凸な複合領域の六面体要素分割とより複雑な領域へのその展開

HEXAHEDRAL MESH GENERATION OF CONVEX COMPOSITE DOMAIN AND ITS EXTENSION TO NONCONVEX SYSTEM

谷口健男*, 片桐弘樹**, 郷田智章**
By Takeo TANIGUCHI, Hiroki KATAGIRI and Tomoaki GODA

*工博 岡山大学教授 環境理工学部環境デザイン工学科 (〒700 岡山市津島中2-1-1)
**岡山大学大学院生 工学研究科 修士課程 (〒700 岡山市津島中3-1-1)

In this paper hexahedral mesh generation methods are proposed for a convex domain which consists of a number of convex subdomains. Proposed methods are based on the Delaunay triangulation and the concept of primitives, and as the input data they require only the location of planes which define whole domain and subdomains. Theoretical investigation is also given in this paper for the extension of the proposed methods to nonconvex cases, and several ways for this aim are shown.

Key Words : *Delaunay triangulation, Hexahedral mesh, Composite domain, Convexity Degeneracy*

1. まえがき

電算機の性能の向上，数値解析ソフトウエアーの開発，それと同時にユーザのより複雑な力学現象解明への要求とあいまって，３次元領域を対象とする有限要素解析は今日では日常茶飯事となった．また，解析対象となる領域はただ単に幾何学的に複雑であるばかりでなく，異なった物理定数をもった複数個の部分領域からなる複合領域もその対象となりつつある．対象が２次元から３次元に展開するに伴い，有限要素解析におけるプリ・プロセッシング，特に要素分割の自動化は不可欠であり，従って３次元複合系といったさらに幾何学的に複雑な対象では自動要素分割法なくしてはその数値解析はほとんど不可能といっても過言ではない．同時に数値解の精度向上の観点より要素の形状として四面体よりも六面体要素の方が好ましい．

この様な複合系の要素分割を考えると，以下に示すような諸要求を満足させることが必要である．

(１) 部分領域を六面体要素に分割できること．
(２) 相隣りあう部分領域の表面は同じ四辺形分割を有すること．
(３) 要素の幾何学性質が良好であること．

さらに，場合によってはいくつかの部分領域を貫く形で構造物が配置されていることも予想され，その場合それの１次元要素への分割も同時に要求される．以上のように，複合系での要素分割は１次元，２次元，３次元要素分割の混合となる．

六面体要素分割法として今日までに提案されている方法は，Blacker他[1)]，Schneiders他[2)]，Tam & Armstrong[3)]，Eiseman他[4)]，Magnan他[5)]，Taniguchi他[6)]等が挙げられる．Blacker他の方法はアドバンシング・フロント法[7)]の修正とも言うべき方法，すなわち３次元体表面より内部に向けて要素を順次生成する方法であるが，未完成な手法でしかない．Schneiders他の方法は逆アドバンシング・フロント法と言える方法であって，領域内部より表面に向かって六面体要素を生成する方法であり単一領域に対して有効であるが複合系に対しては利用できない．Tam & Armstrongの方法は領域を限定された形状の部分領域(primitives)に分割し，その後部分領域を六面体に変換する方法であるが，その適用に際しては対象系のもつ位相幾何学的条件に注意を払う必要がある．Eiseman他とMagnan他の方法もTam & Armstrongの方法と同様に複雑な対象系をある程度簡単なブロックに分割するblocking法を基本として対象を六面体要素に分割する方法であり，実際に利用するには非常に多くの手間と時間を要する方法である．Taniguchi他の研究はデローニー三角分割[8)]を基にしていることより，対象をまず四面体ブロックに分割し，その後六面体要素を作り出す方法である．かれらはこの方法を基にして，既に複合系に適用できる手法を提案している．以上のように，複合系に対して適用できる要素分割法はTaniguchi他の方法しか見あたらないのが現状である．

四面体，六面体といった要素形状にかかわらず，複合領域の要素分割の困難さの原因は上記(２)にある．例え個々の部分領域を六面体に分割できたとしても，その表面上の要素分割が隣接する部分領域の表面の要素分割に一致しなければならず，このことは個々の部分系の要素分割を独立して行うことができないことを示唆している．この問題を解決しているのがTaniguchi他

[6]の方法である．しかしながら，彼らの方法はデローニー三角分割で得られた各四面体を直接４個の六面体に再度分割するにすぎず，最終的に得られる六面体の要素の寸法等は元の四面体要素の形状に支配されることになり，数値解析上あまり好ましいものではない．

以上の考察より，本研究では上記Taniguchi他の研究を基にして，より良い形状をもった六面体要素生成法を提案する．その後，より一般的な複合領域，即ち凸条件を外した場合，に対して適用できる方法について理論的な考察を加え，その六面体要素分割の可能性を示す．

2.　凸部分領域より構成される凸な複合領域の六面体要素分割

いま，いくつかの平面によって囲まれる一つの凸な領域を考える．この領域を分割するように複数個の平面を導入すると，全体領域は凸な部分領域の集合に分けられる．この時得られる部分領域の表面は凸多角形で覆われ，従って個々の凸部分領域は３個の平面の交点の集合でもって定義され得る．ここでは以上で定義したような複合領域全体の六面体要素分割法，すなわち個々の凸部分領域を六面体で，そして部分領域間の共有面を四辺形で要素分割する方法[6]の説明を行う．

上に示したように，全体領域のおよび個々の部分領域は凸であって，それら領域の形状は３個の平面の交点の集合でもって定義できることを考えると，このような領域に対する最も容易な要素分割法はデローニー三角分割であることは明らかである．いま，この方法の適用を考えると，

