

偏平アーチの非線形振動とカオス解析

Nonlinear Vibrations and Chaos of an Arch with Small Rise

高橋和雄*, 太田晶一**
Kazuo TAKAHASHI and Shouichi OHTA

* 工博 長崎大学 教授 社会開発工学科 (〒852 長崎市文教町1番14号)

** 長崎大学大学院 工学研究科社会開発工学専攻 (〒852 長崎市文教町1番14号)

Nonlinear free and forced vibrations of an arch with small rise are discussed in the present paper. The basic equation of motion is solved by a Galerkin method and the resulting time variable is solved by the harmonic balance method for periodic vibration and Runge-Kutta-Gill method for chaotic vibration. The single-degree-of-freedom approach is employed. Chaotic vibration is obtained by using bifurcation diagram, Poincaré map and power spectrum in this study. Nonlinear vibration behaviors of the hinged-hinged arch are shown for various rise ratios, load intensity and damping constants. The chaotic vibration is obtained and discussed.

Key Words: nonlinear vibration, chaos, 1/2 subharmonic response, shallow arch

1. はじめに

構造部の巨大化に伴って、長さ比べて板厚が小さい薄肉材や薄板が採用されている。この種の薄肉構造部材では、製作過程、支持部の出来具合および自重の影響などによってライズが必ず存在する。このような、ライズをもつはりや軸方向圧縮力を受けて座屈したはり、偏平アーチの一種とみなすことができる^{1,2)}。これらの偏平アーチのライズの大きさが座屈強度に敏感に影響を及ぼすことが知られている。ライズによって生ずる2次の非線形項が重要な役目を果たす。振動の場合にも、非線形振動^{3,4)}、動的座屈^{5,6)}、カオスなどにライズの大きさおよび形状が大きな影響を及ぼすことが予想され、各方面で解析が行われている。偏平アーチの非線形挙動はきわめて複雑で、カオスの存在、高次モードの影響および動的座屈のメカニズムなど未解明な問題が残されている。著者らはカオスを含めたケーブルの非線形振動解析⁷⁾を行っており、非線形項が大きい偏平アーチの解析を行う準備ができています。そこで、本研究では、応用力学上興味深い偏平アーチの非線形振動を解析するものであるが、その第一段階として、両端で軸方向変位が拘束された偏平アーチの運動方程式を、多自由度の振動系にモデル化後、Galerkin法を用いて常微分方程式に変換する。次に、両端がヒンジで支えられた偏平アーチを1自由度系にモデル化し、常微分方程式の周期解を求めるために調和バランス法を用いて、連立非線形代数方程式に変換し、Newton-Raphson法により、主調波応答および1/2分数調波共振の応答を求める。また、カオスおよび非周期解に関して

は、Runge-Kutta-Gill法を用いて、微分方程式を直接数値積分することによる時間応答解析を行う。数値解析において、非線形応答に及ぼす偏平アーチの形状パラメータであるライズ比、荷重強度および減衰力の影響についても検討する。さらに、1/2分数調波共振近傍のカオスの挙動の存在についても時系列応答波形、Poincaré写像⁸⁾、パワースペクトル⁹⁾および分岐図¹⁰⁾を利用して明らかにする。

2. 運動方程式

はりの回転半径と同程度の偏平なライズをもつアーチを対象とする。初期形状 y_0 をもつ一様断面の細長いはりに周期荷重 $p \cos \Omega t$ が作用する場合の非線形振動の運動方程式を誘導する。基礎式の誘導にあたって次の諸事項を仮定する。

- (1). $u < r$
- (2). $y = 0(r) \quad \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| < 1 \quad \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = 0(\epsilon) \quad (0 : \text{オーダー})$
- (3). $y_0 = 0(r)$
- (4). 軸方向の慣性力および回転慣性力は無視する。
- (5). 両端で軸方向変位拘束

ここに、 u : 軸方向変位、 r : 回転半径、 y : たわみ、 x : はりの支点からの距離、 y_0 : 初期形状。

Fig.1に示すようなはりの任意点のひずみ ϵ_x および応力 σ_x を求めると次のように得られる²⁾。

$$\epsilon_x = (A'B' - AB) / AB - \eta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

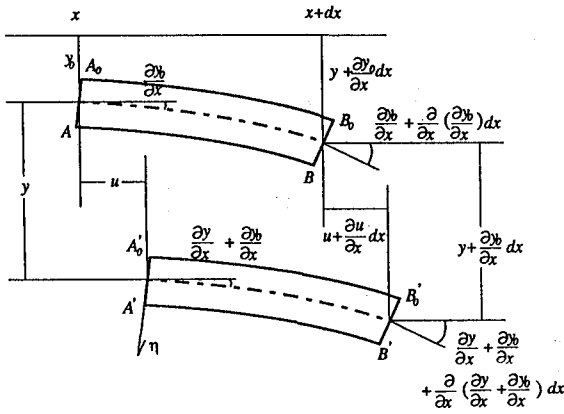


Fig. 1 An infinitely small element of a beam.

$$\begin{aligned} &= \varepsilon_0 - \eta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y_0}{\partial x} \right) - \eta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (2)$$

ここに、 η : 中立軸からの距離、 ε_0 : 中立軸のひずみ、 E : ヤング率。

よって、はりの全体のひずみエネルギーは、

$$V = \frac{1}{2} \iint E \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y_0}{\partial x} \right) - \eta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx dS \quad (3)$$

