

ディジェネレーション法による 平面ティモシェンコ梁要素について

ON PLANAR TIMOSHENKO BEAM ELEMENT BASED ON DEGENERATION APPROACH

山口栄輝*, 西野文雄**, 久保喜延***

Eiki YAMAGUCHI, Fumio NISHINO and Yoshinobu KUBO

* Ph. D 九州工業大学助教授 工学部設計生産工学科 (〒804 福岡県北九州市戸畑区仙水町1-1)

** Ph. D 埼玉大学大学院教授 政策科学研究科 (〒338 埼玉県浦和市下大久保225)

*** 工博 九州工業大学教授 工学部設計生産工学科 (〒804 福岡県北九州市戸畑区仙水町1-1)

Based on degeneration approach, an 8-node degenerate Timoshenko beam element is proposed. This element has evolved from a 6-node degenerate beam element proposed previously and possesses the following characteristics: (a) relative displacement degrees-of-freedom are employed instead of rotations; (b) only a single degree-of-freedom is assigned to each relative node, enhancing computational speed and making a fictitious coefficient unnecessary; and (c) 3x2 or higher order Gauss quadrature is applicable to all the terms in the construction of its element stiffness matrix. Through a numerical example, the proposed element is shown to be computationally superior to the conventional Timoshenko beam element in the analysis of a nonprismatic beam. Moreover, because of (a) and (c), it is expected that the element can be extended straightforwardly to solve 3-dimensional geometrical/material nonlinear problems.

Key Words: degeneration approach, FEM, Timoshenko beam

1. 緒言

構造部材の解析にあたっては、(1)部材の特徴を生かした仮定を設けてモデル化をする、(2)モデルの支配方程式および境界条件の誘導する、(3)境界値問題を解く、という手順がとられてきた。梁や板、シェル等の構造部材については、古くからこの手法による研究が行われており、すでに多くの書物^{1) - 3)}が出版され、実験結果等との比較により、モデル化に際して採用された仮定の妥当性も実証されている。しかしながら、(2)で誘導された境界値問題が解析的に解けるのは単純な問題に限られており、現実的な多くの問題では、何らかの数値解法が用いられている。

現在、構造解析で最もよく用いられている数値解法は、コンピュータの発達に伴って急速に発展した有限要素法であろうと思われる。有限要素法を用いる場合、上述した従来からの解法手順の流れに沿い、(2)で誘導された境界値問題を対象として、有限要素法で離散化して解析することが一般に行われている。

これに対して、構造部材も一般の固体であると見な

して離散化するアプローチもある。この場合、構造部材の種類にかかわらず、固体力学における支配方程式が常に解く対象となる。ただし、構造部材を完全に一般の固体として扱う解法は不経済であり、従来の手法では(1)の段階で取り込む構造部材の仮定を、このアプローチでは、有限要素や構成則の中に反映することが試みられている。

文献4)にならい、ここでは前者を古典解法 (classical approach)、後者をディジェネレーション法 (degeneration approach) と呼ぶ。

固体の支配方程式に比べると、構造部材の支配方程式は一般に高階で複雑な微分方程式になる。このため、古典解法では、高次の形状関数を有した有限要素の採用が必要になる。また古典解法では回転角が節点自由度となるため、3次元問題や幾何学的非線形問題では、複雑な処理が必要となる。こうしたことを背景に、板やシェルの解析では1970年代初頭より、ディジェネレーション法による解法が試みられてきた^{4) - 6)}。

薄肉断面部材は鋼構造物の多くに用いられており、

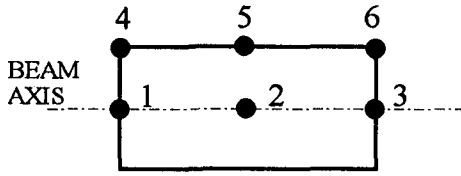


図-1 B 6 梁要素

その力学的挙動に関する研究も活発に行われてきた¹⁾。仮想仕事の原理に基づいた統一的な薄肉断面部材の基礎理論もすでに構築されている⁷⁾。薄肉断面部材の有限要素解析も、大半はこの理論の延長線上で行われており、古典解法となっている。しかしながら、薄肉断面部材の理論は、物理的意味のとらえにくい反りモーメントが導入されているなど、必ずしも容易なものではない。この点に鑑み、著者らは先に、薄肉断面部材の有限要素解析にディジェネレーション法を適用し、単純で直感的にも理解しやすい解析法を提案した⁸⁾。

