に近いような問題では、要素数に対する解の収束次数が3次となり、通常の境界要素法を用いる従来手法より1次高い収束性が得られることがわかった。なお、ケース1と2を比較すると、ケース1による方がより高い精度を得ることができた。また、逆台形状容器内の強制振動解析を通し、壁面が傾斜した問題でも良好な結果が得られることがわかった。

これまで、要素次数を上げたり、スプライン補間を用いることで自由水面問題の解析精度や収束次数を向上させる研究がいくつかなされて来ているが、要素次数を上げず、通常多用される C^0 連続な要素を用いても、境界要素方程式を工夫することで、解析精度の改善を図ることができた。

参考文献

- 1) 阿部和久・RUSBANDI:導関数を未知量とした境界要素方程式のスロッシング問題への適用, 境界要素法論文集, 第11巻, 125-130, 1994.
- 2) Athanasiadis, G., Direct and indirect boundary element methods for solving the heat conduction problems, *Comp.Meth.Appl.Mech.Eng.*, 49, 37-54, 1985.
- 3) Ortiz, J.C. and Douglass, S.L., Water wave modeling using a boundary element method with Overhauser spline elements, *Boundary Elements XIII* (eds. Brebbia, C.A. and Gipson, G.S.), 273-282, CMP, 1991.
- 4) Ghosh, N. et al., A new boundary element method formulation for linear elasticity, *J.Appl.Mech.*, 53, 69-76, 1986.
- 5) Choi, J.H. and Kwak, B.M., A boundary integral equation formulation in derivative unknowns for two-dimensional potential problems, *J.Appl.Mech.*, 56, 617-623, 1989.
- 6) Sugino, R. and Tosaka, N., Direct differentiation approach to boundary element method for nonlinear water problems, *Boundary Element Methods* (eds. Kobayashi, S. and Nishimura, N.), 314-322, Springer-Verlag, 1992.
- 7) Grilli, S.T., Skourup, J. and Svendsen, I.A., An efficient boundary element method for nonlinear water waves, *Eng.Anal.Bound.Elem.*, 6, 97-107, 1989.
- 8) Grilli, S.T. and Svendsen, I.A., Corner problems and global accuracy in the boundary element solution of nonlinear wave flows, *Eng.Anal.Bound.Elem.*, 7, 178-195, 1990.
- 9) Penney, W.G. and Price, A.T., Part II, Finite periodic stationary gravity waves in a perfect liquid, *Trans.R.Soc.Lond., A*, 244, 254-284, 1952.
- 10) Longuet-Higgins, M.S. and Cokellet, E.D., The deformation of steep surface waves on water I. A numerical method of computation, *Proc.R.Soc.Lond., A*, 350, 1-26, 1976.

(1995年9月18日 受付)