

軸対称, 横等方性厚肉円筒・球殻の弾性衝撃応答

IMPACT RESPONSE OF AXIALLY SYMMETRIC, TRANSVERSELY ISOTROPIC HOLLOW CYLINDERS AND SPHERES

小林治俊*, 石丸和宏**, 園田恵一郎***

Harutoshi Kobayashi, Kazuhiro Ishimaru and Keiichiro Sonoda

* 工博 大阪市立大学助教授

工学部土木工学科 (〒558 大阪市住吉区杉本3-3-138)

** 工修 大阪市立大学大学院後期博士課程

工学部土木工学科 (〒558 大阪市住吉区杉本3-3-138)

*** 工博 大阪市立大学教授

工学部土木工学科 (〒558 大阪市住吉区杉本3-3-138)

The paper describes an impact response analysis of axisymmetric, transversely isotropic hollow cylinders and spheres based on the theory of elastodynamics. To this end, the method of eigenfunction expansion is developed by using Bessel functions of fractional order. Numerical calculations are made for various modulus of elasticity and Poisson's ratios, and then characteristics of impact response of transversely hollow cylinders and spheres are revealed from dynamic response curves shown in the paper.

Key Words: impact response, hollow cylinder, hollow sphere, transversely isotropy

1. はじめに

近年, 複合材料の分野が大いに発展し, 軽くて高強度の材料が次々に生み出されている. このような繊維補強材料は力学的に異方性材料とみなす取扱いが可能であり, したがって, このような材料異方性が衝撃応答に及ぼす影響を波動論の立場より明らかにしておくことは, 破壊メカニズムの究明に関連して重要と思われる. 本研究は压力容器や各種パイプ構造に用いられている厚肉円筒・球殻を対象に動弾性論に基づく衝撃解析を行ったものである.

ところで, 横等方性厚肉円筒・球殻の衝撃問題は最初に Bickford-Warren [1] が軸対称問題に対して動弾性論に基づきラプラス変換法を用いた解析を示している. 本問題は後の解析でも分かるように実数次のベッセル関数を取り扱う必要があるが, 彼らはラプラス逆変換のためにベッセル関数に有理近似を用いることにより解を求めているため, 応答解は初期状態のみに留まり, また特定の横等方性材料に対してのみ数値解を示している. 続いて Greif-Chou [2] は差分法に基づく特性曲線法を用いて非均質な横等方性円筒を解析し, Bickford-Warren と同様に特定の材料定数に対する結果を示し, 等方性材料との応答の違いを示している. 最近 Wang [3] は, 核関数を固有関数(振動モード関数)とする有限ハンケル変換による軸対称・横等方性球殻の取り扱い方を示したが数値結果に誤りがある [4].

本研究は, 横等方性厚肉円筒・球殻の衝撃応答解析への固有関数展開法(モード法) [5] の取り扱い方を示すとともに, 広範な材料定数が応答値に及ぼす影響を検討する.

2. 円筒の衝撃応答解析

2.1 解析方法

円筒座標を (r, θ, z) に採り, $r-\theta$ 面での平面ひずみ状態を取り扱う. また, $\theta-z$ 面を等方性, r 軸を異方軸とする. この場合, 非ゼロな応力成分は σ_r, σ_θ であり, 変位 u との関係は次式となる [6].

$$\begin{aligned}\sigma_r &= c_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + c_{12} \frac{u}{r} \\ \sigma_\theta &= c_{12} \frac{\partial u}{\partial r} + c_{22} \frac{u}{r}\end{aligned}\quad (1)$$

材料定数 c_{ij} は次のように与えられる.

$$\begin{aligned}c_{11} &= E(1-\nu)(E'/E)^2/\Delta \\ c_{12} &= E'\nu'/\Delta \\ c_{22} &= E[(E'/E) - (\nu')^2]/(1+\nu)\Delta \\ \Delta &= (1-\nu)(E'/E) - 2(\nu')^2\end{aligned}\quad (2)$$

ここに, E, ν は等方面内のヤング率, ポアソン比, また E', ν' は異方面内のヤング率, ポアソン比を表す.

次に変位 u で表したつり合い式は次式となる.

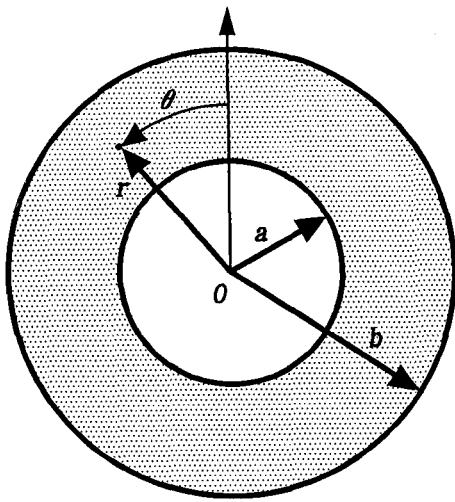


図-1 軸対称円筒・球殻の座標系

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \alpha^2 \frac{u}{r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3)$$

ここに、

$$\alpha^2 = c_{22}/c_{11}, \quad c^2 = \rho/c_{11} \quad (4)$$

t は時間、 ρ は密度、 c は波速である。

さて、固有関数展開法 [5] によれば (3) 式の解は、

$$u(r, t) = u^s(r, t) + \sum_{i=1}^{\infty} Q_i(t) U_i(r) \quad (5)$$

に採ることができる。ここに、 $u^s(r, t)$ は準静的解、 $U_i(r)$ は固有関数、 $Q_i(t)$ は未定の時間関数である。

準静的解は、境界条件：

$$\begin{aligned} c_{11} \frac{\partial u^s}{\partial r} + c_{12} \frac{u^s}{r} &= -F_a(t) & (r=a) \\ &= -F_b(t) & (r=b) \end{aligned} \quad (6)$$