ここに、 S : 断面積。

運動エネルギー T は、はりの密度を ρ すれば

$$T = \frac{1}{2} \iint \rho \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx dS \quad (4)$$

荷重のなす仕事 W は、

$$W = \int y p_0 \cos \Omega t dx \quad (5)$$

ここに、 Ω : 荷重の円振動数、 t : 時間、 p_0 : 荷重振幅。

式(3)、式(4)および式(5)を用いて、一般化 Lagrangian $L' = T - V + W$ が得られ、Hamiltonの原理は次のように表される。

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L' dt = 0 \quad (6)$$

δy および δu の任意性から横方向および軸方向の運動方程式は次のように得られる。

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - ES \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y_0}{\partial x} \right) \right) = p_0 \cos \Omega t \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

ここに、 I : 断面2次モーメント。

式(8)より、はりの中立軸のひずみが一定であることが明らかにより、また両端で軸方向変位拘束を考慮すれば次のような運動方程式が得られる。

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + N_x \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} \right) = p_0 \cos \Omega t \quad (9)$$

$$N_x = -\frac{ES}{2\ell} \int_0^\ell \left(\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y_0}{\partial x} \right) dx \quad (10)$$

ここに、 N_x : たわみによる変動軸力。

上式は偏平アーチの非線形振動問題、動的安定問題や

製作過程、支持部の出来具合および自重による影響などによって生ずる初期不整をもつたりの非線形振動問題に適用すべき運動方程式である²⁾。

式(9)に、粘性減衰抵抗 $c \frac{\partial y}{\partial t}$ の項を加え、 N_x を消去すれば、偏平アーチの運動方程式は初期軸力がない場合に次のように表される。

$$\begin{aligned} &\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + c \frac{\partial y}{\partial t} \\ &- \frac{ES}{2\ell} \int_0^\ell \left(\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y_0}{\partial x} \right) dx \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} \right) = p_0 \cos \Omega t \end{aligned} \quad (11)$$

3. 解法¹¹⁾

(1) 常微分方程式への変換

初期形状は境界条件を満足しなければならないから、次のように関数表示されるものとする。

$$y_0 = \Delta r \bar{X}(x) \quad (12)$$

ここに、 $\Delta = \Delta_0 / r$: ライズ比、 $\bar{X}(x)$: ライズの形状関数。式(11)の解を、次の変数分離形に仮定する。

$$y = r \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) \quad (13)$$

ここに、 X_n : 座標関数、 T_n : 未知の時間関数。

上式の座標関数として、ライズがない直線ばりの固有振動形を用いる。

式(12)、式(13)を式(11)に代入し、Galerkin法を適用すれば、次のような時間に関する連立非線形常微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} &\ddot{T}_n + 2h_n \alpha_n \dot{T}_n + \alpha_n^2 T_n + \Delta^2 S_n^0 \sum_{k=1}^{\infty} Q_k^0 T_k \\ &+ \Delta \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left(Q_k^0 R_{ln} + \frac{1}{2} S_n^0 P_{kl} \right) T_k T_l \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{klm}^n T_k T_l T_m = \gamma_n p \cos \bar{\omega} \tau \end{aligned} \quad (14)$$

ここに、 $\alpha_n = (\lambda_n / \lambda_1)^2$ 、 $p = p_0 \ell^4 / EIr$ 、 h_n : 減衰定数、 $\bar{\omega} = \Omega / \omega_1$ 、 $\tau = \omega_1 t$: 無次元時間、 ω_1 : ライズのないはりの線形1次固有円振動数、 $\lambda_1 = \ell^2 \sqrt{\rho S \omega_1^2 / EI}$ 、定積分 S_n^0 、 Q_k^0 、 β_{klm}^n 、 R_{ln} 、 P_{kl} および γ_n は、Appendix A に示している。

(2) 両端ヒンジの偏平アーチへの適用

Fig. 2 に示すような両端ヒンジばりの座標関数が正弦波で与えられ、ライズの形状関数 $\bar{X} = \sin \pi \xi$ (ここに、 $\xi = x / \ell$) をもつ場合について系を1自由度系と仮定し、 T_1 を T とおけば、式(14)は次式となる。

$$\ddot{T} + 2h\alpha \dot{T} + \alpha^2 T + \frac{3}{4} \Delta T^2 + \frac{1}{4} T^3 = \frac{4}{\pi^5} p \cos \bar{\omega} \tau \quad (15)$$

ここに、 $\alpha = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \Delta^2}$: 1次固有円振動数。

式(15)に示すようにライズの影響は、線形振動数には自乗で効いてくるため、ライズ比が1を超えると大きな影

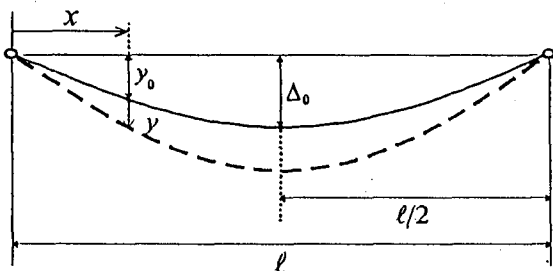


Fig.2 Geometry of a shallow arch.