この薄肉断面部材解析法では、I 形／箱形断面部材要素を開発し提案しているが、その基礎になったのは、図-1 に示す6 節点の平面梁要素 (B 6 梁要素) である。著者らは、すでにこの B 6 梁要素を用いて幾何学的非線形解析も行い、良好な結果を得ている^{9), 10)}。ところで、B 6 要素の開発に用いた仮定からすれば、この梁要素は、本来、ティモシェンコ梁としても機能するはずであるが、現在のところ、この要素の適用は、ベルヌーイ・オイラー梁の問題に限られている。

本研究は、ディジェネレーション法に基づいた平面ティモシェンコ梁要素の提案を目的とする。開発の基礎には B 6 梁要素を用いる。そのため、ここでは B 6 梁要素についてまず簡単にその概略を記述する。ついで、B 6 梁要素の改良すべき点に言及し、それをもとに新たなティモシェンコ梁要素を提案する。ティモシェンコ梁については、古典解法による要素もすでに得られている¹¹⁾。本論文の最後では、古典解法の要素の誘導についても簡単にふれた上で、数値計算を行い、提案する要素との比較を試みる。

2. B 6 梁要素

2.1 概要

ディジェネレーション法では、固体力学の支配方程式を用いて有限要素法の定式化を行う。したがって、アイソパラメトリック要素を用いた場合、剛性マトリックス K_{ij}^{ab} は一般に次のように表される。

$$K_{ij}^{ab} = \int_V N_i^a D_{ijkl} N_j^b dv \quad (1)$$

ここに、 N^a は節点 a に対応した形状関数、 D_{ijkl} は弾性テンソル成分である。なお、式(1)では、下添字に関して総和規約を用いている。

式(1)は一般の固体を対象としたものと同じである。これを梁の解析に適用するため、B 6 梁要素では、断面の平面保持、梁軸直角方向の直応力無視といった梁理論の基本仮定³⁾を有限要素、構成則に取り入れている。

まず断面の平面保持については、梁の軸線直角方向に一次の形状関数を用いることによりこれを満足させる。このため、図-1 に示すように、B 6 梁要素は梁軸直角方向に2 個の節点を有するものとなっている。ただし、B 6 梁要素の節点配置は特殊なものであり、これについては次節であらためて記述する。

軸線方向以外の直応力を無視した場合、構成式は次のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & kG \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

ここに、 E 、 G 、 k はそれぞれヤング率、せん断弾性係数、補正係数であり、 x_1 を梁軸方向、 x_2 を梁軸直角方向としている。しかしながら、文献12) のシェル解析での議論からも理解されるように、梁の高さ方向の剛性を完全に無視した場合、数値計算上問題が生じる。このため式(2)に代えて次式が用いられている^{9), 10)}。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & Z & 0 \\ 0 & 0 & kG \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

ここに Z は仮想係数であり、数値計算を安定させるために導入されている。梁軸直角方向の直応力が小さいことから、梁理論では断面形状不変の仮定も用いられている³⁾ が、これは梁軸直角方向の直ひずみ ε_{22} が、一般に無視できる程度に小さいことを示唆している。このことから推察されるように、 Z の値が解におよぼす影響は小さい^{9), 10)}。実際の数値計算では、簡単のために $Z = E$ とおき、高精度の解が得られている¹⁰⁾。

2.2 相対節点

B 6 梁要素の節点は、梁軸線上に位置する3 つの参照節点 (reference node)、およびそれらと対をなす3

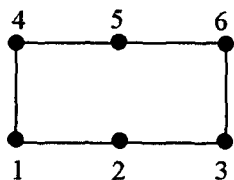


図-2 6節点四辺形要素

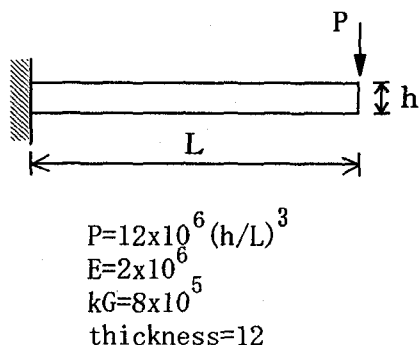


図-3 片持梁

つの相対節点 (relative node) からなっている。(節点 1 と 4, 2 と 5, 3 と 6 が対である。) 参照節点は通常の節点であり, そこに割り当てられる座標, 変位はその位置での絶対的な値である。これに対し, 相対節点の座標, 変位は対応する参照節点からの相対座標, 相対変位である。

