

塑性理論の適用による膜構造物のリンクリング現象評価

Evaluation for Wrinkling Phenomena Applying Plastic Theorem to Membrane Structures

遠藤 典男*、曹 西**、三井康司***

Norio ENDOH, Xi CAO and Yasushi MITSUI

*工修 長野工業高等専門学校助手 環境都市工学科 (長野市徳間 7 1 6)

**信州大学助手 社会開発工学科 (長野市若里 5 0 0)

***工博 信州大学教授 社会開発工学科 (長野市若里 5 0 0)

This paper presents a formulated finite element analysis of mechanical behavior of partly wrinkled membranes based on plastic theory. In the analysis, both geometrical and material nonlinearities are taken into considerations. It is also investigated that stiffness of membrane depends on its stress state. Furthermore, the validity and property of the proposed numerical analysis are evaluated by means of comparison of the numerical results and closed form solutions, a satisfactory agreement having been observed in the comparison. In finite element analysis, isoparametric shell elements are employed.

Since stiffness of membrane drops remarkably after wrinkled, it is considered that the behavior of membranes in wrinkled regions is plastic in this research. From this viewpoint, stiffness is reduced by applying plastic theory on the basis of material properties adopted in elastic regions. This enables to evaluate exactly membrane's stiffness, then, making it possible to mechanically analyze and investigate membranes in detail. Due to geometrical nonlinearity being introduced into the discretization of membrane, stiffness depended on stress state can be evaluated for elastic regions, too.

Key Words : membrane structures, wrinkling phenomena, plastic theorem, nonlinear analysis

1. 緒論

構造工学の分野において軽量化を考慮した薄膜構造¹⁾は、経済性、機能性の面で優れているという観点から注目されつつある。薄膜構造物は引張応力を作用させることにより剛性が与えられ、構造物として成立する。このため外力の作用により引張応力が相殺され圧縮応力が生じた領域では、薄膜構造特有な崩壊形態であるリンクリング現象²⁾(膜材料が圧縮応力に抵抗できないために面外への変形が生じる、一種のしわ状座屈現象)が発生し、局所的な剛性低下が生じることになる。本研究では薄膜構造物の剛性が応力に依存することを勘案し、これら構造物に対して幾何学的非線形性を考慮した有限要素定式化を行い、併せて圧縮応力が生じリンクリング現象が発生した領域に対しては塑性理論を適用した数値解析手法を提案するものである。また、提案した手法の妥当性を検証するため、厳密解との比較検討を行う。

従来、数値解析におけるリンクリング現象発生時の対処としては、通常の平面応力場に基づいた弾性解析を行い、得られた最小主応力が圧縮応力に転じたとき、これ

を等大異符号な節点力に変換し、圧縮応力が存在しなくなるまで収れん計算を行う(引張応力に抵抗力を有さない材料の解析に適用された no-compression method³⁾を圧縮応力に抵抗力を有さない膜材料等に導入したもので、modified Newton-Raphson method に基づく stress transfer method に属する)ものである。また、西村等はリンクリング現象の発生に伴う圧縮応力の大きさに応じ、段階的に変化する剛性低下法を提案し⁴⁾、Miller 等はリンクリング現象発生後の応力状態を一軸応力状態と仮定して新たな応力マトリクスを導出⁵⁾した。さらに、Roddeman 等はリンクリング現象の発生している面積をパラメータとし、新たなひずみ-変位関係を導出^{6, 7)}することにより対処し、宮村らは、膜断面を線材置換し級数展開する半解析的手法^{8, 9)}により対処している。

一方、先に著者らはエア・ビーム(細長い円筒状の膜材に内圧を加え、はりとしての剛性を与えたもの)を対象に取り上げ、工学的はり理論に基づいた剛性評価を実験的、解析的に考察している¹⁰⁾。また、はり要素を用いてリンクリング現象の定式化を行った有限要素解析手

法の提案^{11, 12)}も行った。さらに、エア・ビームを平面シェル要素により離散化し、リンクリング現象が発生した領域で応力状態に依存するパラメータを定義し、これにより剛性低減を計ることを提案した¹³⁾。

これらのことをふまえ、本文で提起する手法は膜構造物が引張応力を作用させることにより剛性が与えられ、作用している応力が剛性に影響を与えることを勘案し、膜材料をアイソパラメトリックシェル要素により離散化したうえ、幾何学的非線形性を考慮した有限要素解析¹⁴⁾を行うものである。さらに、リンクリング現象が発生した領域では剛性が低下し、変形量が著しく大きくなる。このため、膜材料特有の崩壊形態であるリンクリング現象は一種の塑性崩壊であると考えられる。このような仮定の下で最小主応力が引張応力である領域に対しては、膜材の引張実験より与えられる物性値¹⁵⁾を用いて要素剛性を算定し、弾性挙動を示す領域とみなす。一方、リンクリング現象が発生した領域では著しく剛性が低下するため、先の物性値を用いることは不合理である。そこで、リンクリング現象が発生した領域を塑性的な挙動を示すものとみなし、弾性領域で用いた物性値を基に塑性理論を適用^{16, 17, 18)}し剛性を低減する。リンクリング現象に対して塑性理論を適用することにより、圧縮応力の大きさに応じた膜材料の剛性を評価できることになる。したがって、応力状態に依存する膜材料の剛性の変化を、幾何学的非線形性並びに材料非線形性を考慮した定式化を行うことにより、膜構造物の詳細な力学的評価が可能になると考えられる。

