構造工学論文集 Vol.41A (1995年3月)　　土木学会

対話的ファジィ目標計画法による構造最適設計

OPTIMUM DESIGN OF STRUCTURES USING INTERACTIVE FUZZY GOAL PROGRAMMING

斉藤 進* 堀井健一郎** 依田 照彦***
Susumu SAITOU, Ken'ichirou HORII and Teruhiko YODA

＊八戸工業高等専門学校 助教授 土木工学科（〒039-11 青森県八戸市田面木字上野平１６－１）
＊＊早稲田大学教授 理工学部土木工学科（〒169 東京都新宿区大久保３－４－１）
＊＊＊工博 早稲田大学教授 理工学部土木工学科（〒169 東京都新宿区大久保３－４－１）

Structural optimization with the multiobjective model using fuzzy goal programming is shown in this paper. To improve the applicability of goal programming for design problems of real structures, different kinds of goal types, priority expression for goal attainment and fuzzy goal are discussed in detail. The proposed method called interactive fuzzy goal programming has the distinct features of both goal programming with fuzzy goals and interactive solution method. Several numerical examples of structural optimization are demonstrated to show the effectiveness of the interactive fuzzy goal programming method.

Key Words : Fuzzy Goal, Fuzzy Goal Programming, Interactive Method, Multiobjective Structural Optimization

１．まえがき

構造物の最適設計においては複数の設計目標が存在するのが一般的であるが，これまでの“構造最適設計＝重量最小化”の通念により，多目標設計問題を“複数の目的関数を同時に最小化しようとする多目的計画法問題”として取り扱おうとする傾向が少なからずある．しかし通常の設計問題では色々なタイプの目標があり，“目的関数の最小化”目標だけでは，実際的に意味のある構造最適設計の可能性は狭められてしまう．また複数の目標が存在する設計問題においては，目標達成の優先度や目標値の設定が重要な役割を果たしている．これらが予め確定していれば最適設計計算は１回ですみ非対話的設計法でよいが，確定していない場合には満足解を繰り返し求めて最適解を決定する対話的設計法が必要となる．さらに目標が競合関係にある多目標最適化においては，目標がすべて達成されることはなく，各目標の達成度が最適解決定の指標となる．そこで本研究では“ファジィ目標のメンバーシップ関数が目標の達成度を表わしている”ことに着目し，ファジィ目標を取り入れたファジィ目標計画法を多目標最適化問題に適用する．すなわち，本研究において提示する対話的ファジィ目標計画法は，

（ａ）“目的関数の最小化”以外の色々なタイプの目標を取り扱うことができる．
（ｂ）目標達成の優先度を絶対的な優先順位と相対的な重み係数の両方で与えることができる．
（ｃ）優先度や目標値が不確定の時，対話的なトレードオフ解析が容易である．
（ｄ）目標が競合する多目標最適化問題において，目標の達成度を把握するのに適している．

などの特徴を持っている．この対話的ファジィ目標計画法の多目標構造最適設計への応用の方法を示し，この方法にどのような利点があるかを明らかにすることが本研究の目的である．

目標計画法は複数の目標が存在するあらゆる分野の意志決定問題に応用されているが，近年では構造最適設計への応用[1)-10)]も盛んになってきている．ただし，それらは，Changら[3)]，林ら[7),9)]および著者ら[10)]の研究をのぞけば“目的関数の最小化”のみを目標としたものである。また対話的目標計画法によってトレードオフ解析を試みた構造最適設計[10)]や，ファジィ目標計画法を利用した構造最適設計[5),8)]はまだその例が少なく一般的な方法が確立しているとはいえない．

２．ファジィ目標計画法の定式化

（１）目標計画法の定式化

一般的多目的計画法問題は目標計画法の基本であり次のように定式化されている．

find　$\mathbf{x} = \{x_1, \cdots, x_n, \cdots, x_N\}$

to minimize

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \{f_1(\mathbf{x}), \cdots, f_i(\mathbf{x}), \cdots, f_I(\mathbf{x})\}$$

subject to

$$g_j(\mathbf{x}) \leqq 0,\ j = 1, 2, \cdots, J \qquad \cdots\cdots(1)$$

上式において，$\mathbf{x}$はN次元決定変数ベクトル，$\mathbf{f}(\mathbf{x})$はI次元目的関数ベクトル，$g_j(\mathbf{x}) \leqq 0$ は制約条件式である。多目的計画法問題では複数の目的関数を同時に最小化する解は一般に存在せず，ある目的関数の値を改善するためには少なくとも他の１つの目的関数の値を改悪せざるを得ない．このような解はパレート解と呼ばれ，多目的計画法の諸解法はパレート解（集合）を求めるための解法や，パレート解集合の中から選好解（最適解）を決定するための解法とからなる．