相対節点の使用は文献12)が最初である。そこでは, 大変形問題における回転角の取り扱いが煩雑さを伴うため, 回転角に代えて相対変位を用いたと説明されている。回転角と異なり, 相対変位はベクトル量であるため, たしかに定式化は非常に簡潔なものとなっている¹²⁾。

ところで, 煩雑な定式化を避けるためには, 相対変位という新たな概念を持ち出さなくとも, 単に変位を用いれば事足りる。相対変位には, 回転角との関係が明快で変換が容易であるという利点もあるが, これはそれほど本質的なこととは思われず, 通常の6節点四辺形要素(図-2)を用いれば十分のように思われる。そこで, 図-3に示す片持梁のたわみをB6梁要素と通常の6節点四辺形要素で求めてみた。この計算では, アスペクト比(要素の長さ/高さ)の異なる5ケースを考慮し, 一要素のみを用いて解析を行った。なお, 本研究ではすべての計算にSun SPARCstation 2を用い, 倍精度による計算を行った。

計算結果は厳密解³⁾とともに表-1にまとめている。この表より, いずれの要素を用いても, アスペクト比

表-1 自由端でのたわみ: 相対変位の効果

L/h	B 6 梁要素	通常要素	厳密解
1 0	2.0125	2.0125	2.0125
1 0 ²	2.0001	2.0001	2.0001
1 0 ³	2.0000	2.0005	2.0000
1 0 ⁴	2.0000	-2.1568	2.0000
1 0 ⁵	2.0000	0.5000	2.0000

が10²以下ではティモシェンコ梁の厳密解が得られることがわかる。しかしながら, 通常要素ではアスペクト比が10³で誤差が生じ始め, 10⁴以上では信頼できる解が得られなかった。これに対し, B 6 梁要素では10⁵でも十分に精度よい解が得られており, 明確な差が生じた。

これら2つの要素の違いは, 対をなす節点間の差の表現にある。通常の6節点四辺形要素の場合, すべての節点とその位置での座標, 変位を節点値としてとるため, アスペクト比が大きくなると, 対をなす節点間で節点値に差が生じるのはかなり下位の桁になる。一方で計算機の扱える桁数には限りがあるため, アスペクト比がある値より大きくなると, 対をなす節点間の差が桁落ちのために計算機内で正確に表現されなくなる。これに対し, 相対値を節点値として用いると, 節点間の差が陽に表現されるため, 桁落ちによる誤差を小さくすることができる。表-1の結果は, このことに起因していると考えられ, 相対節点の採用は精度を向上させるためにも重要な役割を果たしていることが理解される。

文献13)には通常の6節点四辺形要素を用いた片持梁の幾何学的非線形解析の結果, 文献10)にはB 6 梁要素による同じ問題の解析結果が示されているが, 後者の方がはるかに精度良い結果となっている。相対節点の採用は, この幾何学的非線形解析でも大きな役割を果たしていると思われる。

なお, 表-1には自由端の節点変位のみを示しているが, 梁中央に位置する中間節点でも同様の結果が得られる。これらの要素の梁軸方向の形状関数は2次関数である。これに対し, 次節で示すように, 梁のたわみは3次関数で表される。にもかかわらず, これらの要素を用いれば, 一要素で高精度の変位が各節点で得られる点には注意しておきたい。

2.3 次数低減積分

被積分関数の次数から判断すれば, 要素剛性マトリクスのせん断変形に関する項については, 3 x 2 のガ

表-2 自由端でのたわみ：次数低減積分の効果

L/h	3 x 2	2 x 2	厳密解
2	2.19129	2.31250	2.3125
10 ²	1.50075	2.00013	2.00013

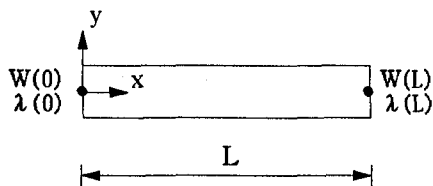


図-4 ティモシェンコ梁

ウス積分スキームが必要となる。しかしながら、2.2の数値計算では、すべての項について2 x 2のガウス積分スキームを用いた。これはディジェネレーション法で高精度の解を得るための一つのテクニックであり、次数低減積分 (reduced integration) と呼ばれている¹⁴⁾。ちなみに、図-3の片持梁でアスペクト比が2と10²の場合の計算を、せん断項に3 x 2と2 x 2のガウス積分スキームを適用して行ってみた。計算結果を、厳密解³⁾とともに表-2にまとめているが、3 x 2のガウス積分スキームを適用すると、特にアスペクト比が大きい場合において顕著な精度の低下が見られる。