2. 数値解析手法

2. 1 解析概要

本研究では、解析対象が膜構造物であるため平面応力場仮定にしたがうものとする。また、有限要素による離散化には8節点アイソパラメトリックシェル要素を適用する。つぎに、膜材料は圧縮に対する抵抗力が存在しないことを勘案し、数値計算により最小主応力を算定し圧縮応力が現れた場合にリンクリング現象が発生する。この領域における応力状態は最大主応力のみが存在する一軸的なものであり、主応力の方向としわの発生する方向は一致するものと仮定する。

2. 2 アイソパラメトリックシェル要素による離散化

膜構造物を離散化するにあたり、図-1に示す8節点アイソパラメトリックシェル要素を考える。全体座標系で表される要素内の任意点 (x, y, z) を要素節点座標 (x_i, y_i, z_i) により以下のように補間する。

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \sum N_i(\xi, \eta) \frac{\xi}{2} \mathbf{v}_{3i} \quad (1)$$

ただし、 $N_i(\xi, \eta)$ は局所座標系 (ξ, η, ζ) で表さ

れる8節点アイソパラメトリックシェル要素における形状関数である。また、 $\mathbf{v}_{3i}$ は節点における法線ベクトルで、任意の節点から両端の節点へおろした位置ベクトルの外積により与えられる。

$$\mathbf{v}_{3i} = \begin{Bmatrix} x_i - x_{i+1} \\ y_i - y_{i+1} \\ z_i - z_{i+1} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x_i - x_{i-1} \\ y_i - y_{i-1} \\ z_i - z_{i-1} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

同様に、要素内の任意点における変位 (u, v, w) を節点変位 (u_i, v_i, w_i) を用いて次のように仮定する。

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \sum N_i(\xi, \eta) t_i \frac{\xi}{2} [\mathbf{v}_{1i} - \mathbf{v}_{2i}] \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (3)$$

ただし、 α_i, β_i は節点の x, y 軸回りのスカラー回転角であり、また $\mathbf{v}_{1i}, \mathbf{v}_{2i}$ は節点における単位法線ベクトルの成分である。ここで、式(3)の第2項はアイソパラメトリックシェル要素における面外変形に対する剛性に寄与するものと考えられ、解析対象が膜材料であることを考慮してこれらの項を省略すると、

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (3')$$

となる。また、解析対象を幾何学的非線形問題として取り扱うため、ひずみは式(4)で与えられるグリーンのひずみを用いる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \\ \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{Bmatrix} \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}_L + \boldsymbol{\varepsilon}_N = (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_N(\boldsymbol{\delta})) \boldsymbol{\delta} = \mathbf{B} \boldsymbol{\delta} \quad (4) \end{aligned}$$

ここで、 $\boldsymbol{\varepsilon}_L, \boldsymbol{\varepsilon}_N$ は各々ひずみの線形部と非線形部であり、また $\mathbf{B}_L, \mathbf{B}_N(\boldsymbol{\delta})$ はひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ と節点変位 $\boldsymbol{\delta}$ を関係付けるマトリクス $\mathbf{B}$ の線形部と非線形部である。式(4)は全体座標系により定義されたひずみであるが、局所座標系により表されたものに変換する必要があるため、式(5)で示されるような変換を行う。

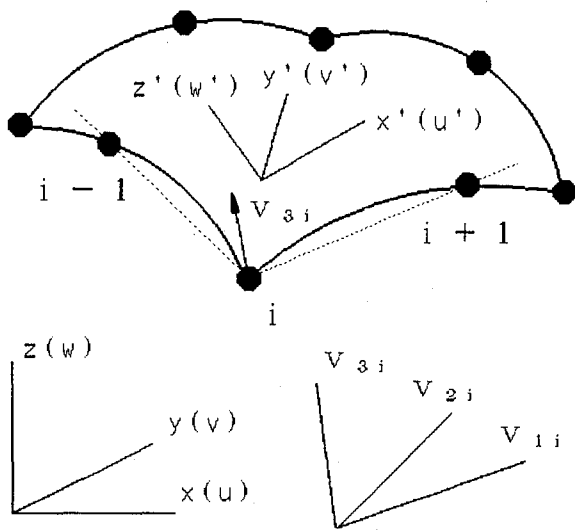


図-1 アイソパラメトリックシェル要素

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (5)$$

ただし、 $[J]$ は Jacobian matrix であり、

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (6)$$

と表される。つぎに、 ζ が一定な面での数値積分点における法線ベクトル $\mathbf{v}_3$ は、次式で与えられる。

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (7)$$

さらに、 $\mathbf{v}_3$ に直交する2つのベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ を一義的に決定し単位ベクトルに還元することにより、方向余弦を成分とするマトリクスが次のように得られる。

$$\mathbf{T} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3] \quad (8)$$

式(8)を用いて、積分点での局所座標系 (x', y', z') におけるひずみが次式のように得られる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \mathbf{T} \quad (9)$$