および (3) 式で慣性項を省いた準静的問題のつり合い式

$$\frac{\partial^2 u^s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^s}{\partial r} - \alpha^2 \frac{u^s}{r^2} = 0 \quad (7)$$

を満足する。この解は、

$$u^s(r, t) = Ar^\alpha + Br^{-\alpha} \quad (8)$$

であり、積分定数 A, B は (6) 式の境界条件より決定される。

一方、固有関数は (5) 式で $F_a = F_b = 0$ とした自由境界条件と (3) 式からの自由振動問題の式：

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_i}{\partial r} + \left[k_i^2 - \frac{\alpha^2}{r^2} \right] U_i = 0 \quad (9)$$

を満たすものであり、 $k_i = \omega_i/c$ 、 ω_i は固有円振動数である。 $U_i(r)$ の具体的表示式は

$$U_i(r) = \Omega_2(k_i b) J_\alpha(k_i r) - \Omega_1(k_i b) Y_\alpha(k_i r) \quad (10)$$

で与えられ、 J_α, Y_α は実数 α 次のベッセル関数であり、 k_i は次の振動数方程式より定まる。

$$\Omega_1(k_i b) \Omega_2(k_i a) - \Omega_1(k_i a) \Omega_2(k_i b) = 0 \quad (11)$$

以上において、関数 Ω_1, Ω_2 の内容は、

$$\begin{aligned} \Omega_1(x) &= [\alpha + (c_{12}/c_{11})][J_\alpha(x)/x] - J_{\alpha+1}(x) \\ \Omega_2(x) &= [\alpha + (c_{12}/c_{11})][Y_\alpha(x)/x] - Y_{\alpha+1}(x) \end{aligned} \quad (12)$$

固有関数には次の直交性がある。

$$\int_a^b U_i(r) U_j(r) \cdot 2\pi r dr = \delta_{ij} N_i^2 \quad (13)$$

ここに、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタ、 N_i はノルムである。

(5) 式を (3) 式へ代入し、(7)、(9) 式および固有関数の直交条件を利用することにより $Q_i(t)$ を決定する次式を得る。

$$\ddot{Q}_i(t) + \omega_i^2 Q_i(t) = \ddot{\phi}_i(t) \quad (14)$$

ここで、ドットは時間微分を意味し、

$$\phi_i(t) = -\frac{1}{N_i^2} \int_a^b u^s(r, t) U_i(r) \cdot 2\pi r dr \quad (15)$$

(14) 式の解は周知のように次式となる。

$$\begin{aligned} Q_i(t) &= Q_i(0) \cos \omega_i t + \frac{1}{\omega_i} \dot{Q}_i(0) \sin \omega_i t \\ &+ \frac{1}{\omega_i} \int_0^t \ddot{\phi}_i(\tau) \sin[\omega_i(t-\tau)] d\tau \end{aligned} \quad (16)$$

積分定数 $Q_i(0), \dot{Q}_i(0)$ は次のように決定できる。すなわち、衝撃を受ける前の円筒は静止しているとすれば

$$u(r, 0) = \dot{u}(r, 0) = 0 \quad (17)$$

よって、(3) 式より、

$$u^s(r, 0) = -\sum_{i=1}^{\infty} Q_i(0) U_i(r) \quad (18a)$$

$$\dot{u}^s(r, 0) = -\sum_{i=1}^{\infty} \dot{Q}_i(0) U_i(r) \quad (18b)$$

上式の両辺に $U_{ij}(r)$ を掛け円筒全体に積分し、固有関数の直交性を利用すれば次式を得る。

$$Q_i(0) = \phi(0), \quad \dot{Q}_i(0) = \dot{\phi}(0) \quad (19)$$

2.2 数値計算結果

さて、横等方性を示す材料として、自然界にはマグネシウムや黒鉛などが存在し、例えば黒鉛の材料定数は、 $E=10.4\text{GPa}$ 、 $E'=11.8\text{GPa}$ 、 $\nu=\nu'=0.11$ である [7]。

また複合材料としての横等方性材料には、カーボン・エポキシ、Eガラス・エポキシやアルミニウム合金系の複合材料があり、FRM材のC強化アルミニウム合金系複合材料では、 $E'/E=3$ 、 $\nu=\nu'=0.3$ 程度とみなせるといわれている [8]。複合材料は人工的に産み出すことができるものであり、その材料特性は広範囲に設定可能と思われることから、ここでは特定の材料に対する応答計算結果を示すことよりもヤング率比 E'/E やポアソン比の違いによる応答の違いを検討することにし、上述の材料定数を参考にして、 E'/E は $1/3$ 、 1 、 3 の3種、 ν 、 ν' を 0.1 、 0.2 、 0.3 の3種を選択することにした。

円筒の内外径比は $a/b=0.5$ の場合を取り扱い、作用荷重は内周および外周載荷ともに荷重強度 q の荷重が時間に関してステップ状に作用するものとする。すなわち、 $H(t)$ をステップ関数とすると荷重条件はつぎのように書ける。

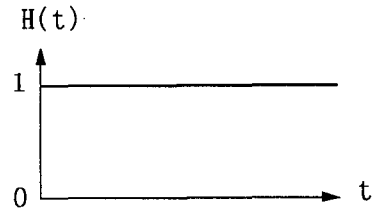


図-2 ステップ関数

内周載荷： $F_a(t)=qH(t)$ 、 $F_b(t)=0$

外周載荷： $F_a(t)=0$ 、 $F_b(t)=qH(t)$ (20)