次数低減積分の有効性は、1970年代初期より認められてきた⁵⁾。有限要素法が剛性を過大評価する傾向があるのに対し、数値積分の次数を低減するとそれを緩和するという事実があり、次数低減積分の効果はこれと関連づけて考えられていた。近年はそれに代わり、混合法による定式化との関連から、説明づけられている¹⁴⁾。これに対し、ここでは、ティモシェンコ梁理論との整合性から、次数低減積分の効果について考察を試みる。なお、以下では簡単のために、分布荷重が作用しない等断面梁を対象とする。

ティモシェンコ梁理論におけるひずみ場をまず求める。そのために、図-4に示すような長さLのティモシェンコ梁を取り上げ、左端を原点とする梁軸に平行なx軸、それと直角方向にy軸を設定する。端部でのたわみw(0)、w(L)とたわみ角λ(0)、λ(L)を用いてこの梁の変位場を表現し、それをもとに、ひずみ場を導く。文献3)では、ベルヌーイ・オイラー梁について変位場の誘導がなされている。ここではその誘導方法に従い、ティモシェンコ梁の変位場を求める。

分布荷重が作用しない場合、ティモシェンコ梁の支配方程式は次式で表される³⁾。

$$EI w^{IV} = 0 \quad (4)$$

この一般解は次のように得られる。

$$w = c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4 \quad (5)$$

C₁～C₄が未定係数であり、

$$\lambda(0) = -Bw'''(0) - w'(0) \quad (6)$$

$$\lambda(L) = -Bw'''(L) - w'(L) \quad (7)$$

なる関係に注意すれば、C₁～C₄を端部でのたわみ、およびたわみ角で表すことができ、次式が容易に得られる。

$$w = \frac{1}{1 + 12B/L^2} [\phi_1 w(0) + \phi_2 \lambda(0)L + \phi_3 w(L) + \phi_4 \lambda(L)L] \quad (8)$$

ここに

$$B = \frac{EI}{GkA} \quad (9)$$

$$\phi_1 = 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 12\frac{B}{L^2}\frac{x}{L} + \left(1 + \frac{12B}{L^2}\right) \quad (10)$$

$$\phi_2 = -\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(2 + 6\frac{B}{L^2}\right)\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(6\frac{B}{L^2} + 1\right)\frac{x}{L} \quad (11)$$

$$\phi_3 = -2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 12\frac{B}{L^2}\frac{x}{L} \quad (12)$$

$$\phi_4 = -\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(1 - 6\frac{B}{L^2}\right)\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 6\frac{B}{L^2}\frac{x}{L} \quad (13)$$

ティモシェンコ梁理論に従えば、式(8)より直ひずみε、せん断ひずみγが次のように求められる。

$$\begin{aligned} \epsilon &= -yw'' \\ &= -\frac{y}{1 + \frac{12B}{L^2}} \left[\left(\frac{6}{L^2} - \frac{12}{L^3}x \right) (w(L) - w(0)) \right] \end{aligned}$$

$$+ \left\{ -\frac{6x}{L^2} + \frac{4}{L} \left(1 + 3 \frac{B}{L^2} \right) \right\} \lambda(0) \quad (14)$$

$$+ \left\{ -\frac{6x}{L^2} + \frac{2}{L} \left(1 - 6 \frac{B}{L^2} \right) \right\} \lambda(L)]$$

$$\gamma = -Bw''''$$

$$= -\frac{B}{1 + \frac{12B}{L^2}} \left[\frac{12}{L^3} (w(0) - w(L)) \right. \quad (15)$$

$$\left. - \frac{6}{L^2} (\lambda(0) + \lambda(L)) \right]$$

次にB6梁要素におけるひずみ場を求める。この場合、ひずみと変位の関係は固体力学で定義されている一般的なものであり、ひずみ場は比較的容易に得られる。その際、中間節点が梁中央 ($x=L/2$) に位置するとした上で、その節点値を梁理論により端部節点の値で表せば、次式が得られる。