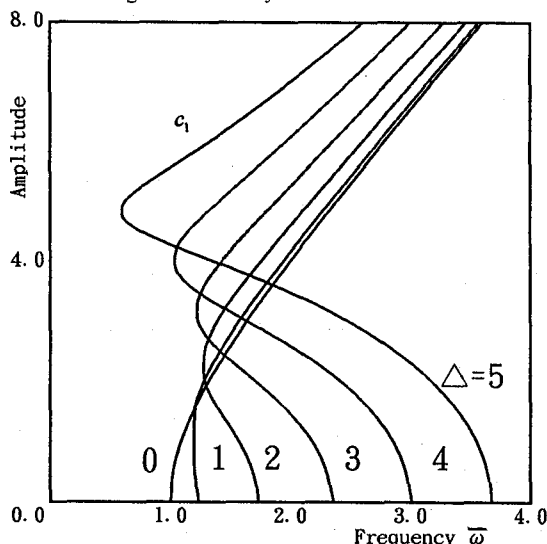


Fig.3 Amplitude-frequency curves.

響を及ぼす。また、ライズ比は2次の非線形項の係数に含まれている。2次の非線形項は振幅が大きくなると、3次の非線形項に比べて小さくなる。したがって、ライズ比の影響は振幅が大きくないときに効いてくることが予想される。

式(15)は2次および3次の非線形方程式で、その性質はかなり明らかにされている¹²⁾。式(15)の係数は、扁平アーチのライズ比によって変化する。本論文では、このライズ比 Δ の大きさによる非線形振動特性を明らかにすることにを目的とする。

(3) 1/2 分数調波共振の解法

式(15)の解を次のように仮定する。

$$T = \frac{c_0}{2} + c_{1/2} \cos \frac{\bar{\omega}\tau}{2} + s_{1/2} \sin \frac{\bar{\omega}\tau}{2} + c_1 \cos \bar{\omega}\tau + s_1 \sin \bar{\omega}\tau$$

$$= \frac{c_0}{2} + A_{1/2} \cos \left(\frac{\bar{\omega}\tau}{2} - \phi_{1/2} \right) + A_1 \cos(\bar{\omega}\tau - \phi_1) \quad (16)$$

ここに、 $A_{1/2} = \sqrt{c_{1/2}^2 + s_{1/2}^2}$: 分岐応答成分 $A_1 = \sqrt{c_1^2 + s_1^2}$: 付随応答成分 $\phi_{1/2} = \tan^{-1} \left(\frac{s_{1/2}}{c_{1/2}} \right)$, $\phi_1 = \tan^{-1} \left(\frac{s_1}{c_1} \right)$: 位相差, c_0, c_1, s_1 : 付随型の振幅成分, $c_{1/2}, s_{1/2}$: 分岐型の振幅成分。

式(16)を式(15)に代入して、調和バランス法を適用すれば連立非線形方程式が得られる。これに Newton-Raphson 法を用いて解けば、振幅成分が得られる。

(4) 時間応答解析

$T = P_1, \dot{T} = P_2$ とおくと、式(15)は次に示す2個の1階常微分方程式に変換することができる。

$$\dot{P}_1 = P_2$$

$$\dot{P}_2 = -2h\alpha P_2 - \alpha^2 P_1 - \frac{3}{4} \Delta P_1^2$$

$$-\frac{1}{4} P_1^3 + \frac{4}{\pi^5} p \cos \bar{\omega}\tau \quad (17)$$

この式に Runge-Kutta-Gill 法を用いて、数値積分をして、時間応答解析を行う。

4. 数値結果

(1) 非線形自由振動の特性

Fig.3 において、非線形自由振動曲線をライズ比 Δ をパラメータに示す。減衰定数 $h=0.0$ の非減衰振動を対象としている。縦軸は回転半径で無次元化した無次元振幅 c_1 で、横軸はライズがないはりの線形1次固有円振動数で無次元化した非線形円振動数 $\bar{\omega} = \Omega / \omega_1$ である。 $\Delta=0.0$ のときは、振幅の変動成分 c_1 は振動数とともに単調に増加するのみであるが、ライズ比が回転半径以上($\Delta \geq 1$)になるとライズの影響が効いてくる。この時の無次元非線形円振動数 $\bar{\omega}$ は振幅の増加とともに減少する軟化バネの挙動を示す。さらに振幅が増大してライズ比よりも大きくなると、振幅の変動成分 c_1 は無次元非線形円振動数 $\bar{\omega}$ の増加とともに増加する硬化バネの挙動を示す。振幅の直流成分 $c_0/2$ がライズ比 Δ を打ち消す方向(符号がマイナス)に作用する。振幅 c_1 が小さい場合は、扁平アーチのライズのまわりで振動する。振幅が大きくなるにつれて、 $c_0/2$ が効いてきて振動中のライズの大きさ $\Delta + c_0/2$ が小さくなって、ライズのないはりの振動に近づく。このときの振動と振動数の関係が、軟化バネ特性を示す。さらに、振幅が大きくなると、 $c_0/2 = -\Delta$ となり、ライズのないはりの振動をする。このときには、直線はりと同じ硬化バネ特性を示す。