(１) 領域全体の点集合に対して直接デローニー三角分割を適用する．

(２) 個々の部分領域の頂点に対して適用する．

の２つの方法が考えられるが，それぞれ以下の問題点が発生する．(１)では全体領域を一括して要素(四面体)に分割できるものの，部分系間に位置する面が生成されない場合がある．言い換えると，デローニー三角分割の特徴として四面体分割は節点位置だけで決定されることより，得られた四面体の表面三角形では部分系の間に位置する平面を構成できない場合が発生する．一方，(２)では部分系の間に位置する平面は厳密に作成できるものの，個々の部分系を独立に分割することより，その表面の分割が隣り合う面の分割に一致する保証はない．前者の場合，得られた四面体分割を部分的に面を作り出せるように修正しなければならず，後者では互いに接し合ういずれか一方の部分系の分割の修正が要求される．今日までのデローニー三角分割法の研究成果を見ると，前者の問題を解決する方法は未だ提案されていない．一方，後者の問題については，Joe[9]の研究成果があり，彼の方法を用いて要素分割を一致させることは可能である．しかしながら，この方法を用いた場合，共有面上の分割結果を調べる必要があること，一致しない場合点を追加して要素分割の修正を行わねばならず，結果として演算時間の増加をもたらす．ここでは，これとは全く異なった，そして上に示したような欠点をなくした手法を提案する．

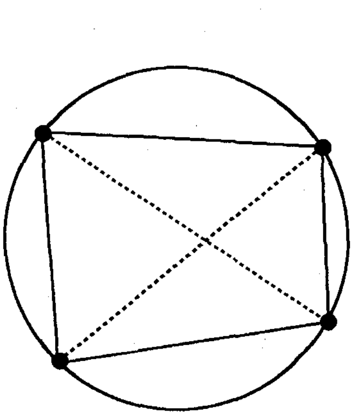
いま，対象とする領域全体が含む点数(３平面の交差点の数)をｎ，部分領域ｉに含まれる点数をｎ(ｉ)で示す．なお，ｎ(ｉ)は部分領域ｉの表面上に位置する点数であることは明らかである．この領域に対して座標系を設定して，その原点よりの距離(例えば最遠点から)でもってｎ個の点をソートする．部分領域ｉとｊが共有面(凸多角形)を有しているとすると，ソートの結果部分領域ｉとｊに含まれる点の順序の内，共有面上の頂点は同じ順序で出現することになる．例えば，共有面を四辺形｛ａ，ｂ，ｃ，ｄ｝とすると，ソートの結果，

n(i) ; {.,.,a,.,b,.,c,.,d,.,.}

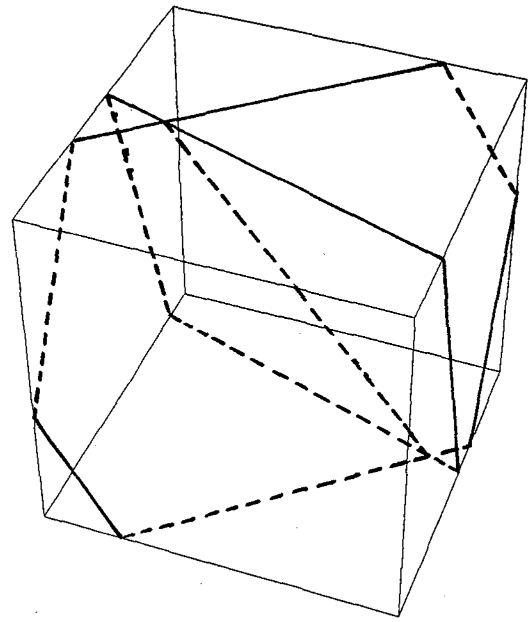
n(j) ; {.,.,.,a,.,.,.,.,b,.,c,.,.,d,.,.,.}

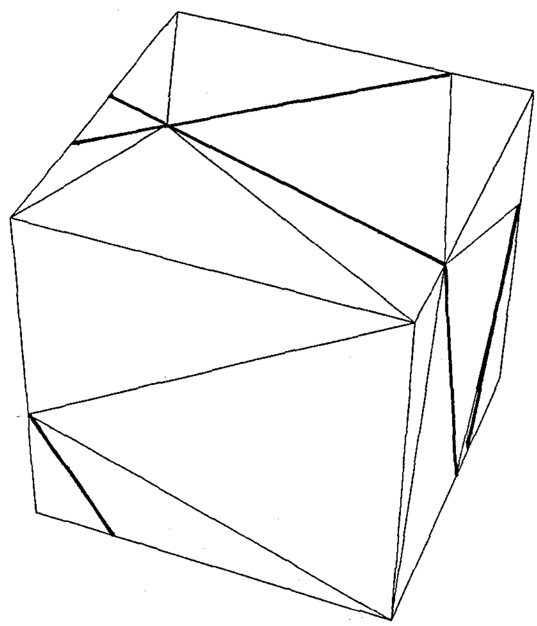
となる．第ｉおよびｊ部分領域を上で得られた点の順序で個別にデローニー三角分割を適用して四面体に分割した時，この共有面上に現れる三角分割が一致することを示せばよい．すなわち，もしｎ(ｉ)側でこの四辺形が２個の三角形，ａｂｃとｂｃｄ，に分割されれば，ｎ(ｊ)側でも同様に２個の三角形が形成されねばならない．

デローニー三角分割は理論的にはユニークな分割を保証する．なお，実際の演算では数値誤差の影響を考慮する必要がある．いま，第ｉ部分領域を考えると，その四面体分割はｎ(ｉ)個の点の座標でもって決定される．デローニー三角分割では得られた個々の四面体の外接球の内部には他の点を含まないことが知られている．いま，部分領域ｊとの共有面を含む平面でこれらの外接球を切断すると，共有凸多角形を構成する個々の三角形に対しては外接円となって現れることになる．従っ