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= -\frac{y}{1 + \frac{12B}{L^2}} \left[\left(\frac{6}{L^2} - \frac{12}{L^3} x \right) (w(L) - w(0)) \right. \quad (16)$$

$$+ \left\{ -\frac{6x}{L^2} + \frac{4}{L} \left(1 + 3 \frac{B}{L^2} \right) \right\} \lambda(0)$$

$$+ \left\{ -\frac{6x}{L^2} + \frac{2}{L} \left(1 - 6 \frac{B}{L^2} \right) \right\} \lambda(L)]$$

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$= \left[\frac{3}{L^2 + 12B} X^2 - \frac{L^2 - 24B}{4(L^2 + 12B)} \right] (\lambda(0) + \lambda(L)) \quad (17)$$

$$- \left[\frac{6}{L(L^2 + 12B)} X^2 - \frac{L^2 - 24B}{2L(L^2 + 12B)} \right] (w(0) + w(L))$$

式(17)では表現を簡潔にするため、 $X = x - L/2$ としている。またここでは、B6梁要素の節点値にもたわみ角を用いて表している。

これらのひずみ場を比較すると、直ひずみを表す式(14)と式(16)は完全に一致しており、梁理論でもディジェネレーション法でも同じひずみ場が得られることがわかる。一方、せん断ひずみは、ティモシェンコ梁理論では一定となるのに対し、ディジェネレーション法では梁軸に沿って変化している。式(15)、(17)より、ディジェネレーション法におけるせん断ひずみ場で、梁理論のひずみと等しくなる点を求めると、 $X = \pm L/2\sqrt{3}$ となる。これはガウス積分スキームとして2点積分を用いるときのサンプリングポイントに該当す

る。

上記より、要素剛性マトリクスの直ひずみに関する項については、厳密な積分を行えばよいことがわかる。これに対し、ティモシェンコ梁理論におけるせん断ひずみは一定であり、またディジェネレーション法でその値をとるのは2点積分の場合のサンプリングポイントであることから、要素剛性マトリクスのせん断ひずみに関する項を梁理論と整合させて評価するためには、梁軸方向のガウス積分点を2個とすべきであることが理解される。せん断ひずみに関する項の積分を厳密に評価するためには3点積分を用いる必要があるにもかかわらず、次数を低減させたガウス積分スキーム(次数低減積分)の方が良い解を与えるのはこのためである。

ところで、式(17)はXのみの関数である。これは、せん断ひずみに関する項の梁軸直角方向についてはガウスの1点積分で十分であることを示唆している。実際、図-3の片持梁の解析を2x1の積分スキームでも行ったが、2x2の場合と全く同じ結果が得られた。しかしながら、直ひずみに関する項の積分にはあくまで2x2の積分スキームが必要であり、せん断ひずみの項に異なった積分スキームを用いるのは計算効率の点から好ましくない¹⁵⁾。このため、B6梁要素の要素剛性マトリクスの算出には、すべての項に2x2の積分スキームを適用するのが最善であると判断される。

2.4 問題点・改善すべき点

以上の節で見たように、B6梁要素を用いれば、ティモシェンコ梁の解析を精度良く行うことが可能である。しかしながら、改良すべき点もまだまだ残されている。その一つに、式(3)の仮想係数Zが挙げられる。これは人工的なものであり、 $Z=E$ とすることが一つの目安ではあるが、他の値をとることも可能である。Zの値が解に及ぼす影響は小さいとはいえるものの、全く影響がないわけではないことを思えば、仮想係数Zの値のあいまいさに関して何らかの改善が必要であると思われる。また相対節点の節点量である相対変位には何の拘束条件も加えられていないが、断面形状不変という梁理論の仮定³⁾を用いれば、相対変位に何らかの条件を課すことも可能である。これは、B6梁要素の自由度の減少につながるため、計算速度向上のためにも考慮すべき事柄である。

前節で議論したように、要素剛性マトリクスのせん断ひずみに関する項の梁軸方向積分には2点のガウス積分スキームを適用する必要がある。これ以外の積分スキームを用いると精度の低下を招く。弾性梁の解析