式(9)で与えられるひずみの成分を式(4)の対応する項へ

代入することにより、積分点におけるひずみ $\mathbf{e}'$ と全体座標系で表される節点変位 $\boldsymbol{\delta}$ とが関係付けられ、ここで新たに、

$$\mathbf{e}' = \mathbf{e}_L + \mathbf{e}_N = (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_N(\boldsymbol{\delta})) \boldsymbol{\delta} = \mathbf{B} \boldsymbol{\delta} \quad (4')$$

と定義する。

さて、平面応力場における一般的な応力 $\boldsymbol{\sigma}$ とひずみ $\mathbf{e}$ の関係は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\mathbf{e} - \mathbf{e}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (10)$$

ただし、

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\} \quad (11)$$

であり、 $\mathbf{D}$ は応力とひずみを関係付ける応力-ひずみマトリクス、 $\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{e}_0$ は初期応力、初期ひずみである。

一方、有限要素定式化における釣り合い条件は式(4')で示された $\mathbf{B}$ を用いて、次のように表される。

$$\Psi(\boldsymbol{\delta}) = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \mathbf{f} = 0 \quad (12)$$

ここで、 Ψ は残差、 $\mathbf{f}$ は外力である。また、式(12)の領域積分は式(6)を用いて次のように与えられる。

$$dx dy dz = \det |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (13)$$

式(4')で定義されたように、グリーンのひずみを用いているため変位とひずみの関係が非線形で、 $\mathbf{B}$ が $\boldsymbol{\delta}$ の関数であることから

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_N(\boldsymbol{\delta}) \quad (14)$$

である。反復計算により非線形方程式を解く場合、変位の微小増分 $d\boldsymbol{\delta}$ と残差の微小増分 $d\Psi(\boldsymbol{\delta})$ の関係、すなわち接線剛性が必要なため、式(12)の全微分を記すと、

$$d\Psi(\boldsymbol{\delta}) = \int_V d\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_V \mathbf{B}^T d\boldsymbol{\sigma} dV \quad (15)$$

となる。ここで、ひずみの微小増分 $d\mathbf{e}$ と変位の微小増分 $d\boldsymbol{\delta}$ の関係は、式(14)で定義された $\mathbf{B}$ を用いて $d\mathbf{e} = \mathbf{B} d\boldsymbol{\delta}$

$$(16)$$

と表せる。さらに、応力の微小応力増分 $d\boldsymbol{\sigma}$ と微小ひずみ増分 $d\mathbf{e}$ の関係は式(10)より、

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} d\mathbf{e} = \mathbf{D} \mathbf{B} d\boldsymbol{\delta} \quad (17)$$

となる。また、式(14)の関係を考慮すると

$$d\mathbf{B} = d\mathbf{B}_N(\boldsymbol{\delta}) \quad (18)$$

となる。式(17)と式(18)を式(15)に代入すると

$$d\Psi(\boldsymbol{\delta}) = \int_V d\mathbf{B}_N^T(\boldsymbol{\delta}) \boldsymbol{\sigma} dV + \mathbf{K} d\boldsymbol{\delta} \quad (19)$$

が得られる。ただし、

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_N \quad (20)$$

であり、 $\mathbf{K}_L$ は微小変形解析における剛性マトリクスと同一のものである。

$$\mathbf{K}_L = \int_V \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L dV \quad (21)$$

であり、また $\mathbf{K}_N$ は有限変形解析における非線形項で、

$$K_N = \int_V B^T D B_N(\delta) dV + \int_V B_N^T(\delta) D B_L dV + \int_V B_N^T(\delta) D B_N(\delta) dV \quad (22)$$

である。さらに、式(19)の第1項は

$$\int_V dB_N^T(\delta) \sigma dV = K_\sigma d\delta \quad (23)$$

と表すことができるが、これは応力レベルに依存する初期応力マトリクスである。したがって有限変形解析における最終的な接線剛性マトリクス K_T は次のように表すことができる。

$$d\Psi = (K_L + K_N + K_\sigma) d\delta = K_T d\delta \quad (24)$$

なお、本解析における反復計算に対しては、

$$r = \frac{\sqrt{\sum \Psi^2}}{\sqrt{\sum f^2}} \leq 0.01 \quad (25)$$

が満足されたとき解が収束したものとみなし、次の荷重段階へと移行する。

2. 3 塑性理論を適用したリンクリング現象の定式化

膜構造物の有限要素解析を行うにあたり、アイソパラメトリックシェル要素における応力照査点（積分点）において算定された最小主応力の値が正值、すなわち引張応力であれば弾性状態とみなし、膜材の引張実験より与えられる物性値を用いて剛性を算定する。しかしながら、得られた最小主応力が負値、すなわち圧縮応力の場合、弾性状態に比べ剛性が著しく低下し、変形量も大きくなるためリンクリング現象が発生した領域では一種の塑性崩壊が生じたものと考えることができる。このため、先の物性値を用いて数値解析を行うことは不合理である。そこで、このような領域に対しては、弾性領域において用いられた物性値を基に、応力状態に依存するような剛性を提案する必要があるため塑性理論を適用する。膜材料のリンクリング現象に塑性理論を導入するうえで、垂直性の原理が成り立ち、さらに降伏関数 F と塑性ポテンシャル Q が一致する結合塑性法則にしたがうものと仮定する。次に、一般的な構造物として適用される際の膜材料の作用応力は、膜材料の引張強度（膜材料が破綻するときの応力）に比し小さいものである。このため、膜材料の力学的特質を鑑みて、リンクリング現象が発生した後、除荷が生じた場合においても残留ひずみは微小なものであり、弾性状態と同様負荷と同じ応力履歴をたどるものと考えられる。これらのことをふまえ、以下にリンクリング現象に対する定式化^{17, 18)}の概要を述べる。