いま目的関数$\mathbf{f}(\mathbf{x})$に対して，ある目標値 $\hat{\mathbf{f}} = \{\hat{f}_1, \cdots, \hat{f}_i, \cdots, \hat{f}_I\}$ を設定し，$\mathbf{f}(\mathbf{x})$と$\hat{\mathbf{f}}$との間に次の補助変数，

$$d_i^+ = (1/2)\{|f_i(\mathbf{x}) - \hat{f}_i| + (f_i(\mathbf{x}) - \hat{f}_i)\}$$

$$d_i^- = (1/2)\{|f_i(\mathbf{x}) - \hat{f}_i| - (f_i(\mathbf{x}) - \hat{f}_i)\}$$

を導入する．さらに目標をその重要度によってK個（$1 \leqq K \leqq I$）の優先順位のクラスに分類し，達成関数をベクトル表現すると，以下の一般的な目標計画法問題[10),12)]が得られる．

find　$\mathbf{x} = \{x_1, \cdots, x_n, \cdots, x_N\}$

to minimize

$$\mathbf{a} = \{\sum_{i \in I_1}(w_i^+ d_i^+ + w_i^- d_i^-), \cdots, \sum_{i \in I_k}(w_i^+ d_i^+ + w_i^- d_i^-), \cdots, \sum_{i \in I_K}(w_i^+ d_i^+ + w_i^- d_i^-)\}$$

subject to

$$f_i(\mathbf{x}) - d_i^+ + d_i^- = \hat{f}_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, I$$

$$d_i^+ \cdot d_i^- = 0,\quad d_i^+ \geqq 0,\ d_i^- \geqq 0,\ i = 1, 2, \cdots, I$$

$$g_j(\mathbf{x}) \leqq 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, J \qquad \cdots\cdots(2)$$

ここで$\mathbf{a}$を達成関数，$f_i(\mathbf{x}) - d_i^+ + d_i^- = \hat{f}_i$を目標制約式，$d_i^+$を超過差異変数，$d_i^-$を不足差異変数と呼ぶ．達成関数における$I_k \neq \phi$はk番目の優先順位のクラスに属する目的関数の添字の集合を表し，またw_i^+，w_i^-は重み係数と呼び目標達成の相対的な優先度を表す．なお実際の計算では制約条件式$g_j(\mathbf{x}) \leqq 0$は，本来の目標より優先度の高い“目標”として取り扱うため，目標計画法では制約と目標の区別はなくなる．

（２）ファジィ目標計画法

人間の判断の曖昧性を考慮すれば設計者は「重量は大体何ｋｇｆ以下にしたい．」とか「変位は大体何ｃｍくらいにしたい．」というような設計目標を持つと考えられる．このような「$f_i(\mathbf{x})$は大体$\hat{f}_i$以下にしたい．」とか「$f_i(\mathbf{x})$は大体$\hat{f}_i$ぐらいにしたい．」という目標はファジィ目標と呼ばれ$f_i(\mathbf{x}) \precsim \hat{f}_i$，$f_i(\mathbf{x}) \approxeq \hat{f}_i$のように表されている．ただし本研究ではこのような人間の判断の曖昧性に基づくファジィ目標を扱うわけではない．本来は曖昧性を表すファジィ目標のメンバーシップ関数は，別の見方をすれば目標の達成度を表している．そこで本研究ではこのことに着目してファジィ目標の考え方を目標計画法に取り入れ，この方法をファジィ目標計画法と称している．

ファジィ理論[13),14)]では$f_i(\mathbf{x})$に対する設計者のファジィ目標は，メンバーシップ関数$\mu_{fi}(\mathbf{x})$によって定義される．たとえば$f_i(\mathbf{x}) \precsim \hat{f}_i$に対して，$\mu_{fi}(\mathbf{x})$は線形メンバーシップ関数を用いて，次式および図－１のタイプ［１］（実線）のように定義される．

$$\mu_{fi}(\mathbf{x}) = 1, \qquad \text{if } f_i(\mathbf{x}) \leqq \hat{f}_i$$

$$\mu_{fi}(\mathbf{x}) = (f_i^U - f_i(\mathbf{x}))/(f_i^U - \hat{f}_i), \qquad \text{if } \hat{f}_i < f_i(\mathbf{x}) < f_i^U$$

$$\mu_{fi}(\mathbf{x}) = 0, \qquad \text{if } f_i(\mathbf{x}) \geqq f_i^U \qquad \cdots\cdots(3)$$