数値計算はすべて無次元化して行っており、時間に関しては等方性の場合の縦波の速度 $c[\equiv\sqrt{2(1-\nu)G/(1-2\nu)\rho}]$ を基準にした無次元時間 $\tau(=ct/b)$ を用いた。すなわち、 $\tau=1$ は等方性円筒の外径 b を縦波が進む時間を意味する。級数の収束については、応力 σ_r の収

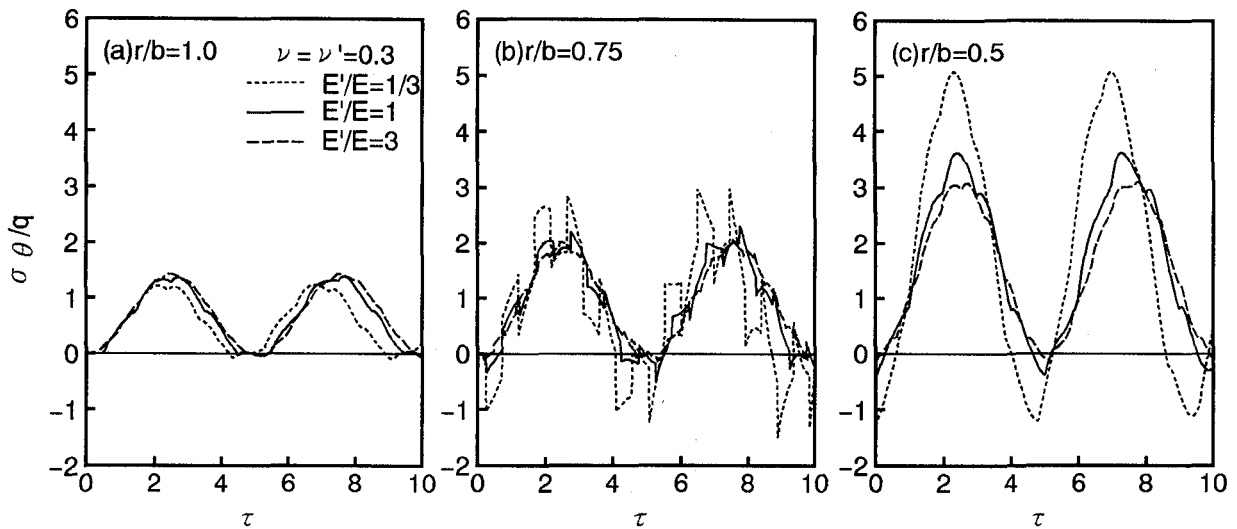


図-3 ヤング率の違いによる円筒の応力 σ_θ の応答曲線（内周載荷）

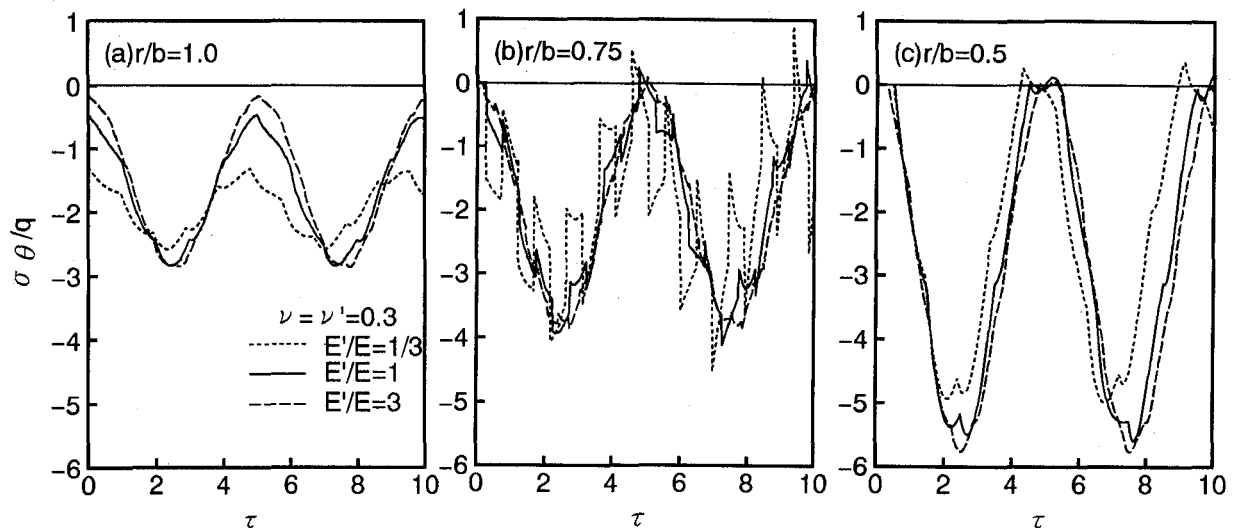


図-4 ヤング率の違いによる円筒の応力 σ_θ の応答曲線（外周載荷）

束が σ_θ の収束よりもかなり遅く、ここでは 500 項を用いて計算を行った。なお、解析解に含まれる実数次のベッセル関数の数値計算には、名取らの計算プログラム [9] を利用した。

最初にヤング率の違いが周方向応力 σ_θ の応答に及ぼす影響を調べるため、ポアソン比を一定 ($\nu = \nu' = 0.3$) とし、ヤング率比 E'/E を $1/3, 1, 3$ と変化させた場合の結果を検討する。図 3 は内周載荷の場合、図 4 は外周載荷の場合の応答であり、着目点はいずれも内周 ($r=a$)、内点 [$r=(a+b)/2$]、外周 ($r=b$) の 3 点である。いずれの応答も応力波の波面が到達するまでは変動はないが、内周載荷の場合は内周での周方向応力 σ_θ 、外周載荷の場合は外周での周方向応力 σ_θ が衝撃瞬時に応答値を示している。これは作用荷重とつり合う圧縮応力 $\sigma_r = -q$ による周方向のひずみが拘束されるために周方向応力 σ_θ が生じるためである。その後の応答曲線は、