まず、平面応力場における膜材料の主応力状態は、圧縮応力が作用しておらず弾性挙動を示す領域に対しては、 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 = 0$ であり、また圧縮応力が生じリンクリング現象が発生し、塑性的な挙動を示す領域に対しては、 $\sigma_1 > \sigma_2 = 0 > \sigma_3$ という関係が成り立つ。これらの関係

を考慮して、相当応力 $\bar{\sigma}$ を次のように仮定する。

$$\bar{\sigma} = -\sigma_3 = -\frac{2(J_2')^{1/2}}{\sqrt{3}} \sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) - \frac{J_1}{3} \quad (26)$$

ただし、 J_1, J_2', θ は以下のように与えられる。

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\sigma_m \quad (27)$$

$$J_2' = \left[\frac{1}{2} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) + \tau_{xy}^2 \right] \quad (28)$$

$$\theta = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left[\frac{-3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(J_2')^{3/2}} \right] \quad (29)$$

(θ の存在範囲は $-\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}$)

$$J_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \tau_{xy}^2 \quad (30)$$

$$\sigma_x = \sigma_x - \sigma_m, \sigma_y = \sigma_y - \sigma_m, \sigma_z = \sigma_z - \sigma_m \quad (31)$$

また、降伏応力 Y はリンクリング現象の発生条件を考慮すると以下ようになる。

$$Y = 0 \quad (32)$$

式(26)と式(32)より降伏関数 F は次のように表される。

$$F = \bar{\sigma} - Y = -\sigma_3 \quad (33)$$

さて、通常の弾塑性体の数値解析において弾性挙動と塑性挙動を判別する際、 $r-1$ 番目の反復計算により得られた応力 σ^{r-1} に、増分応力 $d\sigma^r$ を加えた r 番目の応力 σ^r は、

$$\sigma^r = \sigma^{r-1} + d\sigma^r \quad (34)$$

と算定される。この後 σ^r, σ^{r-1} より得られる相当応力 $\bar{\sigma}^{r-1}, \bar{\sigma}^r$ と降伏応力 Y の関係により、 $Y > \bar{\sigma}^r > \bar{\sigma}^{r-1}$ あるいは $\bar{\sigma}^{r-1} > \bar{\sigma}^r$ であれば、弾性挙動を示すことになり、また $\bar{\sigma}^r > Y > \bar{\sigma}^{r-1}$ あるいは $\bar{\sigma}^r > \bar{\sigma}^{r-1} > Y$ であれば塑性挙動を示すことになる。一方膜材料の場合、除荷の際にも負荷と同じ応力履歴をたどるため $\bar{\sigma}^r$ と Y の関係のみで弾性挙動と塑性挙動の判別が可能である。すなわち、 $\bar{\sigma}^r = Y$ で弾性挙動を示し、 $\bar{\sigma}^r > Y$ で塑性挙動を示すことになる。このため、式(26)で定義された相当応力において、 σ_3 にマイナスを付し、数値計算を行ううえの便宜を計った。さらに、一般的な材料の降伏条件は一軸引張実験、粘着力、内部摩擦角等の関数になっているが、膜材料の場合剛性を付与するために予めプレストレストを与えており、降伏応力はこのプレストレストに依存することになる。しかしながら、プレストレストと外力の各々より算出される応力を加えて膜材料の応力評価を行うため、プレストレストから降伏応力を陽な形で表現することは難しい。このため、本解析における降伏関数はプレストレストと外力の2者を加えた応力により計算される最小主応力、すなわち式(26)により定義された相当応力を用いる。ここで、リンクリング現象が発生すると $\sigma_2 = 0$ となるため、図-2に示すような $\sigma_1 - \sigma_3$ 平面における2次元主応力空間を考える。先に述べられたように、弾性挙動と塑性挙動をの判別は $\sigma_3 = 0$ を境界にしており、最小

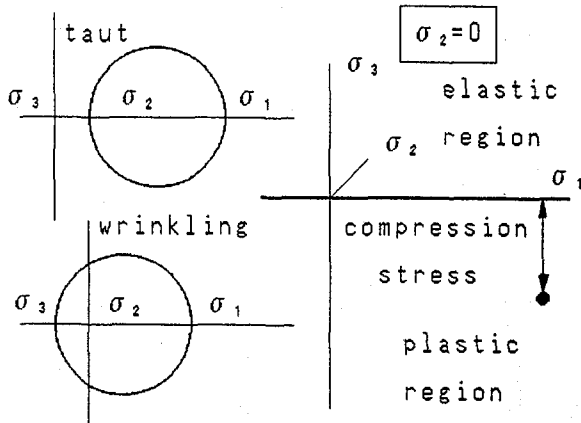


図-2 主応力空間における降伏条件

主応力が $\sigma_3 < 0$ となり、リンクリング現象が発生した際の圧縮応力は存在し得ないため、応力状態は $\sigma_3 = 0$ の軸上へと移行することになる。