このようなメンバーシップ関数$\mu_{fi}(\mathbf{x})$を各目標に対して定義し，$\mu_{fi}(\mathbf{x})$を統合したのち最大化をすればひとつの解が得られる．ただし，各目標は一般に相競合しており，当然メンバーシップ関数も互いに競合関係になる．そこでメンバーシップ関数の最大化にも優先順位と重み係数を導入し，（２）式と同様の表現でファジィ目標計画法を定式化すると，

find　$\mathbf{x} = \{x_1, \cdots, x_n, \cdots, x_N\}$

to minimize

$$\mathbf{a} = \{\sum_{i \in I_1}(w_i^- d_i^-), \cdots, \sum_{i \in I_k}(w_i^- d_i^-), \cdots, \sum_{i \in I_K}(w_i^- d_i^-)\}$$

subject to

$$\mu_{fi}(\mathbf{x}) - d_i^+ + d_i^- = 1, \qquad i = 1, 2, \cdots, I$$

$$d_i^+ \cdot d_i^- = 0,\quad d_i^+ \geqq 0,\ d_i^- \geqq 0,\ i = 1, 2, \cdots, I$$

$$g_j(\mathbf{x}) \leqq 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, J \qquad \cdots\cdots(4)$$

上式では，$\mu_{fi}(\mathbf{x})$を各I_kごとに凸ファジィ決定の一種として統合したものとみなせる．（２）式の通常の目標計画法では目標値に対する差異d_i^+，d_i^-，すなわち不達成度の最小化をおこなっている．それに対してファジィ目標計画法ではメンバーシップ関数$\mu_{fi}(\mathbf{x})$，すなわち達成度の最大化（最大値１に対する不足差異d_i^-の最小化）をおこなうことになる．

３．ファジィ目標の諸タイプとメンバーシップ関数

設計目標には“目的関数の最小化”以外の色々なタイプの目標があるが，ここでは目標計画法によって扱うことのできる目標を４タイプのファジィ目標に分けて述べ，各タイプに応じたメンバーシップ関数を示す．また対話

的なトレードオフ解析において必要となるファジィ目標の緩和と引き締めをメンバーシップ関数によって示しておく．

［１］$f_i(\mathbf{x})$を$\hat{f}_i$以下にしたい場合
　　（$f_i(\mathbf{x})\lesssim\hat{f}_i$）

通常の目標計画法では，$f_i(\mathbf{x})\leqq\hat{f}_i$の場合，$f_i(\mathbf{x})$の$\hat{f}_i$からの超過差異$d_i^+$を最小にすればよい．ファジィ目標計画法ではメンバーシップ関数$\mu_{fi}(\mathbf{x})$を最大，すなわち１にすることがこれに対応し，$\mu_{fi}(\mathbf{x})$の１からの不足差異d_i^-を最小にすればよい．これは以下のタイプ［２］～［４］においても同様である．このタイプのメンバーシップ関数は，（３）式で示したがこれを図示したものが図－１のタイプ［１］（実線）である．　また（３）式の$\hat{f}_i$を満足値f_i^s（$f_i^s>\hat{f}_i$）で置き換えた時をこの目標の緩和（点線），一方$\hat{f}_i$を要求値f_i^r（$f_i^r<\hat{f}_i$）で置き換えた時を引き締め（破線）と定義する．

［２］$f_i(\mathbf{x})$を$\hat{f}_i$以上にしたい場合
　　（$f_i(\mathbf{x})\gtrsim\hat{f}_i$）

通常の目標計画法では，$f_i(\mathbf{x})\geqq\hat{f}_i$の場合，$f_i(\mathbf{x})$の$\hat{f}_i$からの不足差異$d_i^-$を最小にすればよい．このタイプのファジィ目標に対するメンバーシップ関数を次式および図－１のタイプ［２］（実線）のように与える．