以上のように、非線形自由振動特性はライズの影響を強く受け、振幅の大きさによって軟化および硬化バネの両特性をもつことが確認できる。

(2) ライズ比の影響

Fig.4, 5, 6, 7は、減衰定数 $h=0.005$ 、荷重強度 p は $\bar{\omega}=0.0$ のときの静的応答が回転半径の0.5倍となるように設定している場合の応答振幅 $A_1, A_{1/2}$ と無次元加振円振動数 $\bar{\omega}$ との関係をライズ比 $\Delta=0.0, 3.0, 4.0$ および 5.0 について示す。縦軸は回転半径で無次元化した無次元応答振幅で、横軸はライズがないはりの線形1次固有円振動数で無次元化した無次元加振円振動数 $\bar{\omega}$ である。ただし、ライズ比 $\Delta=0.0$ の場合、減衰力があると1/2分数調波共振は生じていない。よって1/2分数調波共振は、減衰定数 $h=0.0$ の場合で求める。主調波応答 A_1 は、あらゆる振動数領域で生じているが、1/2分数調波共振の応

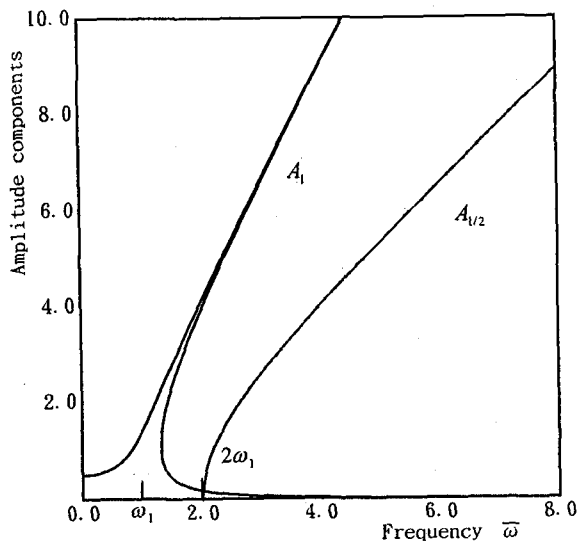


Fig.4 Frequency-response curves with $\Delta=0.0$, $p=0.5313$ and $h=0.0$.

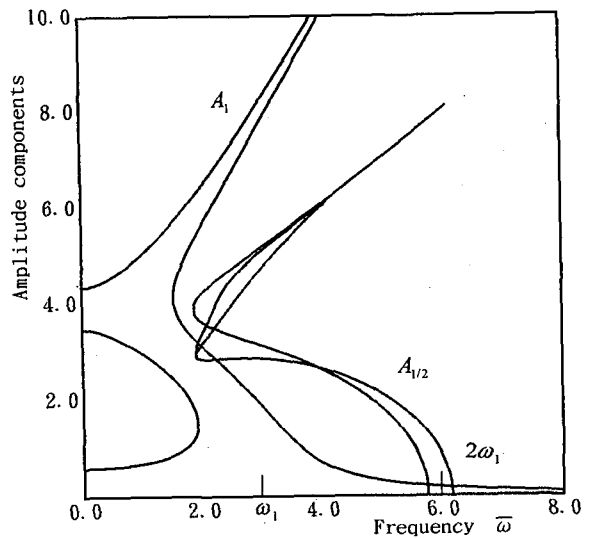


Fig.6 Frequency-response curves with $\Delta=4.0$, $p=5.2813$ and $h=0.005$.

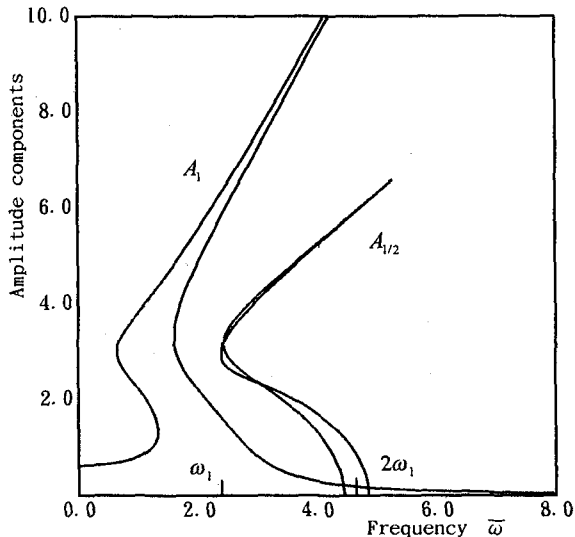


Fig.5 Frequency-response curves with $\Delta=3.0$, $p=3.3438$ and $h=0.005$.

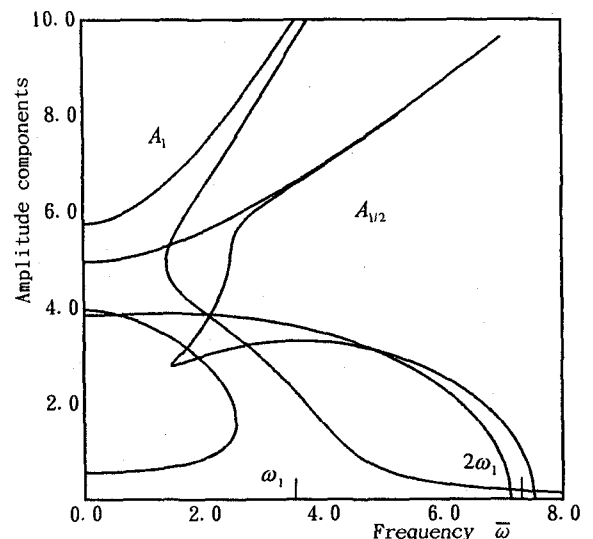


Fig.7 Frequency-response curves with $\Delta=5.0$, $p=7.7188$ and $h=0.005$.