さて、塑性挙動を示すリンクリング現象発生後の膜材の応力の微小増分とひずみの変化が、一般的によく知られている弾塑性マトリクス D_{ep}^* で関係付けられるものとする次式が成り立つ。

$$d\sigma = D_{ep}^* de \quad (35)$$

$$D_{ep}^* = D - \frac{D \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D}{\left[A + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \right]} \quad (36)$$

ここで、式(36)における材料の硬化にまつわる係数 A に対しては、膜材料は本来圧縮力に対する抵抗力が存在しておらず、非硬化の理想塑性材料と考えることができるため、本解析においては $A=0$ として取り扱う。つぎに式(36)の D_{ep}^* を計算するため、式(37)で与えられる流れベクトル a を考えることにする。

$$a^T = \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{\partial F}{\partial J_1} \frac{\partial J_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial (J_2')^{1/2}} \frac{\partial (J_2')^{1/2}}{\partial \sigma} \quad (37)$$

ただし、 a^T は以下の通りである。

$$a^T = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \right\} \quad (38)$$

である。式(37)の第2項の計算のために、式(29)を σ で微分すると次式が得られる。

$$\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \frac{-\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \cdot \left[\frac{1}{(J_2')^{3/2}} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} - \frac{3J_3}{(J_2')^2} \frac{\partial (J_2')^{1/2}}{\partial \sigma} \right] \quad (39)$$

つぎに、有限要素により塑性理論の定式化を行う上で降伏関数を取り扱い易くするために、式(37)を便宜上次の

ような形に書き換える。

$$a = C_1 a_1 + C_2 a_2 + C_3 a_3 \quad (40)$$

ここで、式(40)の係数 C_1 , C_2 , C_3 は、式(33)で与えられた降伏関数を式(37)へ代入すると、結局以下で示される形となる。

$$C_1 = \frac{\partial F}{\partial J_1} = \frac{1}{3} \quad (41)$$

$$C_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial (J_2')^{1/2}} - \frac{\tan 3\theta}{(J_2')^{1/2}} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\tan 3\theta \cdot \cos \left(\theta + \frac{4\pi}{3} \right) - \sin \left(\theta + \frac{4\pi}{3} \right) \right) \quad (42)$$

$$C_3 = \frac{-\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} - \frac{1}{(J_2')^{3/2}} \frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\cos(\theta + 4\pi/3)}{J_2' \cos 3\theta} \quad (43)$$

また、 a_1, a_2, a_3 は次の通りである。

$$a_1 = \frac{\partial J_1}{\partial \sigma} = \{1, 1, 0\} \quad (44)$$

$$a_2 = \frac{\partial (J_2')^{1/2}}{\partial \sigma} = \frac{1}{2 (J_2')^{1/2}} \{s_x, s_y, 2\tau_{xy}\} \quad (45)$$

$$a_3 = \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} = \left\{ \left(s_y s_z + \frac{J_2'}{3} \right), \left(s_z s_x + \frac{J_2'}{3} \right), -2s_z \tau_{xy} \right\} \quad (46)$$

以上の関係を式(36)に代入することにより、リンクリング現象発生後の塑性挙動を示す領域に対する弾塑性マトリクス D_{ep}^* が得られる。

3. 数値解析例

図-3に示すような、内側(半径: $r = a$)の円形境界を固定し、外側の円形境界($r = 4a$)上に膜材料に剛性を付与するためのプレストレスト: $T = 0.01 \text{ kgf/cm}^2$ を作用させる。図中の R は、リンクリング現象が発生した領域までの半径である。また、解析に用いた物性値を表-1に示す。

図-4に8節点アイソパラメトリックシェル要素による離散化状態を示す。節点数が224、要素数は64であり、積分点数は、面積積分に対しては 2×2 点とし、膜厚方向に対しては1点とした。プレストレストを導入した後、モーメント: M を作用させるために、外側の円形境界に反時計回り接線方向へ荷重: F を 0.05 kgf ピッチで作用させる。

表-1 膜材料の物性値

Young's modulus	$E = 6000.0 \text{ [kgf/cm}^2\text{]}$
Poisson's ratio	$\nu = 0.3$
Thickness	$t = 0.1 \text{ [cm]}$