$\mu_{fi}(\mathbf{x})=1,\qquad \text{if } f_i(\mathbf{x})\geqq\hat{f}_i$

$\mu_{fi}(\mathbf{x})=(f_i(\mathbf{x})-f_i^l)/(\hat{f}_i-f_i^l),$

$\qquad \text{if } f_i^l<f_i(\mathbf{x})<\hat{f}_i$

$\mu_{fi}(\mathbf{x})=0,\qquad \text{if } f_i(\mathbf{x})\leqq f_i^l$

$\cdots\cdots(5)$

また$\hat{f}_i$を満足値f_i^s（$f_i^s<\hat{f}_i$）で置き換えた時を緩和（点線），一方$\hat{f}_i$を要求値f_i^r（$f_i^r>\hat{f}_i$）で置き換えた時を引き締め（破線）と定義する．

［３］$f_i(\mathbf{x})$をある範囲の中に入れたい場合
　　（$\hat{f}_i^L\lesssim f_i(\mathbf{x})\lesssim\hat{f}_i^U$）

通常の目標計画法では，$\hat{f}_i^L\leqq f_i(\mathbf{x})\leqq\hat{f}_i^U$の場合，目標制約式を　$f_i(\mathbf{x})-d_{i1}^++d_{i1}^-=\hat{f}_i^L$，$f_i(\mathbf{x})-d_{i2}^++d_{i2}^-=\hat{f}_i^U$の２つの式に分け$d_{i1}^-+d_{i2}^+$を最小にすればよい．このケースのファジィ目標に対するメンバーシップ関数を次式および図－１のタイプ［３］（実線）のように与える．

$\mu_{fi}(\mathbf{x})=1,\qquad \text{if } \hat{f}_i^L\leqq f_i(\mathbf{x})\leqq\hat{f}_i^U$

$\mu_{fi}(\mathbf{x})=(f_i(\mathbf{x})-f_i^l)/(\hat{f}_i^L-f_i^l),$

$\qquad \text{if } f_i^l<f_i(\mathbf{x})<\hat{f}_i^L$

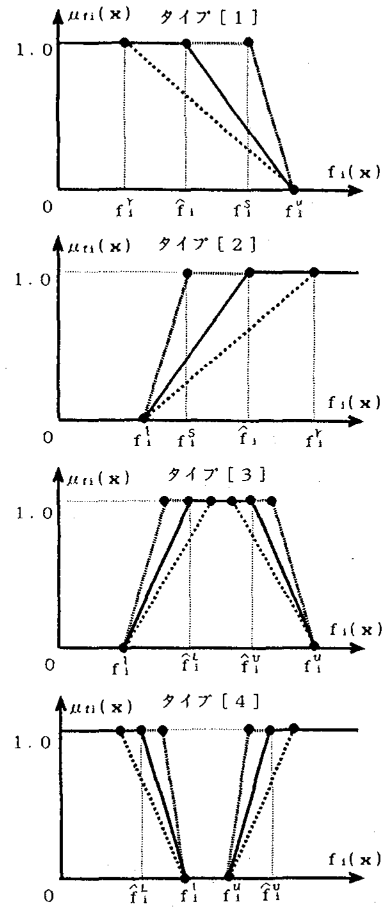
$\mu_{fi}(\mathbf{x})=(f_i^u-f_i(\mathbf{x}))/(f_i^u-\hat{f}_i^U),$

$\qquad \text{if } \hat{f}_i^U<f_i(\mathbf{x})<f_i^u$

$\mu_{fi}(\mathbf{x})=0,\qquad \text{if } f_i(\mathbf{x})\leqq f_i^l \text{ or } f_i(\mathbf{x})\geqq f_i^u$

$\cdots\cdots(6)$

$\hat{f}_i^L$と$\hat{f}_i^U$の間の幅を広げた時を緩和（点線），狭めた時



図－１　メンバーシップ関数

を引き締め（破線）と定義する．$f_i(\mathbf{x})$を$\hat{f}_i$に一致させたい場合（$f_i(\mathbf{x})\approxeq\hat{f}_i$）は$\hat{f}_i^L=\hat{f}_i^U=\hat{f}_i$とする．

［４］$f_i(\mathbf{x})$をある範囲の中に入れたくない場合
　　（$f_i(\mathbf{x})\lesssim\hat{f}_i^L$あるいは$f_i(\mathbf{x})\gtrsim\hat{f}_i^U$）