答 $A_{1/2}$ は、固有振動数 ($\Delta=0.0$ のとき $\bar{\omega}_1=1.0$, $\Delta=3.0$ のとき $\bar{\omega}_1=2.35$, $\Delta=4.0$ のとき $\bar{\omega}_1=3.0$, $\Delta=5.0$ のとき $\bar{\omega}_1=3.67$) の2倍の振動数近傍で分岐する。偏平アーチでは、ライズ比によって固有振動数が変化し、それに伴って分数調波共振の生じる振動数領域も変わってくる。主調波応答 A_1 、1/2 分数調波共振の応答 $A_{1/2}$ ともにライズ比の影響を受けて、軟化、硬化バネの両特性をもつ。さらに、1/2 分数調波共振の応答 $A_{1/2}$ の方が主調波応答 A_1 よりライズ比の影響を受けるため、軟化、硬化バネの両特性がより強く現れている。また、ライズ比が大きくなるにしたがい、応答振幅が大きくなることが確認できる。同様にライズ比が大きくなると 1/2 分数調波共振の応答 $A_{1/2}$ の発生領域が広がることが確認できる。これは、ライズ比が大きくなるにしたがい運動方程式内の2次の非線形項の効果が強くなることによる。

以上のように、主調波応答 A_1 、1/2 分数調波共振の応答

$A_{1/2}$ ともにライズ比の影響を強く受け、1/2 分数調波共振の応答 $A_{1/2}$ においては、発生領域はライズ比によって異なり、また発生領域は、ライズ比が大きくなると、はり (ライズ比 $\Delta=0.0$) に比べ著しく広がる傾向が見られる。

(3) 荷重強度の影響

Fig.8,9 に、ライズ比 $\Delta=3.0$ 、減衰定数 $h=0.005$ の場合について応答振幅 A_1 , $A_{1/2}$ と無次元加振円振動数 $\bar{\omega}$ との関係を荷重強度 $p=33438$ と $p=8.0$ について示す。これらの図には、Runge-Kutta-Gill 法による応答振幅をプロットしている。図中の○はシミュレーションによる周期 T の最大応答、□は周期 $2T$ の最大応答、△は周期 nT の最大応答、×はカオスの発生時の時系列の最大応答を示している。荷重強度が大きくなるにしたがい主調波応答の応答振幅は大きくなり、1/2 分数調波共振の発生領域は広がる。周期解に関しては、解析解とシミュレーションに

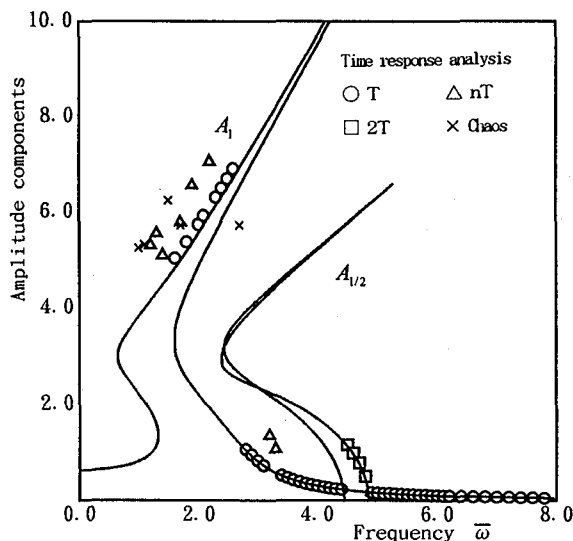


Fig.8 Frequency-response curves with $\Delta = 3.0$, $p = 3.3438$ and $h = 0.005$.

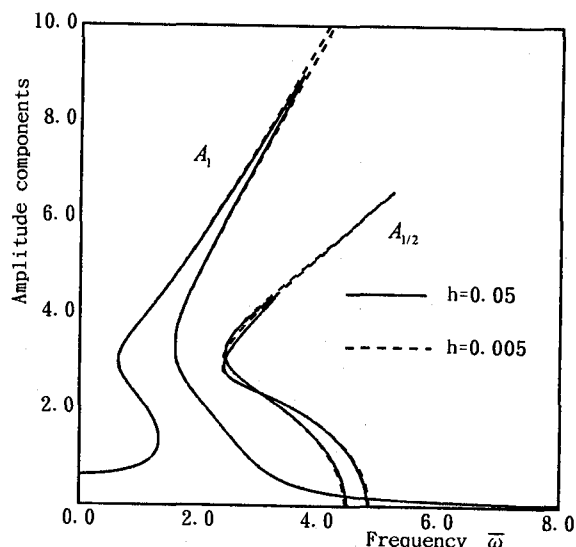


Fig.10 Frequency-response curves with $\Delta = 3.0$ and $p = 3.3438$.