内外周での反射波が到達する度に応答に変動が出ていることが分かる。応答周期の違いは先に述べたように等方性の場合の応力波の波速を基準とした無次元時間を用いているためである。内周、外周載荷ともに内周での応答値が大きく、外周での応答値はこれに比べると小さい。内周載荷の場合、ヤング率比が小さいほど内周および内点での応答値は大きくなり、外周ではわずかながら逆になっている。いっぽう外周載荷の場合の内周での応答値はヤング率比が大きいほど大きな圧縮応力が生じており、その傾向は内周載荷の場合とは逆に外周でもいえる。また、興味深いことは内点での応答曲線に不連続性が現れることであり、内周載荷、外周載荷ともにヤング率比が小さいほどこの不連続性が大きくなっている。

次にポアソン比の違いによる応答への影響を調べるため $\nu = 0.3$ と一定にし、 ν' を $0.1, 0.2, 0.3$ と変化させた場合の結果を図 5, 6 に示している。図 5 は内周

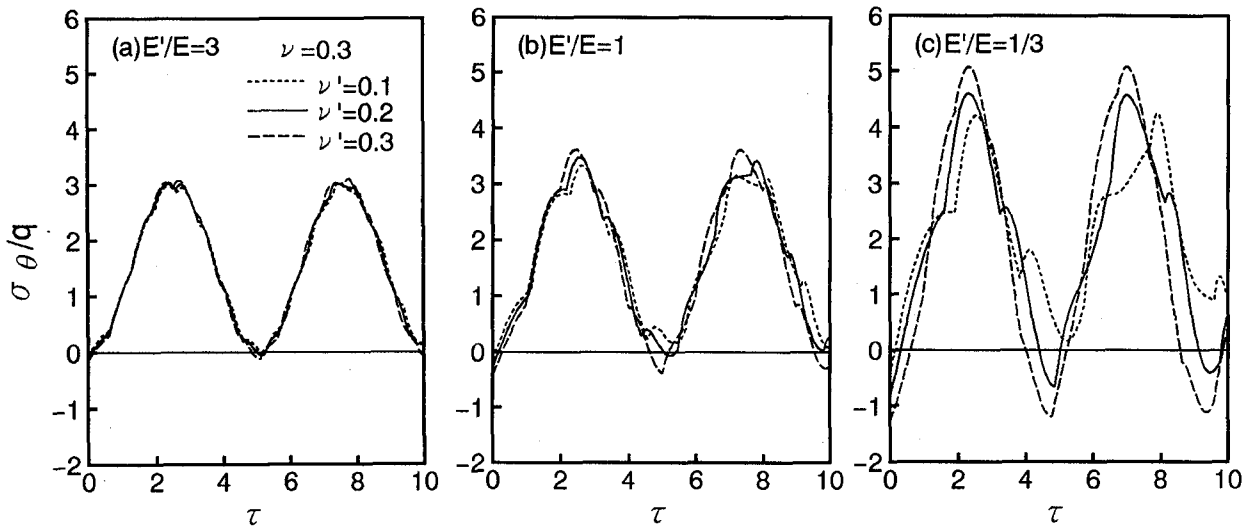


図 5 ポアソン比の違いによる円筒の内周応力 σ_θ の応答曲線 (内周載荷)

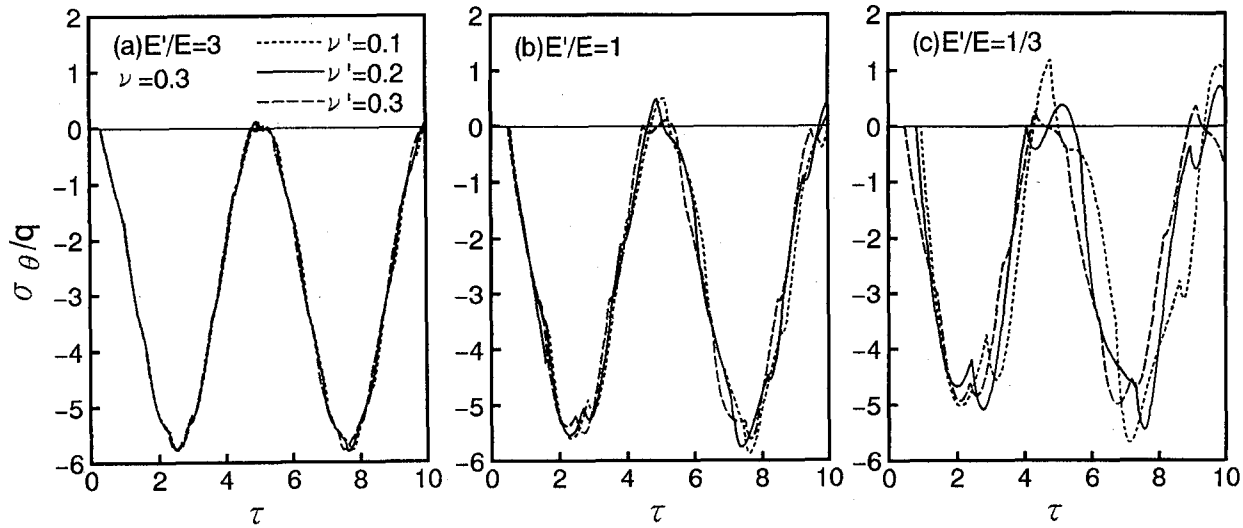


図 6 ポアソン比の違いによる円筒の内周応力 σ_θ の応答曲線 (外周載荷)