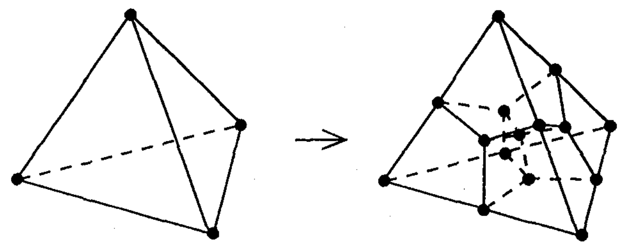


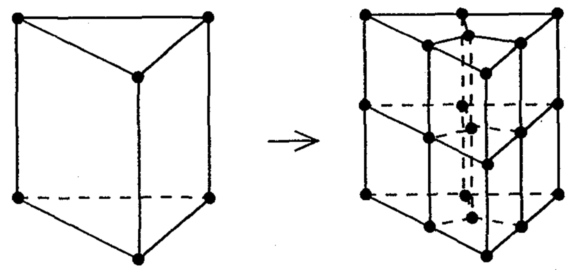
図−1　degeneracyの説明

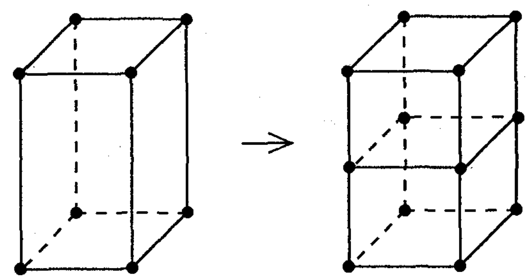

(a)


(b)

図–2 複合領域の四面体分割例


(a) 四面体


(b) 三角柱

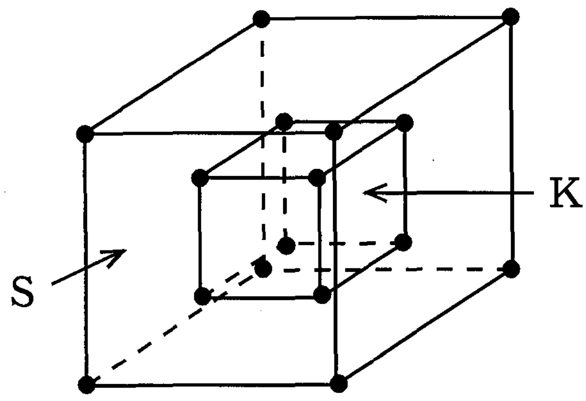

(c) 六面体

図–3 六面体分割可能な形状

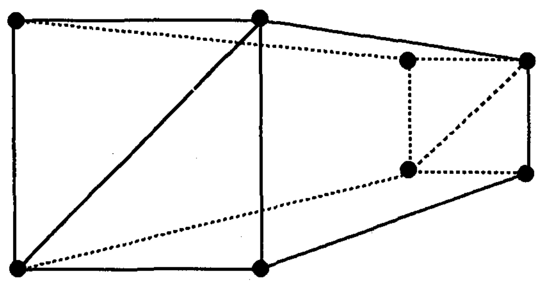
て，この多角形だけを取り出し，2次元デローニー三角分割を適用した結果得られる三角分割と，上で得られた共有面上の三角分割は一致することになる．このことは，3次元体の表面が凸多角形で覆われているとき，その表面の多角形の三角分割はその多角形の頂点の座標でもって決定されることを示している．次に，隣接領域 j の分割を考えると，同様に共有面(凸多角形)上の三角分割はその頂点座標で決定されることより，例え部分領域 j を部分領域 i と独立に三角分割を行っても，共有面上の分割は必ず一致することになる．

いま，この共有面上の三角分割が一致しなかったとしよう．この事実は次のことを示す．即ち，いま凸多角形の頂点の内いくつかの点が同一外接円上に位置する，いわゆる degeneracy[10] の場合である．一例を図1に示す．この様に4個以上の点が同一円周上に位置する場合，考えられる三角分割は複数個存在することになる．なお，この例では2個の解が存在する．従って，それら複数個の解の内特定の解を得るためには，デローニー三角分割のアルゴリズムを考慮すると，同じ節点順序でもって三角分割を行えばよい．よって上に示したような節点のソートの後，デローニー三角分割を行えば，例え個々の部分領域を独立に三角分割しても共有面では同じ三角分割結果を得ることが出来ることになる．

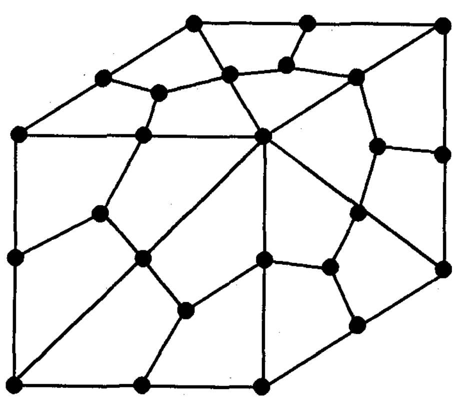
上に示した方法でもって四面体要素分割を行った一例を図2に示す．この例では立方体を対象に，2つの平面でもって4個の部分系を作り，それぞれにデローニー三角分割を適用したものである．同図では(a)複合系の全体図と(b)四面体分割後の表面上の三角形の状況を示す．なお，太線は平面の位置を示す．なお，利用した3次元デローニー三角分割法は文献[11]の方法である．