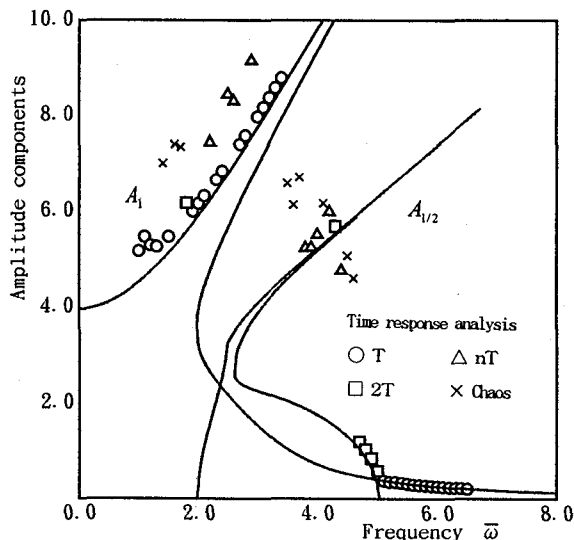


Fig.9 Frequency-response curves with $\Delta = 3.0$, $p = 8.0000$ and $h = 0.005$.

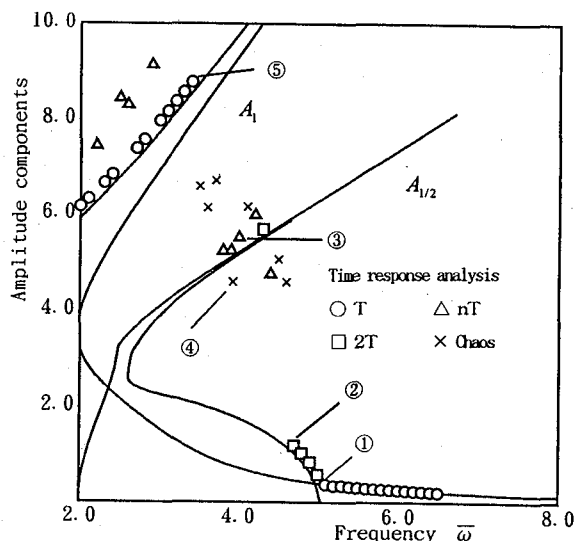


Fig.11 Frequency-response curves with $\Delta = 3.0$, $p = 8.0$ and $h = 0.005$.

よる数値解は、荷重強度が増加してもほぼ一致する。また、1/2 分数調波共振近傍、高調波共振領域においては、荷重強度が増加すれば、周期 nT およびカオスが発生しやすい傾向が見られる。

(4) 減衰力の影響

Fig.10に、ライズ比 $\Delta = 3.0$ 、荷重強度 $p = 3.3438$ について応答振幅 $A_1, A_{1/2}$ と無次元加振円振動数 $\bar{\omega}$ の関係を減衰定数 h をパラメーター ($h = 0.005, 0.05$) に示す。減衰力の影響は振幅が小さいうちは、ほとんど現れないが振幅が大きくなってくるとその影響が現れ、減衰定数 $h = 0.05$ においては、減衰定数 $h = 0.005$ の場合に定まらなかった主調波応答の共振振幅が有限の大きさとなる。減衰力が大きくなるにつれてその振幅は小さくなる。1/2 分数調波共振の応答の減衰力による影響は主調波応答に比べ大き

く、振幅の小さいときにも現れ、分岐領域は狭くなっている。

(5) 1/2 分数調波共振近傍のカオスの挙動

Fig.11にライズ比 $\Delta = 3.0$ 、荷重強度 $p = 8.0$ 、減衰定数 $h = 0.005$ の場合について、縦軸に振幅成分 $A_1, A_{1/2}$ 、横軸に無次元加振円振動数 $\bar{\omega}$ をとり、1/2 分数調波共振近傍の主調波応答と 1/2 分数調波共振応答を示す。図中の○、□、△および×は数値シミュレーションによる振幅である。これらのシミュレーションにあたっては、初期変位、速度をいずれも 0 とし、時間刻みは $\Delta\tau = 1/250$ 無次元時間で $n\Delta\tau = 5000$ 以降の応答を求めた。また振動を特定するため、時系列応答波形、Poincaré 写像、パワースペクトルを参考にした。その結果、図中のポイント①、⑤は外力と同周期 T の主調波応答、②は 2 倍周期 $2T$ の 1/2 分数調波共振

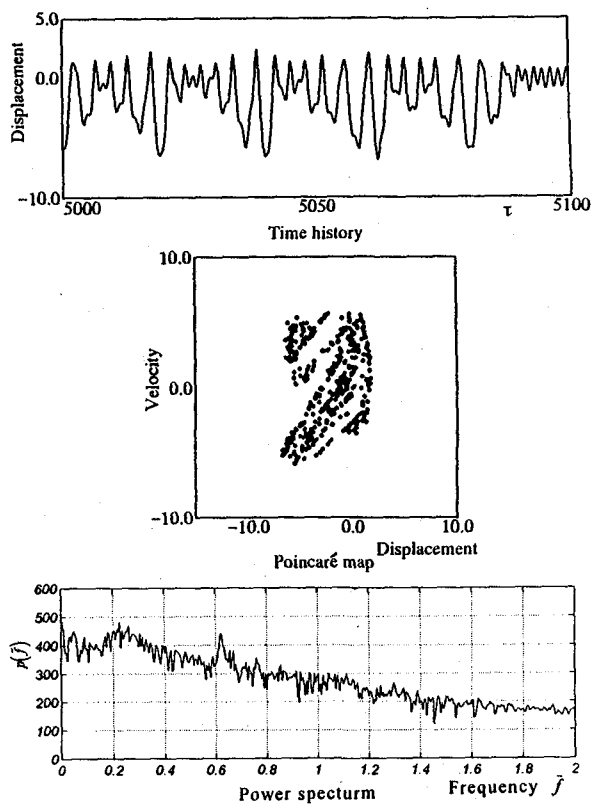


Fig.12 Time history, Poincaré map and power spectrum of the point ④.