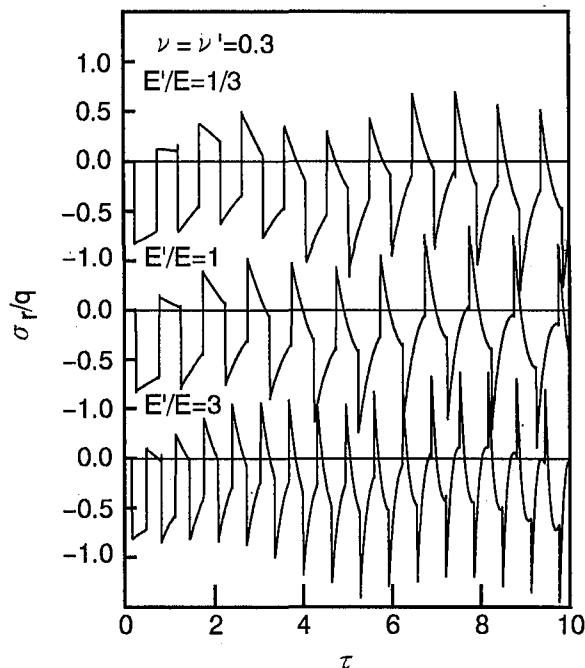


図-7 円筒の内点での応力 σ_r の応答曲線
(内周載荷)

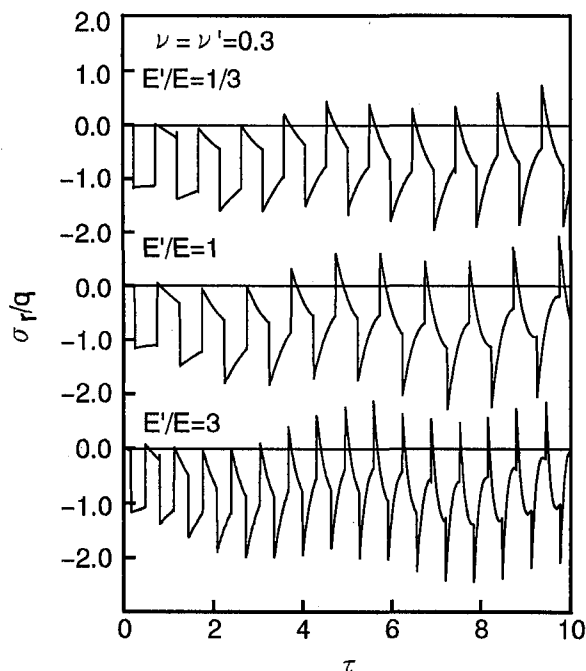


図-8 円筒の内点での応力 σ_r の応答曲線
(外周載荷)

載荷の場合、図6は外周載荷の場合であり、着目点はいずれも内周とした。これらの図よりヤング率 $E'/E=1/3$ の場合にはポアソン比の違いから応答値に違いが見られるが $E'/E=1, 3$ の場合はポアソン比の違いが応答曲線に影響を及ぼすことは少ないことが分かる。

最後に内点での応力 σ_r の応答曲線を図7, 8に示している。ここで取り扱っている軸対称問題の応力波は円筒波であるから、内周載荷では応力波の拡散性、外周載荷では集約性を伴うため[10]、衝撃後着目点に到達する最初の応力波の応答値は作用荷重強度(q) そのものとはならない。図より分かるように内周載荷の場合は q より小さく、外周載荷の場合は q より大きい。その後の応答は内外周からの反射波の到達により複雑な応答となっている。

なお図示していないが、変位の応答は応力とは逆で、等方面の剛性が高いほど小さい応答となっている。

3. 球殻の衝撃応答解析

3.1 解析方法

球座標系 (r, θ, ϕ) で軸対称問題の場合、非ゼロな応力成分は $\sigma_r, \sigma_\theta (= \sigma_\phi)$ であり、 r を異方軸とした場合の応力と変位の関係式は [9]

$$\begin{aligned}\sigma_r &= c_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + 2c_{12} \frac{u}{r} \\ \sigma_\theta &= c_{12} \frac{\partial u}{\partial r} + (c_{22} + c_{23}) \frac{u}{r}\end{aligned}\quad (21)$$

と表され、材料定数 c_{ij} は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}c_{11} &= E(1-\nu)(E'/E)^2/\Delta \\ c_{12} &= E'\nu'/\Delta \\ c_{22} + c_{23} &= E'/\Delta \\ \Delta &= (1-\nu)(E'/E) - 2(\nu')^2\end{aligned}\quad (22)$$

ここに、 E, ν は等方面内のヤング率、ポアソン比、また E', ν' は異方面内のヤング率、ポアソン比である。

変位によるつり合い式は次式となる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \alpha^2 \frac{u}{r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\quad (23)$$

ここに、

$$\alpha^2 = 2(c_{22} + c_{23} - c_{12})/c_{11}, \quad c^2 = c_{11}/\rho\quad (24)$$

であり、 ρ は密度、 c は波速である。

球殻の場合も円筒と同様に解式を (5) 式のように与えることにより衝撃応答解析を行うことが可能であるので、以下に準静的解と固有関数についてのみ記すことにする。

準静的解 $u^s(r, t)$ は、境界条件：

$$\begin{aligned}c_{11} \frac{\partial u^s}{\partial r} + 2c_{12} \frac{u^s}{r} &= -F_a(t) \quad (r=a) \\ &= -F_b(t) \quad (r=b)\end{aligned}\quad (25)$$

および、(23) 式で慣性項を省いた準静的問題のつり合い式：

$$\frac{\partial^2 u^s}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u^s}{\partial r} - \alpha^2 \frac{u^s}{r^2} = 0\quad (26)$$