(a)



(b)

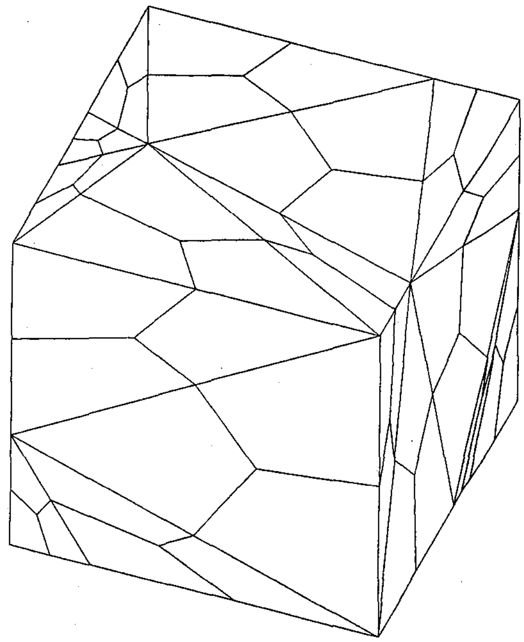


(c)

図–4 HEXGEN1 説明図

3. 六面体要素の生成

前節に示した方法を用いれば凸条件下の複合領域の四面体分割は可能であり，また個々の部分領域間に位置する面は全て三角形に分割できる．従って，残された問題は体積については六面体に，そして面については四辺形に作り直すことである．本節では四面体分割された複合領域から六面体要素を作り出す方法を示す．



図–5 HEXGEN1 適用例

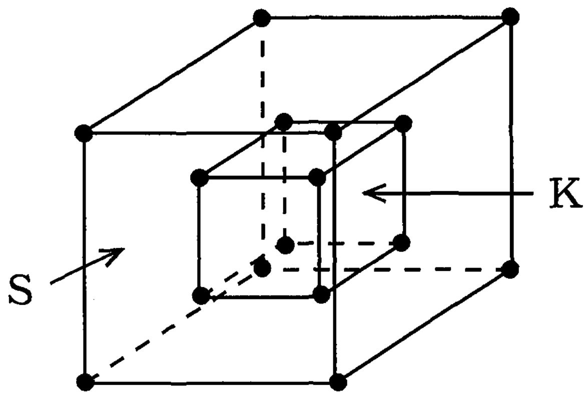
四面体，三角柱，六面体から六面体要素に細分割できることは良く知られている．(図３参照) もし，対象とする領域をこれら３種類の形状で分割することが出来れば，この図に示した方法で領域全体を六面体要素に分割できることは明らかである．前節の結果を用いて，全体領域およびそれを構成する部分領域が既に四面体に分割されていると仮定する．

いま，一個の部分領域，あるいはその一部を取り出し，それをＶで示す．Ｖを適当に縮小した相似形 (以降それを核と呼び，Ｋで示す．なお，縮小率は２分の１) を作り，ＫをＶの重心位置に置く．以上の操作によって，いま考えている領域Ｖは核部Ｋとその外部 (Ｖ表面とＫ表面の間に存在する部分であり，これを以降外皮部と呼び，Ｓで示す) に分けられる．Ｋは既に四面体に分割されていることより，残された領域Ｓを上に示した３種類の形状に分割する方法が必要である．なお，Ｓの分割で考慮しなけれなならないことは，いま考えている領域Ｖに隣接する部分領域との共有面上の分割である．すなわち，共有面上の分割は隣接する二つの領域の表面に共通でなければならない．以上の要求を考慮したとき，次のような方法が考えられる．

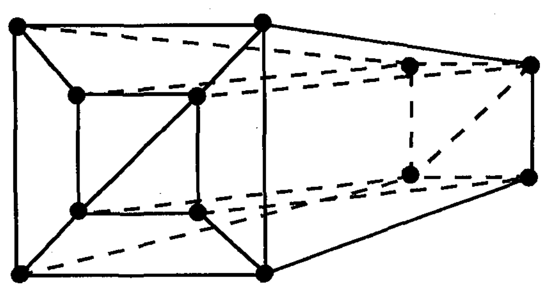
方法１：HEXGEN1

いま，Ｖとして凸多面体で覆われた１個の部分領域を考える．上で述べた方法で核Ｋを作り，領域Ｖを核Ｋと外皮部Ｓに分ける．

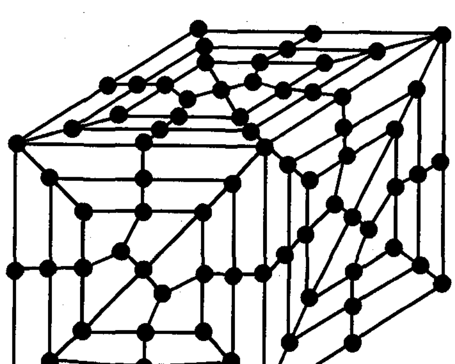
Ｋを作るとき，Ｖの表面にあった三角分割を残したままとすると，Ｖ表面とＫ表面には相似な三角分割が



(a)