応答であり、この2種類の定常応答は、解析解と一致している。一方、ポイント③、④では、周期 T および周期 $2T$ と一致しない応答が生じている。カオスの挙動が生じている無次元加振円振動数 $\bar{\omega} = 3.925$ のポイント④について、その時系列応答波形、Poincaré写像、パワースペクトルをFig.12に示す。同様に、ポイント③では周期 $6T$ の応答が確認できた。

またFig.13には、 $1/2$ 分数調波近傍の分岐を調べるために分岐図を示す。Fig.13の縦軸はシミュレーションによって得られた速度で、横軸は無次元加振円振動数 $\bar{\omega}$ である。分岐図よりカオスに至る様子を調べると、無次元加振円振動数 $\bar{\omega}$ を5.1より減少させると $\bar{\omega} = 5.0$ で周期 T の振動が、周期 $2T$ の振動に移る。さらに、無次元加振円振動数 $\bar{\omega}$ を減少させると、周期 iT ($i \geq 3$)の振動を間欠的に繰り返す、無次元加振円振動数 $\bar{\omega} = 4.6$ 近傍よりカオスが発生し始め、 $\bar{\omega} = 3.7$ 近傍よりカオスが頻繁に現れる。

$1/2$ 分数調波共振近傍のカオスに至る道筋は、周期的な振動が周期倍加分岐を繰り返す、カオスに至るといえないが、無次元加振円振動数 $\bar{\omega}$ が減少するにつれて、周期 $2T$ の振動が周期 iT ($i \geq 2$)の振動を間欠的に繰り返しながらカオスに至る。さらに、間欠的なカオスの様子を詳しく調べるために、Fig.14~16にパワースペクトルを示す。図より、無次元加振円振動数 $\bar{\omega} = 4.02$ では、単一周波数の f_1 の他に $f_1/2$ および高調波のピークが発生し、無次元加

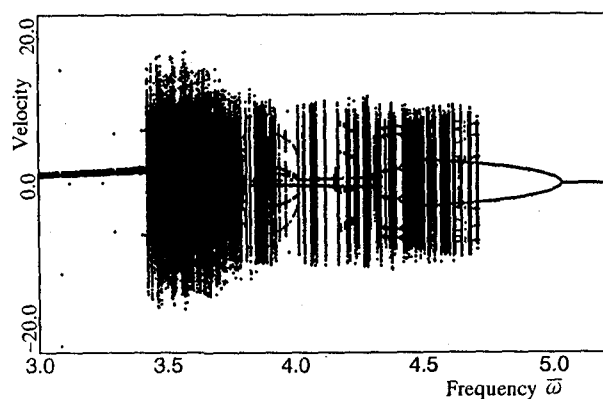


Fig.13 Bifurcation diagram with $\Delta = 3.0$, $p = 8.0$ and $h = 0.005$.

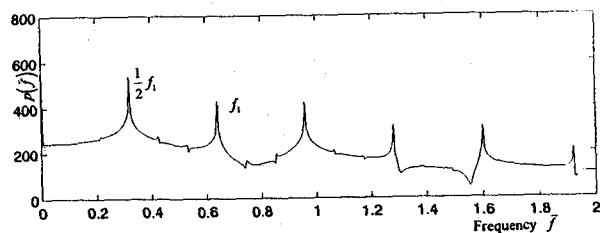


Fig.14 Power spectrum with $\bar{\omega} = 4.02$ and $\bar{f} = 0.6401$.

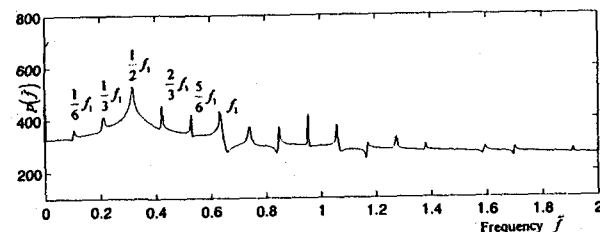


Fig.15 Power spectrum with $\bar{\omega} = 4.0$ and $\bar{f} = 0.6369$.

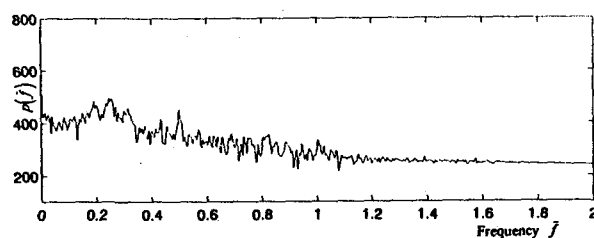


Fig.16 Power spectrum with $\bar{\omega} = 3.94$ and $\bar{f} = 0.6273$.