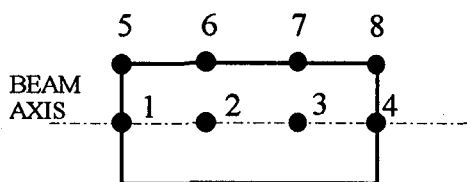


図-5 B8梁要素

に関する限り、2点積分で特に支障は生じないが、弾塑性解析を行い、要素内での塑性域の広がりをも的確にとらえようとする際には問題となる。

次章では、これらの点を改良した新たなティモシェンコ梁要素を提案する。

3. 提案する要素

3.1 仮想係数・相対節点の自由度に関する改善策

梁の断面形状が不変であるならば、対をなす参照節点と相対節点の相対的な位置の変化は梁軸方向に限られる。これは相対変位の梁軸直角方向成分が拘束できることを意味しており、相対節点の自由度には、梁軸方向の相対変位のみを与えればよいことになる。

仮想係数 Z は、式(2)を用いた際に生じる数値計算上の不安定性を改善するために導入されている。この不安定性は、梁軸直角方向の剛性がないことに起因している。ところで、上記のように、相対節点の梁軸直角方向の自由度を拘束すれば、この方向に無限大の剛性を課したことに等価になる。このため、上記の改善策を施せば、自由度の減少による計算速度の向上がはかれるのみならず、仮想係数 Z が不要となるため、自動的に仮想係数に伴う問題も解決する。

3.2 ガウス積分スキームに関する改善策

6節点要素を用いる限り、ガウス積分スキームに関する改善を行うのは不可能である。そこで、ここでは、節点数を増した8節点要素（B8梁要素；図-5）を取り上げる。

2.3と同様に、分布荷重が作用していない等断面梁部材を考え、この梁のひずみ場を誘導すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \varepsilon = -yw'' \\ = -\frac{y}{1 + \frac{12B}{L^2}} \left[\left(\frac{6}{L^2} - \frac{12}{L^3}x \right) (w(L) - w(0)) \right. \\ \left. + \left\{ -\frac{6x}{L^2} + \frac{4}{L} \left(1 + 3\frac{B}{L^2} \right) \right\} \lambda(0) \right] \end{aligned}$$

表-3 自由端でのたわみ：積分スキームの検討

直ひずみ項	せん断ひずみ項	たわみ	厳密解
3 x 2	4 x 2	2.00013	2.00013
3 x 2	3 x 2	2.00013	2.00013
2 x 2	3 x 2	—	2.00013
3 x 2	2 x 2	—	2.00013
5 x 2	5 x 2	2.00013	2.00013
6 x 4	6 x 4	2.00013	2.00013

$$+ \left\{ -\frac{6x}{L^2} + \frac{2}{L} \left(1 - 6\frac{B}{L^2} \right) \right\} \lambda(L)] \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \gamma = -Bw''' \\ = -\frac{B}{1 + \frac{12B}{L^2}} \left[\frac{12}{L^3} (w(0) - w(L)) \right. \\ \left. - \frac{6}{L^2} (\lambda(0) + \lambda(L)) \right] \quad (19) \end{aligned}$$

ただし、ここでは中間節点が梁の3等分点に位置するとしている。

式(14)と式(18)、式(15)と式(19)を比較すると、B8梁要素のひずみ場は、直ひずみ、せん断ひずみともに梁理論のものと完全に一致していることがわかる。これは、要素剛性マトリクスの算出にあたっては厳密な積分を行えばよく、直ひずみに関する項には3 x 2、せん断ひずみに関する項については4 x 2のガウス積分スキームを適用すればよいことを示している。

ところで、直ひずみとせん断ひずみの項に異なったガウス積分スキームを用いるのは計算効率の点から好ましくない¹⁵⁾。また必要最小限の積分次数は、必ずしも厳密に積分を行うためのものと同じではない¹⁴⁾。そこで、いくつかのガウス積分スキームを用いて図-3の片持梁（アスペクト比100）を解析した。

計算結果は表-3にまとめている。すべての項に3 x 2のガウス積分スキームが適用できることが、この表より理解される。3 x 2より積分次数を下げると、ゼロエネルギーモードが生じて解が得られなくなるが、逆に次数を上げることは解析結果に何ら悪影響を及ぼさない。すなわち、弾塑性解析において、多くのガウス積分点を用いて塑性域の広がりをとらえる際にも、B8梁要素は十分に適用可能である。