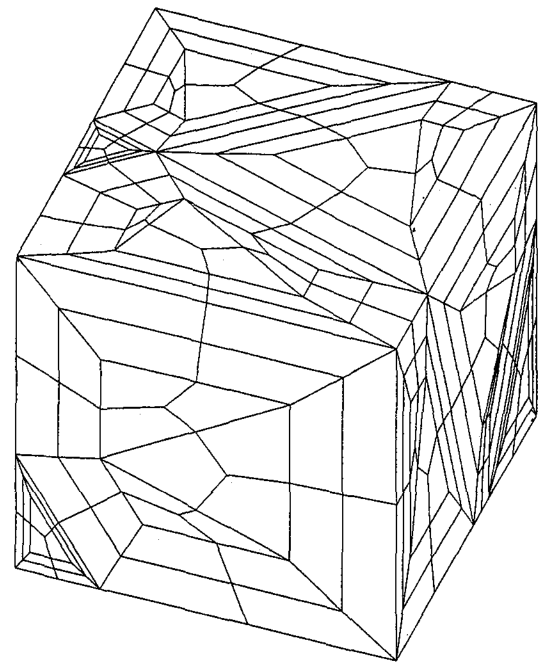
(b)



(c)

図–6 HEXGEN2 説明図

現れることより，互いに向かい合う２つの三角形を用いて三角柱を形成でき，結果として外皮部Ｓを三角柱だけで分割できることになる．その後，図３に示したように核部を構成する四面体の稜線，面，内部に点を追加して，１個の四面体より４個の六面体を作る．また，核の表面に隣接する外皮部Ｓに作り出された三角柱に図３に示したように節点を追加して，それを六面体要素に細分割する．



図–7 HEXGEN2 適用例

以上の操作によって，各部分領域を四面体から六面体に細分割できる．なお，ここに示した手法からも明らかなように，共有面上では既存の三角形から四辺形を作り出す方法を採用していることより，個々の部分領域を独立に扱ったとしても同じメッシュ分割が得られることになる．

この方法は図４に示されている．この図では簡単な形状を例に取り，(a) ではＶを核と外皮部に分けた状況を，(b) では外皮部の分割を，(c) ではＶ表面の四辺形要素分割の状況を示す．HEXGEN １の適用例を図５に示す．対象系は前節で使用した形状であり，図５では全体系の外部のメッシュ分割結果だけを表示している．なお，内部が厳密に六面体要素に分割できているかの検討は，以下の方法でもって自動的に行われている．

生成された六面体要素について，(１)その表面四辺形を調べて２回出現するものを消去する．その後(２)残された四辺形について，各辺が２回出現することを確認する．(１)で残された四辺形は対象系の表面全体を覆う四辺形であり，(２)の調査は対象系の表面上に位置する辺は互いに隣接する２個の四辺形に共有されることを利用したものである．

方法２：HEXGEN2

多角形で覆われた１個の部分領域Ｖを取り出し，上に示したようにＶを縮小して核Ｋを作り，Ｖの重心位置に設置する．なお，Ｖの表面の三角分割は取り除き，元の多角形だけをＶの表面上に残す．以上の操作によって，領域Ｖは核Ｋと外皮部Ｓに分けられる．なお，Ｋ