振円振動数 $\bar{\omega} = 4.0$ では、単一周波数の f_1 の他に $f_1/6$, $f_1/3$, $f_1/2$, $2f_1/3$, $5f_1/6$ および高調波のピークが発生している。さらに無次元加振円振動数 $\bar{\omega}$ が減少するとカオス的な状態になっている。これらパワースペクトルからも無次元加振円振動数 $\bar{\omega}$ 減少するにつれ周期 $2T$ の振動が周期 iT ($i \geq 2$)の振動を間欠的に繰り返しながらカオスに至る様子がわかる。

5. まとめ

本研究では、偏平アーチに現れる1/2分数調波共振について調和バランス法による解析および時間応答解析を行った。偏平アーチの形状パラメーターであるライズ比、荷重強度および減衰力の影響を明らかにした。

得られた結果をまとめると次のとおりである。

- (1) 非線形自由振動の振動特性はライズ比によって、軟化、硬化バネの両特性を持つため、ライズ比は応答特性に大きな影響を及ぼしてくる。
- (2) 1/2分数調波共振の発生領域はライズ比によって異なり、ライズ比が大きくなるにしたがい発生領域は、はりに比べ著しく広がる傾向がある。
- (3) 1/2分数調波共振近傍において、周期 iT ($i \geq 2$) およびカオスを確認した。
- (4) 1/2分数調波共振近傍で、カオスに至る道筋は、周期的振動が周期倍加分岐を繰り返しカオスに至るとはいえない。周期的振動がカオスもしくはカオスに近い周期 iT ($i \geq 2$) の振動に至る。

本研究では、支点が拘束された偏平アーチの非線形振動を1自由度系について検討している。今後、多自由度系としての解析やライズの大きさと座屈や温度変化との関係を考慮した解析を行うことが必要である。また、実験におけるカオスの挙動の確認が今後の課題である。

なお、数値計算には長崎大学情報処理センターのVP-1200を使用したことを付記する。

Appendix A $S_n^0, Q_k^0, \beta_{ktn}^n, R_{tn}, P_{kt}$ および γ_n の定積分

$$S_n^0 = -\frac{1}{\lambda_1^4 x_n} \int_0^1 \frac{d^2 \bar{X}}{d\xi^2} X_n d\xi, Q_k^0 = \int_0^1 \frac{d\bar{X}}{d\xi} \frac{dX_k}{d\xi} d\xi$$

$$\beta_{ktn}^n = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dX_k}{d\xi} \frac{dX_t}{d\xi} d\xi \int_0^1 \frac{d^2 X_m}{d\xi^2} X_n d\xi / (\lambda_1^4 x_n),$$

$$R_{tn} = -\frac{1}{\lambda_1^4 x_n} \int_0^1 \frac{d^2 X_t}{d\xi^2} X_n d\xi, P_{kt} = \int_0^1 \frac{dX_k}{d\xi} \frac{dX_t}{d\xi} d\xi,$$

$$\gamma_n = \int_0^1 X_n d\xi / (\lambda_1^4 x_n).$$

$$\text{ここに, } x_n = \int_0^1 X_n^2 d\xi, \xi = x/\ell.$$

参考文献

- 1) 高橋和雄：構造部材の大振幅振動特性に関する基礎研究（学位論文），1984.
- 2) 八巻 昇：弾性体の非線形振動，日本機械学会，第373回講習会「非線形振動の理論と実際」教材，pp.31～50, 1973.
- 3) Plaut, R.H. and Hsieh, J.-C. : Oscillations and Instability of a Shallow Arch under Two-Frequency Excitation, Journal of Sound and Vibration, Vol. 102, No. 2, pp. 189～201, 1985.
- 4) Yamaki, N. and Mori, A. : Non-linear Vibrations of a Clamped Beam with Initial Deflection and Initial Axial Displacement, Part I : Theory, Journal of Sound and Vibration, Vol. 71, No. 3, pp. 333～346, 1980.
- 5) Leung, A. Y. T. and Fung, T. C. : Nonlinear Steady State Vibration and Dynamic Snap Through of Shallow Arch Beams, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 19, pp. 409～430, 1990.
- 6) 村田 賢, 安江 博：周期外乱を受ける偏平アーチの動座屈，日本建築学会構造系論文集，第469号，pp. 71～80, 1995.3.
- 7) 高橋和雄, 松野 進, 鎌田智之, 町田健一郎：偏平ケーブルの非線形振動に現れるカオスの解析，土木学会論文集，No. 525/I-33, pp. 181～190, 1995.10.
- 8) 長島弘幸, 馬場良和：カオス入門，培風館，1992.
- 9) Thompson, J. M. T. and Stewart, H. B., 武者利光監，橋口住久訳：非線形力学とカオス，オーム社，1988.
- 10) Bergé, P., Pomeau, Y., Vidal, Ch. 相澤洋二訳：カオスの中の秩序，産業図書，1992.
- 11) Takahashi, K. and Kawahara, K. : On a Method of Approaching the Stability Problem of Nonlinear Vibrations, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 26, pp. 339～350, 1976.
- 12) Szeplinska-Stupnicka, W. and Niezgodzki, P. : The Approximate Approach to Chaos Phenomena in Oscillators Having Single Equilibrium Position, Journal of Sound and Vibration, Vol. 141(2), pp. 181～192, 1990.

(1995年9月18日受付)