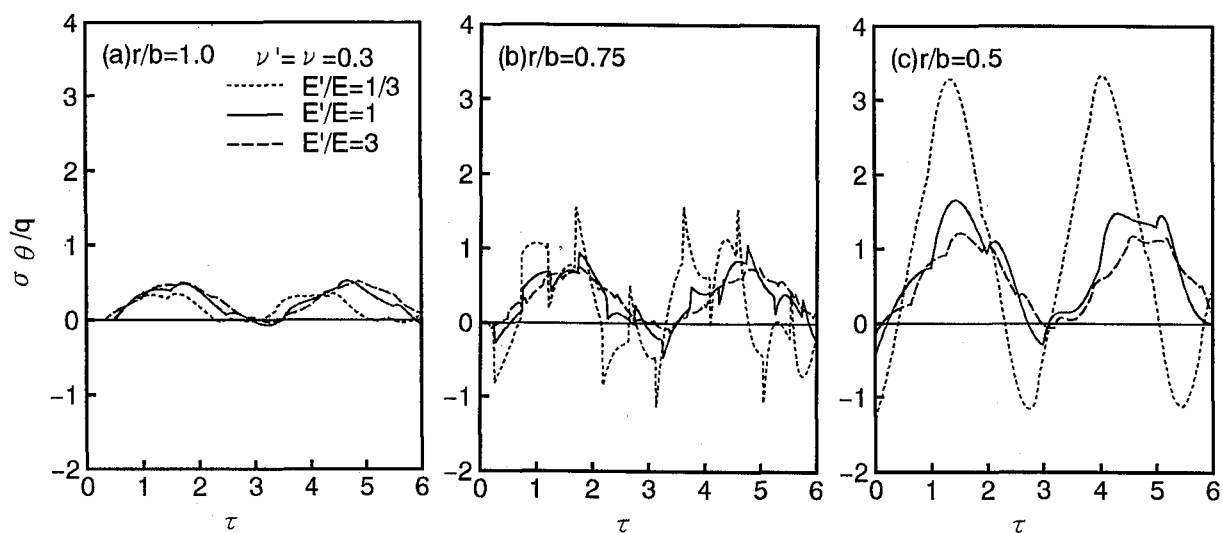


図-9 ヤング率の違いによる球殻の応力 σ_{θ} の応答曲線（内周載荷）

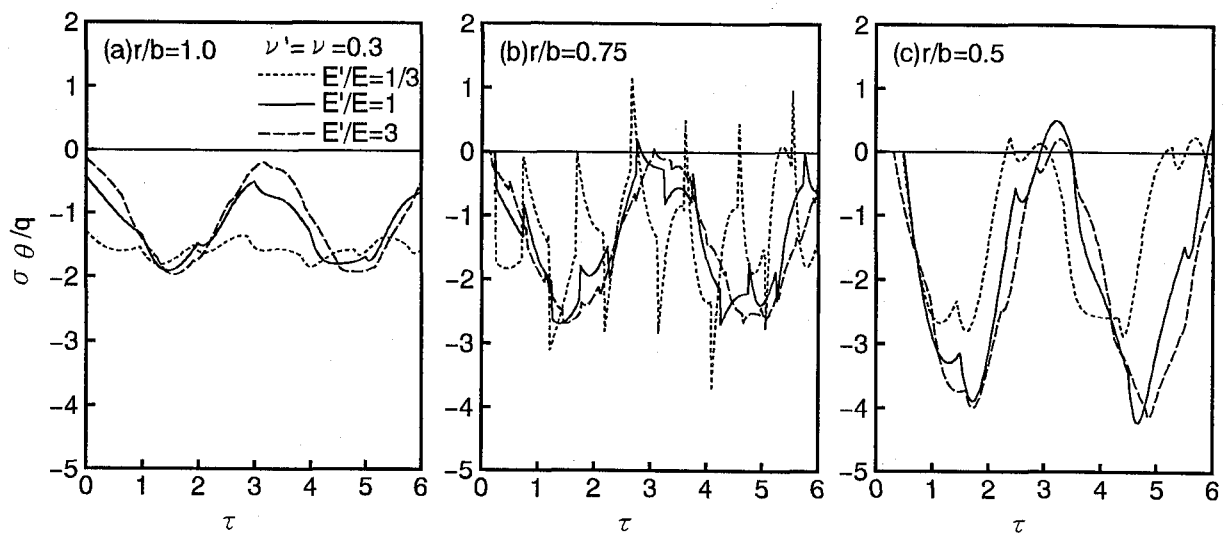


図-10 ヤング率の違いによる球殻の応力 σ_{θ} の応答曲線（外周載荷）

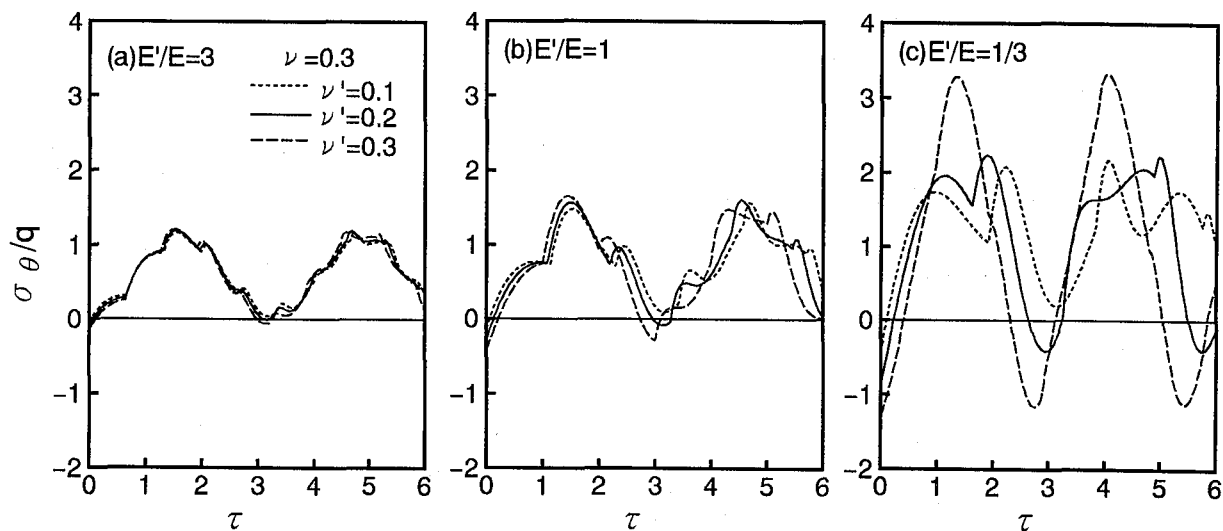


図-11 ポアソン比の違いによる球殻の応力 σ_{θ} の応答曲線（内周載荷）

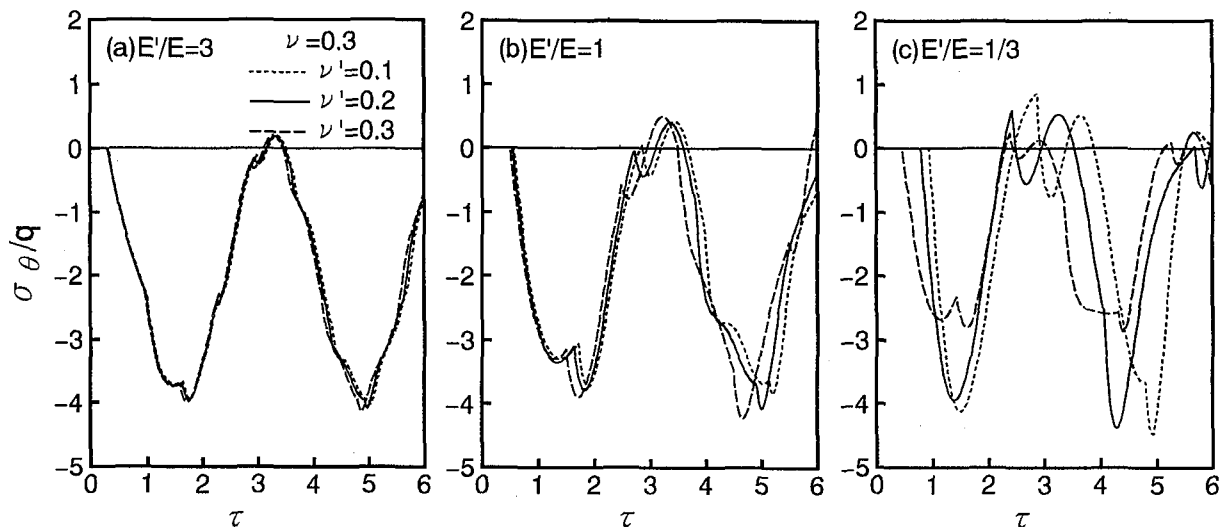


図-12 ポアソン比の違いによる球殻の応力 σ_θ の応答曲線（外周載荷）