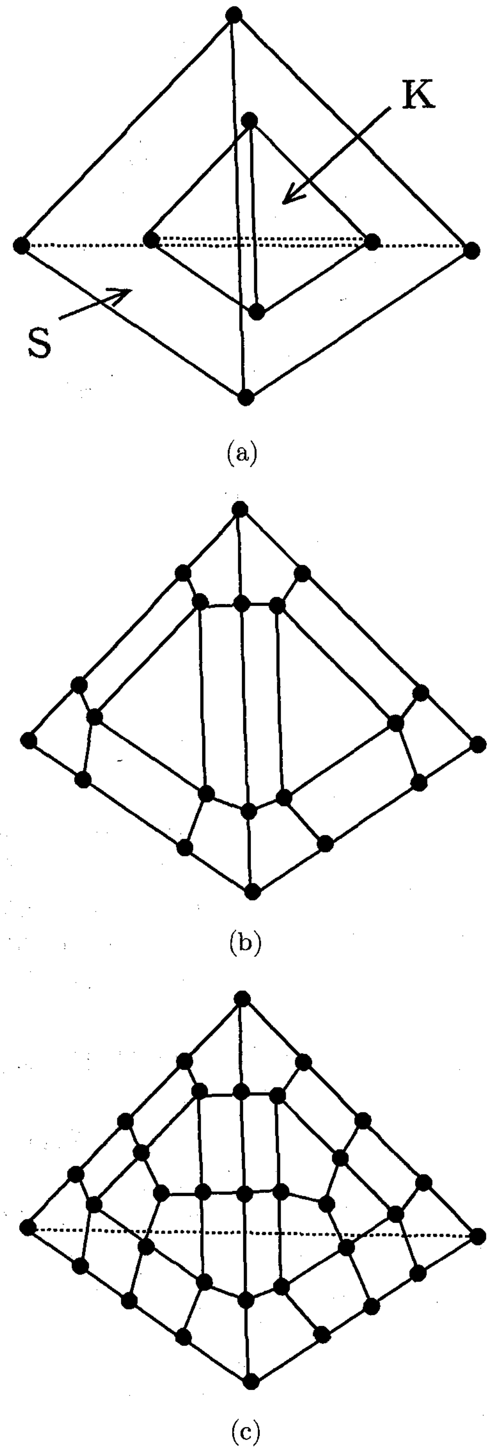


図-8 HEXGEN3 説明図

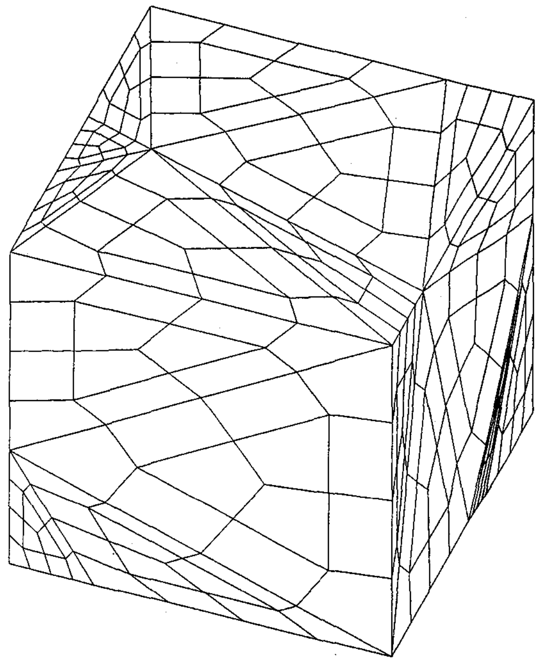


図-9 HEXGEN3 適用例

は既に四面体に分割されている．

V表面とK表面の相対する多角形同志を結合すると，外皮部Sは多角柱の集合に分割できる．次に，核の表面の多角形(三角形の集合)をその寸法を保ったままでVの元の多角形の重心位置に写像する．この写像を全ての多角形について行う．いま，得られた一対の多角形(K表面とV表面への写像)同志を結合すると，Sの中に多角形の数に等しい多角柱を作ることができ，Sはこの多角柱部とそれ以外の部分に分けられる．それぞれの多角柱は対となった多角形の三角形分割を用いて，三角柱に分割できる．

外皮部Sに最後に残された部分の分割を考える．V表面の元の多角形の頂点とその内に写像された多角形の相対する頂点同志，そしてKの表面の頂点を結合すると，この残されたSの部分は全て三角柱に分割される．以上により，Sは三角柱の集合として細分割できたことになる．

Kは四面体の集合として，Sは三角柱の集合として分割できたことより，図3に示した四面体と三角柱の六面体要素への細分割法を用いて，領域Vは全て六面体で分割できる．以上の操作を全ての部分領域について繰り返せばよい．

共有面上の分割を検討する．上に示したV表面の分割は元のデローニー三角分割を元にして，そして多角形形状を一義的に分割する方法である．従って，各部分領域を別個に六面体分割しても共有面上には同じ四辺形分割が出現することになる．

HEXGEN2の説明を図6に示す．この図ではHEXGEN1と同じ例題を対象として，(a)で核と外皮部の形成を，(b)で外皮部の分割を，そして(c)で最後に得られるV表面の要素分割を示す．また，同手法を前節で使用した3次元形状に適用して得られた六面体分割結果を図7に示す．なお，同図は表面上の四辺形分割結果だけを表示している．内部が厳密に要素分割できているかどうかの検討はHEXGEN1で示した方法で行っている．

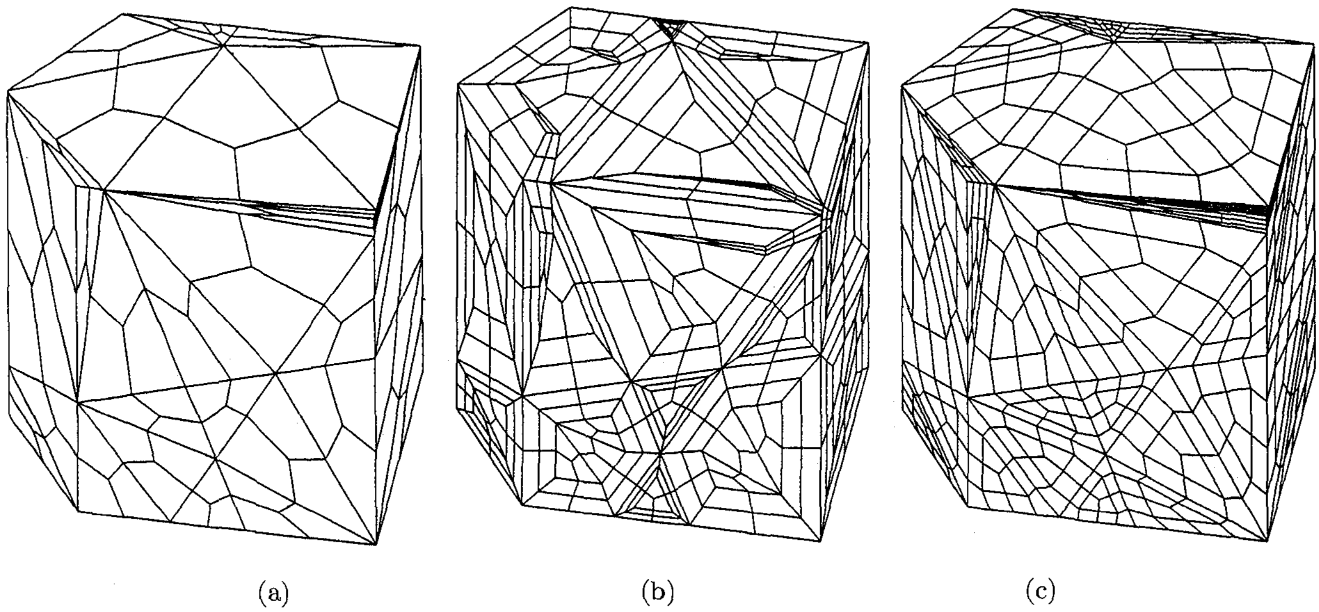


図-10　3手法の比較

方法３：HEXGEN3

扱う部分領域はデローニー三角分割で得られた１個の四面体であり，それをＶで表す．この四面体を縮小して核Ｋを作りＶの重心位置に置き，ＶをＫとＳに分ける．この場合，Ｋはただ１個の四面体で構成される．