3.3 B8梁要素

以上のことより、図-5の8節点のディジェネレイ

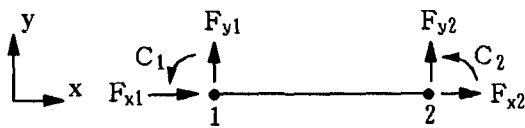


図-6 CB梁要素

ト梁要素 (B 8 梁要素) をここでは提案する。1~4 が参照節点, 5~8 が相対節点であり, B 6 梁要素の長所を引き継ぐ一方で, 仮想係数 Z は必要とせず, 構成則には式 (2) を用いればよい。各相対節点で梁軸直角方向の相対変位が拘束されているため, この要素の自由度数は 12 であり, 断面形状不変の仮定は完全に満足されている。

要素剛性マトリクスの算出に当たっては, すべての項に 3×2 のガウス積分スキームを適用すればよい。ただし, これは最低の積分次数であり, 必要に応じて, これ以上の積分次数を用いることに何ら支障はない。

4. 古典解法におけるティモシェンコ梁要素 (CB 梁要素) との比較

4.1 CB 梁要素

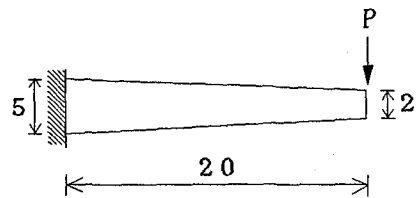
式 (4) の支配方程式に仮想仕事の原理を適用し, 式 (8) を形状関数に用いて離散化すれば, 古典解法におけるティモシェンコ梁要素 (CB 梁要素; 図-6) が誘導される。これは 2 節点 6 自由度を有する要素である。

弾性挙動が解析対象の場合には, この要素の剛性マトリクスが陽な形で得られ, その曲げ挙動に関する部分の剛性方程式は次のように与えられる¹¹⁾。

$$\begin{Bmatrix} F_{y1} \\ C_1 \\ F_{y2} \\ C_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{(1 + \frac{12B}{L^2})L^3} \begin{Bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 + 12B & -6L & 2L^2 - 12B \\ & & 12 & -6L \\ \text{sym.} & & & 4L^2 + 12B \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \lambda_1 \\ w_2 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

4.2 数値計算例

CB 要素では, 等断面部材を対象として, 剛性マトリクスが陽な形で得られている。このため, 等断面部材の解析では, ディジェネレーション要素よりも短時間で解を得ることが可能である。しかしながら, CB 梁要素で変断面部材を解析する際には, まず変断面部材を等断面部材の集合体 (断面が階段状に変化する部材) としてモデル化する必要が生じる。これに対し,



$P=10000$
 $E=2 \times 10^6$
 $kG=8 \times 10^5$
 $\text{thickness}=1$

図-7 変断面片持梁

表-4 厳密解を得るのに必要な要素数と CPU 時間

	B 8 梁要素	CB 梁要素	B 6 梁要素
要素数	3	173	7
CPU 時間 (sec)	0.106	1.138	0.153

B 8 梁要素は基本的に変断面部材にも対応できるものであり, 特別な処置を必要としない。したがって, 変断面部材を B 8 梁要素で解析すれば, CB 梁要素に比べて, 少ない要素数で精度良い解を得ることが期待される。

このような観点から, 図-7 に示す変断面片持梁の解析を B 8 梁要素および CB 梁要素を用いて行った。この梁の自由端でのたわみの厳密解は 2.4993 である。本解析では, この厳密解が得られるまで要素数を増やし, そのときに必要な計算時間 (CPU 時間) を記録した。

厳密解を得るのに必要な要素数とそのときの CPU 時間を表-4 にまとめている。B 8 梁要素による解析では 3 要素で厳密解が得られたのに対し, CB 梁要素では 173 要素を必要とした。B 8 梁要素では要素剛性マトリクスの算出に数値積分を必要とするが, CB 梁要素に比してはるかに少ない要素数で厳密解が得られるため, 全体としての計算時間は, CB 梁要素の場合の 1/10 以下となっている。参考までに, B 6 梁要素でも同じ解析を行った。B 8 梁要素には劣るものの, CB 梁要素より優れた結果が得られた。