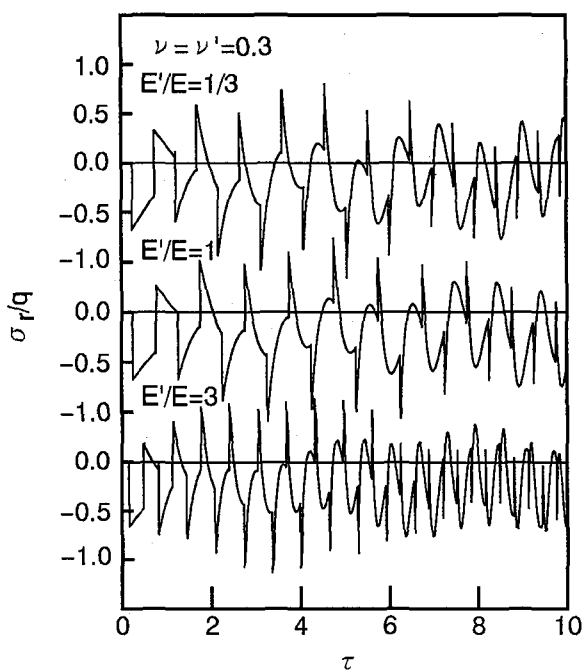


図-13 球殻の内点での応力 σ_r の応答曲線（内周載荷）

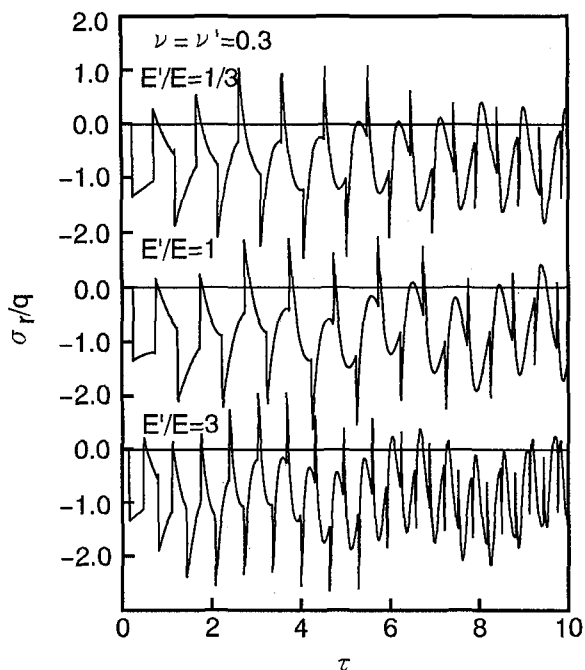


図-14 球殻の内点での応力 σ_r の応答曲線（外周載荷）

を満足する。この解は、 C 、 D を積分定数として、

$$u^*(r, t) = Cr^p + Dr^q \quad (27)$$

ここに、

$$p, q = \beta \pm \frac{1}{2}, \quad \beta = \left[\alpha^2 + \frac{1}{4} \right]^{1/2} \quad (28)$$