Ｓの分割を考える．Ｋの表面の４個の三角形をその寸法を保ったままでＶ表面の４個の三角形の重心位置に写像する．Ｋ表面上の三角形といま写像して得られた三角形の像とを結合すると，Ｓ内部に計４個の三角柱を作ることが出来る．次に，Ｖ表面上の各稜線を４等分するように稜線長の１／４と３／４の位置に新しい点を置く．その後，これら新設点，写像して得られた三角形の頂点，そして核の頂点を結合すると，Ｓの部分でＶの頂点近傍に六面体を作ることが出来る．この結果，Ｖの稜線の残る部分に六面体が作成されることになる．

以上の結果，Ｖは核である１個の四面体，４個の三角柱，１０個の六面体に分割されることになる．図３に示したこれら部分領域の六面体要素への細分割法を適用すれば，領域Ｖは六面体要素に分割される．同じ操作を，全体領域の内部に生成された全ての四面体に対して繰り返せばよい．

部分領域間の共有面の要素分割の検討を行う．上の手法を用いれば，四面体の表面は全て同じトポロジーをもった四辺形集合に分割できることは明らかである．従って，共有面を構成する三角形(デローニー三角分割の結果得られる分割)の集合は一定の形で四辺形に細分割されることになる．

HEXGEN3を図示したのが図８である．同図(a)は核と外皮部の形成を，(b)は外皮部の要素分割を，(c)はＶ表面の要素分割結果を示す．また，この手法を用いて，前節に示した領域の六面体分割を行った結果を図９に示す．なお，同図は領域表面の四辺形分割結果だけを表示している．

本節において提案した３手法を異なった事例に適用したものを図１０に示す．ここに示した手法を用いた場合得られる六面体要素の特徴は次のようなものである．即ち，いずれの方法を用いても共有面に平行な六面体要素が必ず生成され，従って以前から利用されてきた六面体要素の生成，即ち図３(ａ)に示した四面体要素を直接４個の六面体要素に細分割する方法，よりも幾何学的に良好な六面体要素を作ることができる．このことは，多くの力学的挙動が境界面条件に支配されることより，ここに提案した要素生成法は文献6）の方法に比べて有効な方法である．

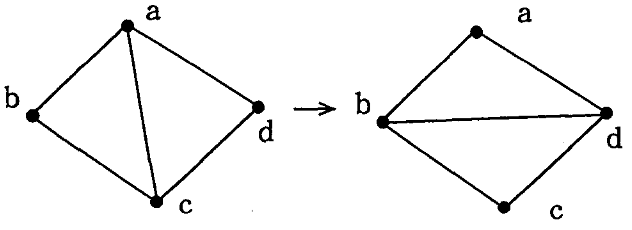
4.　非凸複合領域の要素分割に関する理論的検討

上に示した複合領域の要素分割の基本はデローニー三角分割である．この方法は点集合が支配する凸な空間を四面体の集合に分割することより，もし対象領域の形状がこの条件を満たさない場合には次のような結果を引き起こす場合がある．

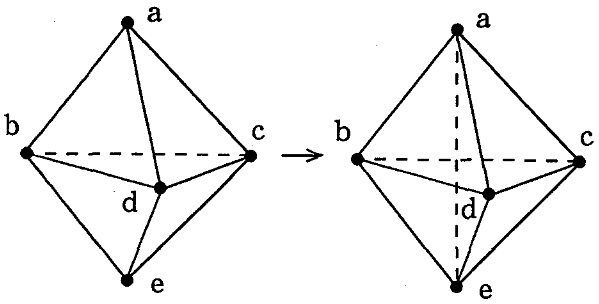
(１)要素生成が不要な箇所にも要素を生成する．

(２)対象領域の境界形状を壊すような四面体を生成する場合がある．

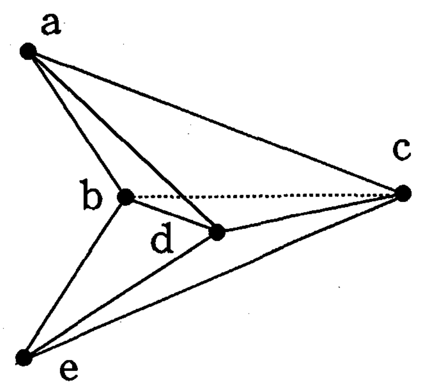
例え，(１)が満たされなくても(２)が満たされるような四面体要素の生成が可能であれば，領域の内と外の認識が可能となり，容易に不要な要素(領域の外部に生成



図–11　２次元スワッピング



図–12　３次元スワッピング



図–13　２つの四面体が非凸形状を構成する場合

された四面体要素）を排除することが可能である．従って，問題（２）の解決が重要となる．ここでは，この問題（２）の検討を行う．

デローニー三角分割法を想定していることより，対象とする３次元体表面およびそれを構成する部分領域の表面上に位置する点の座標が与えられていると仮定する．デローニー三角分割を用いれば，点の支配する凸空間を２次元の場合では三角形に，３次元では四面体に分割できる．対象領域が２次元の場合ではスワッピング手法と呼ばれる方法によって，容易にデローニー三角分割の結果を変更することが可能である[10]．図１１にその一例を示す．従って，デローニー三角分割でたとえ境界線が生成されていなくても，この方法を利用して境界線を修正・生成することが出来る．

３次元の場合では，図１２に示すように２個の四面体が凸領域を形成している場合では新しい面（この例では三角形，ａｂｅ，ａｃｅ，ａｄｅ）を作ることが出来る．これは３次元の場合でのスワッピングと言えるものである．一方，図１３に示すように２個の四面体が非凸領域を形づくっている場合において，そこに必要な面（この例では２個の頂点ａとｅを結び，３個の三角形，ａｂｅ，ａｃｅ，ａｄｅ）を新しく作る必要がある場合，それは第２節で既に指摘した問題に一致し，未解決である．従って，現時点では一般的には境界面を修正・生成しようとしても不可能となる．