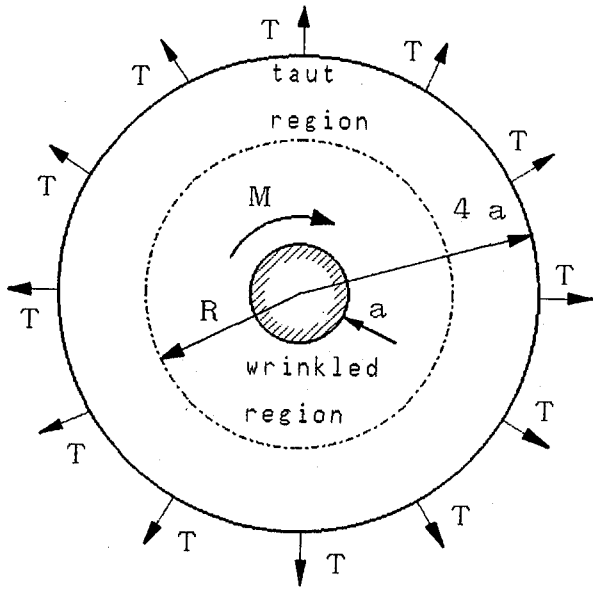


図-3 平面膜材の純ねじり問題

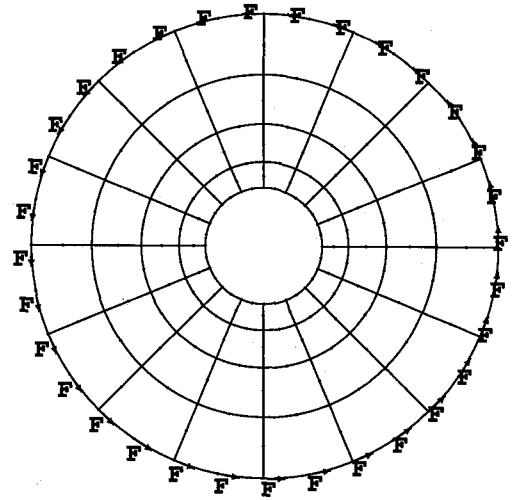
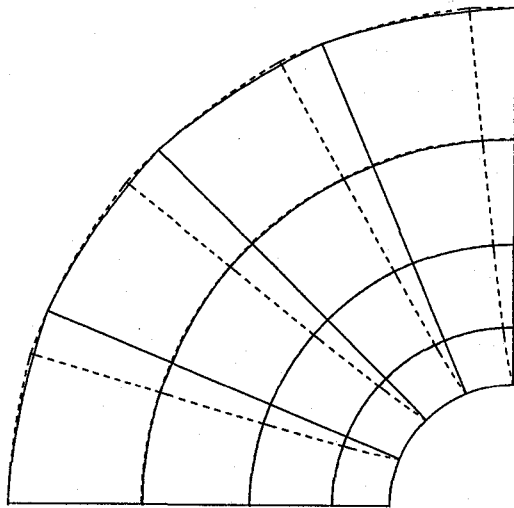
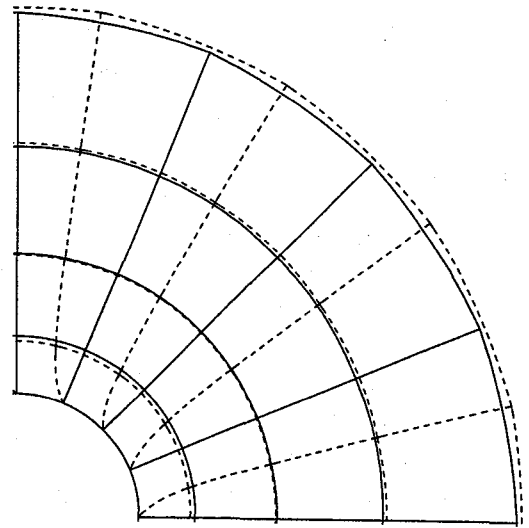


図-4 離散化状態

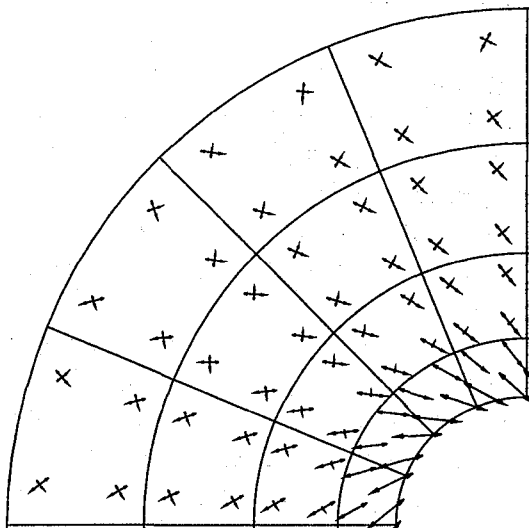


(A) $F=1.00 \text{ kgf}$

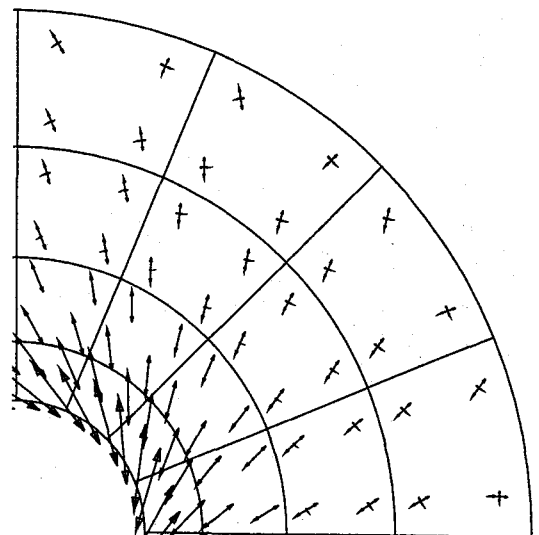


(B) $F=1.75 \text{ kgf}$

図-5 変形図



(A) $F=1.00 \text{ kgf}$



(B) $F=1.75 \text{ kgf}$

図-6 主応力図

図-5 (A), (B) は各々 $F=1.00\text{kgf}$ および $F=1.75\text{kgf}$ における、本解析で得られた変位を示している。図中、プレストレストを導入し初期平衡状態の変形を実線で示し、荷重の増加に伴う変位の増加が顕著に現れるようにプレストレストと荷重による変位を加え合わせたものを点線で示した。なお、対称性を考慮し離散化領域の $1/4$ を図示し、荷重による変位は6倍したものをプロットしている。図-5 (A) の荷重状態は、リンクリング現象が一番内側の要素の応力照査点全てで確認できる状態である ($R=5.354$)。同様に (B) は、内側から2番目までの要素において、全ての応力照査点でリンクリング現象が確認できる荷重状態である ($R=7.784$)。リンクリング現象の発生により、著しく変形が増大する様相がよくわかる。