5. 結言

本研究では, ディジェネレーション法に基づいたティモシェンコ梁要素 (B 8 梁要素) を提案した。これは B 6 梁要素を基礎としており, 次の特長を有している。

- (a) 節点自由度として、回転角に代えて相対変位を採用している。このため、すべての自由度がベクトル量になっており、加えて計算過程における桁落ちが少なくなっている。
- (b) 相対変位の梁軸直角方向成分を拘束することにより、計算速度の向上をはかるとともに、あいまいさの伴う仮想係数 Z を不要としている。
- (c) 要素剛性マトリクスの算出に際しては、 3×2 のガウス積分スキームがすべての項に適用可能であり、またそれ以上の積分次数の採用も許される。
- (d) 変断面部材への適用が容易であり、その解析においては、陽な剛性マトリクスを有する古典解法のティモシェンコ梁要素 (CB 梁要素) より、計算効率の点で優れている。

B 8 梁要素は、上記 (d) のような利点も有しているが、ディジェネレーション法に基づくこの要素のより大きな利点は、幾何学的／材料非線形問題や 3 次元問題への拡張の容易さにある。近年、宇宙工学の発展とともに 3 次元ティモシェンコ梁の非線形解析が注目を集めているが¹⁶⁾、本研究で提案した B 8 梁要素をもとに、著者らも今後その研究に取り組む予定である。

参考文献

- 1) Vlasov, V.Z.: Thin-Walled Elastic Beams, National Science Foundation, Washington D.C., 1961.
- 2) Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger, S.: Theory of Plates and Shells, 2nd ed., McGraw-Hill, London, 1959.
- 3) 西野文雄, 長谷川彰夫: 構造物の弾性解析, 新体系土木工学 7, 技法堂, 1983.
- 4) Kanok-Nukulchai, W.: A simple and efficient finite element for general shell analysis, Int. J. Numer. Meths. Eng., Vol.14, pp.179-200, 1979.
- 5) Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Too, J.M.: Reduced integration technique in general analysis of plates and shells, Int. J. Numer. Meths. Eng., Vol.3, pp.275-290, 1971.
- 6) Parisch, H.: A critical survey of the 9-node degenerated shell element with special emphasis on thin shell application and reduced integration, Comp. Meths. Appl. Mech. Eng., Vol.20, pp.323-350, 1979.
- 7) 西野文雄: 薄肉断面部材の基礎理論, 鋼構造の研究 (岡本舜三編), 奥村敏恵教授還暦記念, 技法堂出版, pp.381-462, 1977.
- 8) 山口栄輝, 西野文雄: ディジェネレーション法に基づいた I 形／箱形断面部材の有限要素解析手法, 構造工学論文集, Vol.40A, pp.23-28, 1994.
- 9) Kanok-Nukulchai, W., Hasegawa, A. and Nishino, F.: Generic formulation procedure for large deformation analysis of structural elements, Proc. of JSCE, No.368/I-5, pp.65-73, 1986.
- 10) 山口栄輝, Kanok-Nukulchai, W., 太田俊昭: 有限要素法による棒材の有限変位解析に関する研究, 構造工学論文集, Vol.35A, pp.175-183, 1989.
- 11) 鷲津久一郎他共編: 有限要素法ハンドブック I, 培風館, 1981.
- 12) Kanok-Nukulchai, W., Taylor, R.L. and Hughes, T.J.R.: A large deformation formulation for shell analysis by the finite element method, Comput. Structures, Vol.13, pp.19-27, 1981.
- 13) Bathe K.-J. and Bolourch, S.: Large displacement analysis of three-dimensional beam structures, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.14, pp.961-986, 1979.
- 14) Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L.: The Finite Element Method, 4th ed., Vol.1, McGraw-Hill, London, 1989.
- 15) Koh, B.C. and Kikuchi, N.: New improved hourglass control for bilinear and trilinear elements in anisotropic linear elasticity, Comp. Meths. Appl. Mech. Eng., Vol.65, pp.1-46, 1987.
- 16) Crivelli, L.A. and Felippa, C.A.: A three-dimensional non-linear Timoshenko beam based on the core-congruential formulation, Int. J. Numer. Meths. Eng., Vol.36, pp.3647-3673, 1993.

(1995 年 9 月 18 日受付)