デローニー三角分割法の特徴を考慮したとき，他の方法が存在することに気づく．デローニー三角分割は点の座標値よって四面体分割が決定されることより，（１）点を必要に応じて追加する，あるいは（２）点を適切な位置に移動させる，といった方法でもって，その部分での四面体要素分割の修正・変更が可能である．よって，適切な点の移動もしくは点の追加・設定を行えば，再度デローニー三角分割を適用して境界面を構成できるように四面体を生成させることは可能である．

上に示した方法によって，境界面上の点だけを用いた領域境界の生成と要素分割は可能となる．しかしながら，多くの場合得られた要素（この段階では四面体要素）のサイズは数値解析に適したものではなく，一般的に大きすぎる．従って，その後領域の内部に点を追加発生させ，より細かなメッシュを生成しなければならない．この細分割もデローニー三角分割を用いて行えるが，その適用においては既に生成された境界面（部分領域間の共有面を含む）の三角形を壊さないようにしなければならない．この方法として，（１）点配置に制約を付ける，（２）デローニー三角分割に制約を付ける，の２種類が考えられる．以上のように，非凸複合領域を対象とした四面体分割には未だ多くの問題点が残されているのが現状である．しかしながら，これらが解決すると，部分系を含め全ての領域が四面体に分割されることになり，従って前節で提案したHEXGEN3を用いて四面体要素から六面体要素に変換することができる．

5.　あとがき

本研究では複合領域を対象としてデローニー三角分割による六面体要素生成法を提案した．この方法を用いることにより，凸部分領域よりなる凸領域の六面体要素生成が可能となった．ここでは３種類の手法を提案したが，いずれの手法を用いても部分領域の間の面に平行な六面体要素を生成できることになる．この結果，四面体より六面体を直接作り出す方法に比べて，境界面近傍には二面が平行な六面体が配置され，ひずん

だ六面体は部分領域の核部に押し込めることができることになり，特に境界近傍の数値解の向上に役立つと思われる．

ここで，提案した3つの六面体生成法の比較を行ってみる．HEXGEN1を用いると最も簡単に六面体を生成できるが，要素寸法にある程度のばらつきが生じる．一方，HEXGEN2とHEXGEN3は要素寸法を均一化できるという利点がある．さらに，HEXGEN3はHEXGEN2に比べて部分系表面近傍で一様な要素分割を可能とする．

さらに本研究では非凸複合領域の要素分割法についても理論的な側面より考察し，いくつかのアプローチを示した．いずれも未解決の問題を包含していることが明らかとなった．そこに存在する問題点はデローニー三角分割の結果の修正もしくはデローニー三角分割の制御に関するものであり，デローニー三角分割法自体の問題点，言い換えると幾何学の問題であって，今後の同分野での展開を待つ必要がある．

参考文献

1) Blacker,T.D. and Meyes,R.J. : Seams and wedges in plastering : A 3-D hexahedral mesh generation algorithm, *Engrg Computers*, Vol.9, 83-93, 1993
2) Schneiders, R., Oberschelp, W., Weiler, F., Kopp, R., Buenten, R. and Franzke, M. : Automatic generation of hexahedral element meshes for the simulation of metal forming processes, *Numer. Grid Generation in Computational Fluid Dynamics and Related Fields* (ed. by N.P. Weatherill, P.R. Eiseman, J. Haeuser and J.F. Thompson), pp.223-233, 1994
3) Tam,T.K.H. and Armstrong, C.O. : Finite element mesh control by integer programming, *Int. J. numer. Meth. in Eng.*, Vol.36, pp.2581-2605, 1993
4) Eiseman, P.R., Cheng, Z., Haeuser, J. : Applications of multiblock grid generations with automatic zoning, *Numer. Grid Generation in Computational Fluid Dynamics and Related Fields* (ed. by N.P.Weatherill, P.R.Eiseman, J.Haeuser and J.F.Thompson), pp.123-134, 1994
5) Magnan, R. and Masse, B. : Combining multiblock zoning with a paving algorithm to mesh complex 3D domains, *Numer. Grid Generation in Computational Fluid Dynamics and Related Fields* (ed. by N.P.Weatherill, P.R.Eiseman, J.Haeuser and J.F.Thompson), pp.235-244
6) Taniguchi, T., Fillion, E., Sauty, J.P. and Zielke, W. : Fast mesh generation for groundwater flow analysis in 3D fracture system, *Numer. Grid. Generation in Computational Fluid Dybamics and Related Fields* (ed. by N.P. Weatherill, P.R. Eiseman, J. Haeuser, and J.F. Thompson), pp.665-676, 1994
7) Peraire, J., Vahdati,M., Morgan, K. and Zienkiewicz, O.C. : Advancing remeshing for compressible flow computations, *J. Comp. Phys.*, Vol.72, pp.547-574, 1987
8) Bowyer, A. : Computing Dirichlet tesselation, *The Computer Journal*, Vol.24-2, pp.162-166, 1981
9) Joe, B. : Three-dimensional boundary-constrained triangulation, Artificial Inteligence, *Expert Systems and Symbolic Computing* (ed. by E.N.Houstis and J.R.Rice), pp.215-222, 1992
10) Sloan, S.W. : A fast algorithm for constructing Delaunay triangulations in the plane, *Advances in Eng. Software*, Vol.9-1, pp.34-55, 1987
11) 谷口健男，太田親：3次元凸体の四面体有限要素自動分割，土木学会論文集，Vol.432, pp.137-144, 1991

(1995 年 9 月 18 日 受付)