図-6 (A), (B) は、図-4 の各荷重状態における主応力図を示している。同図 (A) において最大主応力に対する最小主応力の割合は最大でも2%以下であり、その割合は微小なものである。圧縮応力は次の荷重ステップで残差に含まれることになる。このため、荷重が増加しても反復計算の収束がなされた段階では、圧縮応力は減少することになるため、同図 (B) において、その割合はさらに小さな値である。このようにリンクリング現象が発生した領域に対して塑性理論の適用することにより、圧縮応力の低減がなされ、先に仮定したようにリンクリング現象が発生した領域の応力状態は、一軸応力状態となっていることがよくわかる。したがって式(33)で提案した降伏関数は、リンクリング現象を表現するための数学モデルとして有用であると考えられる。

本数値解析例で取り扱った膜材料のねじり問題に対しては、厳密解^{8, 19)}が与えられている。すなわち、ねじりモーメント： M に依存するリンクリング半径： $\bar{R}$ の支配方程式は、式(47)のように示される。

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} - \ln\left(\frac{B}{A}\right) - \frac{2}{3} = 0 \quad (47)$$

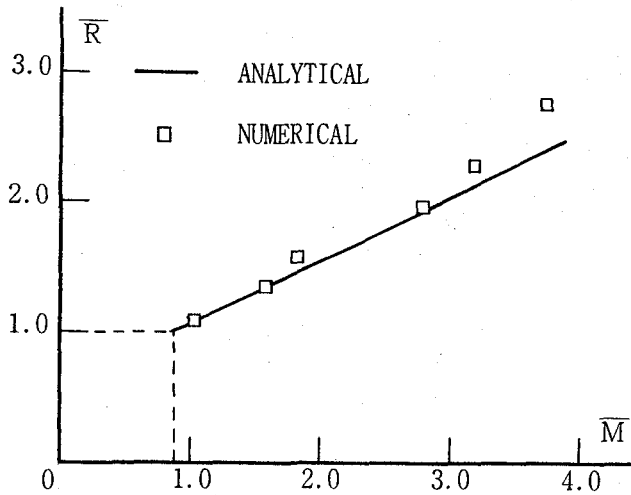


図-7 $\bar{M}-\bar{R}$ 関係

ここで、

$$A = \frac{C_4}{\bar{M}^2} - 1, \quad B = \bar{R}^2 \frac{C_4}{\bar{M}^2} - 1 \quad (48)$$

であり、また、

$$C_4 = \left[\bar{R} + \sqrt{\bar{R}^2 - \left(\frac{\bar{M}}{\bar{R}}\right)^2} \right]^2 + \left(\frac{\bar{M}}{\bar{R}}\right)^2 \quad (49)$$

$$\bar{M} = \frac{M}{2\pi a^2 t \sigma_0}, \quad \bar{R} = \frac{R}{a} \quad (50)$$

である。ただし、 σ_0 は無限遠方の一様応力であり、本例題の場合、次式のように与えられる。

$$\sigma_0 = \frac{nT}{2\pi(4a)t} \quad (51)$$

ただし、 n は $r=4a$ の境界に作用させるプレストレストの総和である。これらを用いると主応力は次のように表される。

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_0} = \begin{cases} \frac{C_4}{r} & ; 1 \leq \bar{r} \leq \bar{R} \\ C_4 - \left(\frac{\bar{M}}{\bar{R}}\right)^2 & ; \bar{R} < \bar{r} \end{cases} \quad (52)$$

$$\bar{r} = \frac{r}{a} \quad (53)$$

図-7 は、リンクリング現象が発生する領域に関して、厳密解と数値解析結果とを比較したものである。縦軸、横軸は各々式(50)で与えられる、無次元化された半径： $\bar{R}$ と無次元化されたモーメント： $\bar{M}$ である。モーメントが増すにしたがいリンクリング現象が発生する領域も大きくなってゆく。