固有関数 $U_i(r)$ は (25) 式において $F_a = F_b = 0$ とした自由境界条件と自由振動問題の式：

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U_i}{\partial r} + \left[k_i^2 - \frac{\alpha^2}{r^2} \right] U_i = 0 \quad (29)$$

を満足するものである。ただし、 $k_i = \omega_i/c$ 。この解式と振動数方程式は、

$$U_i(r) = \frac{\Phi_2(k_i b) J_\beta(k_i r) - \Phi_1(k_i b) Y_\beta(k_i r)}{(k_i r)^{1/2}} \quad (30)$$

$$\Phi_1(k_i a) \Phi_2(k_i b) - \Phi_1(k_i b) \Phi_2(k_i a) = 0 \quad (31)$$

ここに、 J_β 、 Y_β は実数 β 次のベッセル関数であり、関数 Φ_1 、 Φ_2 の内容は、

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left\{ \left[\beta - \frac{1}{2} + 2 \frac{c_{12}}{c_{11}} \right] \frac{J_\beta(x)}{x} - J_\beta(x) \right\}$$

$$\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left\{ \left[\beta - \frac{1}{2} + 2 \frac{c_{12}}{c_{11}} \right] \frac{Y_\beta(x)}{x} - Y_\beta(x) \right\} \quad (32)$$

球殻の固有関数の直交条件は、次のように与えられる。

$$\int_a^b U_i(r) U_j(r) \cdot 4\pi r^2 dr = \delta_{ij} N_i^2 \quad (33)$$

3.2 数値計算結果

球殻の内外径比は $a/b=0.5$ の場合を取り扱い、円筒と同じように、ヤング率比 E'/E 、ポアソン比 ν' 、 ν の違いによる応答をここでも検討する。作用荷重は荷重強度 q で時間に関してステップ関数とし、用いた級数の項数は円筒同様に応力 σ_r の収束性を考慮し 500 とした。

図 9, 10 は周方向応力 σ_θ のヤング率比の違いによる応答であり、図 11, 12 はポアソン比の違いによる応答を示している。応答値は一般に円筒に比べ小さい。材料定数の違いによる応答値の変化の割合は円筒の場合より大きくなっている。これは円筒を二次元的、球殻は三次元的な取り扱いをしているため、固有周期を含め三次元的効果によるものと思われる。しかしながら、材料定数の違いと載荷面の違いにより現れる応答の変化の様子は円筒と同様な傾向となっている。

図 13, 14 はそれぞれ内周、外周載荷の場合の内点における応力 σ_r の応答曲線である。最初の応力波（球形波）の到達時の応答値が作用荷重の大きさ q とならないのは円筒と同様の理由である。荷重と同方向である応力 σ_r は材料定数の違いから周期に違いがでてくるが、応力の正負のピーク値はほとんど変わらない。

なお図示していないが、変位の応答は応力とは逆で、等方面の剛性が高い程小さい応答となっているのは円筒と同じであった。

4. おわりに

材料異方性が円筒、球殻の動的応答に及ぼす影響を調べるため、周方向に等方面を有し半径方向に異方軸を有する横等方性の場合の解析を行い、次のことが明らかになった。

周方向応力の応答は内周載荷、外周載荷ともに内周で最も大きくなり、周方向に垂直な異方面内のヤング率が小さい程その応答値は大きくなる。すなわち、剛性の高い材料に応力が集中する傾向がある。ポアソン比の影響はヤング率比 E'/E が 1 より大きい場合は応答にほとんど影響を与えないが、小さい場合は若干の影響を与える。

参考文献

1. Bickford, W. B. and Warren, W. E. (1967) The

propagation of elastic waves in anisotropic hollow spheres and cylinders, *Developments in Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 3, Pergamonn Press, pp. 433-445.

2. Greif, R. and Chou, S.-C. (1971) The propagation of radially symmetric stress waves in anisotropic nonhomogeneous elastic media, *J. Appl. Mech.* **38**, pp. 51-57.
3. Wang, X. (1994) An elastodynamic solution for an anisotropic hollow sphere, *Int. J. Solids Struct.* **31**, 903-911.
4. Kobayashi, H. and Ishimaru, K. (1995) Discussion of "An elastodynamic solution for an anisotropic hollow sphere", *Int. J. Solids Struct.* **32**, 127-133.
5. 小林, 松村, 石丸, 園田 (1993) 軸対称多層円筒の弾性衝撃応答解析, *構造工学論文集* **39A**, 1485-1492.
6. Lekhnitskii, S. G. (1963) *Theory of Elasticity of Anisotropic Elastic Body*, Chap. 1, Holden Day, New York.
7. 野田, 竹内, 小畑, 植村 (1983) 表面が局部加熱される横等方性半無限体の非定常熱応力, *機械学会論文集中(A編)* **49**, 180-186.
8. 畑 俊明 (1990) 波線理論による直交異方性厚肉球殻の動的熱応力解析, *機械学会論文集中* **56**, 2130-2136.
9. 渡部力, 他 (編) (1983) *数値計算と FORTRAN* (第3版), 丸善.
10. Eringen, A.C. and Suhubi, E. S. (1975) *Elastodynamics*, Vol. 2-Linear Theory, Academic Press, New York, pp. 474-492.

(1994年9月14日受付)