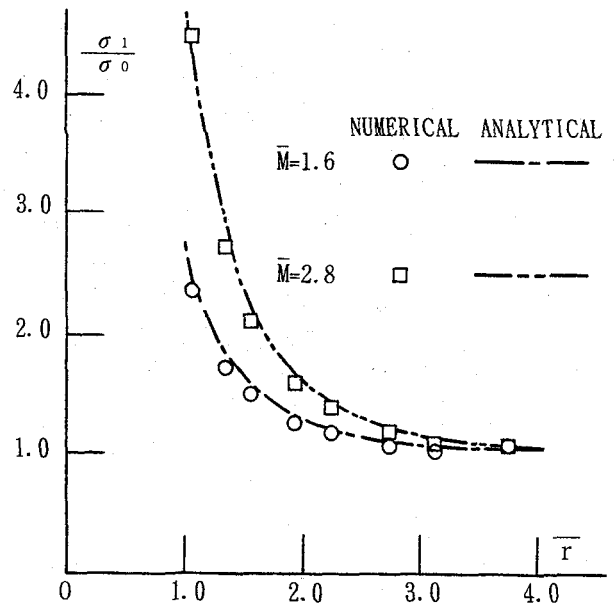


図-8 $\sigma_1/\sigma_0 - \bar{r}$ 関係

図-8は、先に示した荷重状態における最大主応力に関して、本解析により得られた結果と、厳密解とを比較したものである。図中、縦軸が式(52)により与えられる無次元化された最大主応力、横軸が式(53)により与えられる無次元化された半径： $\bar{r}$ であり、曲線が厳密解、○、□が本数値計算により得られた値である。半径が増すにしたがい徐々に主応力は減少し無限遠方での応力、すなわち本解析ではプレストレストによる初期応力に漸近してゆく。

4. 結論

本文は、膜構造物に特有なリンクリング現象を塑性理論を適用し定式化を行い、有限要素法に基づく数値解析手法を提起せんとするものである。また、膜材料は作用する応力に剛性が依存することを鑑み、幾何学的非線形性の考慮も行っている。本解析手法の有効性を述べると以下ようになる。

- 1) 塑性理論を適用しリンクリング現象の定式化を行うことにより、増分形の接線剛性が陽表示可能となり、反復計算における解の収束に対する安定性が増した。
- 2) リンクリング現象が発生した領域において、反復計算の収束が満足された段階では圧縮応力は微小な値となり、リンクリング現象が発生した領域の応力状態が一軸応力状態であることを評価できた。
- 3) 膜材料を離散化するにあたり、幾何学的非線形性の導入により弾性領域に対しても応力状態に依存した剛性評価が可能である。

最後に、リンクリング現象は一種のしわ状座屈現象であり、圧縮応力による面外変形も現れる。このことは膜構造物の力学的評価において重要な要因であり、今後の課題としたい。

参 考 文 献

- 1) J.W. Leonard : Tension Structures -Behavior and Analysis-, McGraw-Hill, 1988.
- 2) 植村益次 : wrinkleしたエアビームの耐荷能力, テント構造協会, 1969.
- 3) 川本眺万・林正夫 : 地盤工学における有限要素解析, 培風館, 1978.
- 4) 西村敏雄・登坂宣好・本間俊雄 : 有限要素法による平面張力場解析, 日本建築学会構造系論文報告集, 第368号, pp. 27~36, 1986.

- 5) R.K. Miller et al. : Finite Element Analysis of Partly Wrinkled Membranes, J. Computer & Structures, Vol.20, pp.631~639, 1987.
- 6) D.G. Roddmann et al. : The Wrinkling of Thin membranes part I II, ASME J. Applied Mechanics, Vol.54, pp.884~892, 1987.
- 7) D.G. Roddmann : Finite Element Analysis of Wrinkling Membranes, Communi. in Applied Numerical method, Vol.7, pp.299~307, 1991.
- 8) 宮村倫司・半谷裕彦 : 捻りを受ける円形張力膜のしわ挙動解析, 膜構造研究論文集'92, 日本膜構造協会, pp.15~23, 1992.
- 9) 宮村倫司・小田憲史・半谷裕彦 : 面内捻りを受ける円形張力膜に発生するしわの実験, 膜構造研究論文集'93, 日本膜構造協会, pp.1~9, 1993.
- 10) 遠藤典男・瀬川信哉・三井康司・笹川明 : エア・ビーム構造物の剛性評価に関する考察, 構造工学論文集, Vol.38A, pp.1329~1342, 1992.
- 11) 永谷・瀬川・遠藤・三井・笹川 : エア・ビーム構造物の簡易数値解析手法に関する研究, 日本建築学会構造系論文報告集, 第449号, pp.133~141, 1993.
- 12) S. Segawa et al. : Experimental and Numerical Examination of Air Beam Structures, Proc. of the IASS-MSU Int. Symposium, Istanbul-TURKEY, pp.605~614, 1993.
- 13) 遠藤典男・瀬川信哉・笹川明・三井康司 : 膜構造におけるリンクリング現象評価に関する一考察, 土木学会論文集, No.495/I-28, pp.55~62, 1994.
- 14) 正岡典夫・石井一夫 : 低次四変形要素による応力変形解析, 膜構造研究論文集'91, 日本膜構造協会, pp.1~12, 1991.
- 15) 南宏和 : 膜構造物用膜材料の力学的特性, 形成加工, 第2巻, 第3号, pp.198~202, 1990.
- 16) 山田嘉昭 : 塑性・粘弾性, 倍風館, 1980.
- 17) O.C. Zienkiewicz (吉識雅夫・山田嘉昭 監訳) : マトリクス有限要素法 : 倍風館, 1984.
- 18) D.R.J. Owen and E. Hinton (山田嘉昭 他訳) : 塑性の有限要素法, 科学技術出版社, 1988.
- 19) M.M. Mikulas, Jr. : Behavior of a Flat Stretched Membrane Wrinkled by the Rotation of an Attached Hub, NASA TN D-2456, 1964.

(1995年9月18日受付)