通常の目標計画法では，$f_i(\mathbf{x})\leqq\hat{f}_i^L$あるいは$f_i(\mathbf{x})\geqq\hat{f}_i^U$の場合，目標制約式を$f_i(\mathbf{x})-d_{i1}^++d_{i1}^-=\hat{f}_i^L$，$f_i(\mathbf{x})-d_{i2}^++d_{i2}^-=\hat{f}_i^U$の２つの式に分け ① $d_{i1}^+\rightarrow\min$，$d_{i2}^-\rightarrow\min$の順か，② $d_{i2}^-\rightarrow\min$，$d_{i1}^+\rightarrow\min$の順で差異の最小化をおこなえばよい．①と②のどちらを選ぶかによって結果は異なる．このタイプのファジィ目標に対するメンバーシップ関数を次式および図－１のタイプ［４］（実線）のように与える．

$\mu_{fi}(\mathbf{x})=1,\qquad \text{if } f_i(\mathbf{x})\leqq\hat{f}_i^L \text{ or } f_i(\mathbf{x})\geqq\hat{f}_i^U$

$\mu_{fi}(\mathbf{x})=(f_i^l-f_i(\mathbf{x}))/(f_i^l-\hat{f}_i^L),$

$\qquad \text{if } \hat{f}_i^L<f_i(\mathbf{x})<f_i^l$

$\mu_{fi}(\mathbf{x})=(f_i(\mathbf{x})-f_i^u)/(\hat{f}_i^U-f_i^u),$

$\qquad \text{if } f_i^u<f_i(\mathbf{x})<\hat{f}_i^U$

$\mu_{fi}(\mathbf{x})=0,\qquad \text{if } f_i^l\leqq f_i(\mathbf{x})\leqq f_i^u$

$\cdots\cdots(7)$

$\hat{f}_i^L$と$\hat{f}_i^U$の間の幅を狭めた時を緩和（点線），広げた時を引き締め（破線）と定義する．

４．対話的ファジィ目標計画法

（１）目標達成の優先度

目標計画法における目標達成の優先度の表し方には，（ａ）優先順位を付ける付順方式と，（ｂ）重み係数による重み付けを行う加重方式とがある．本研究における達成関数 $\mathbf{a}$ は付順と加重の両方式を併用した表現になっている．付順方式には，順位が上位の目標によって最適解が決まってしまうと下位の目標は無視されるという問題点があり，一方加重方式では，重み係数の比と各目標の達成度の割合は必ずしも同じにならないという問題点がある．また一般に付順が難しいために加重によるわけであるが，付順ができないくらいであるから実際どのような大きさの重み係数を与えたらよいか判断に迷うことが多い．このことから１回だけの目標計画法の解法によって，最適解を決定することには困難がある場合が多く，必然的に対話的目標計画法を採用せざるを得ない．

（２）非対話的と対話的ファジィ目標計画法

ファジィ目標計画法ではメンバーシップ関数のほかに優先順位と重み係数を与える必要がある．もしこれらを事前に確定的に与えることができれば目標計画法問題を１回だけ解いて得られる解が最適解となる（非対話的）．一方それが不可能な場合には解のトレードオフを行う対話的ファジィ目標計画法が必要となる．ただし対話的といってもそのための特別な手法があるわけでなく，解のトレードオフを取り入れた方式を対話的と称している．解のトレードオフは，（ａ）目標の緩和と引き締め，（ｂ）目標達成の優先順位の変更，（ｃ）目標達成の重み係数 w_i^+，w_i^- の変更　などによっておこなわれる．本研究の応用例では対話中の優先順位の変更はおこなわず，解のトレードオフは，目標の緩和と引き締めおよび重み係数 w_i^+，w_i^- の変更によっておこなう．

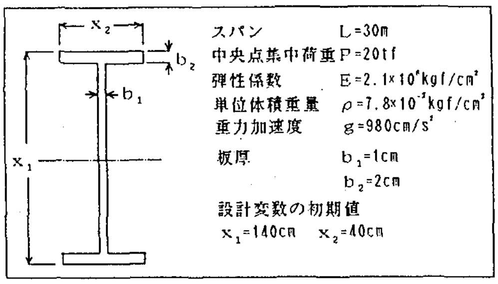
５．構造最適設計への応用

（１）桁断面の最適設計

まず図－２に示すＩ型断面の単純桁の断面設計を計算例とする．設計（決定）変数は桁高 x_1 とフランジ幅 x_2，制約条件は示方書によりフランジとウェブの板厚制限，および中央点の最大応力度，また目的関数は桁の固有振動数Ｆ，重量Ｗ，中央点のたわみＤとする．いま設計目標を $F(\mathbf{x})\precsim\hat{F}$，$W(\mathbf{x})\precsim\hat{W}$，$D(\mathbf{x})\precsim\hat{D}$ とし，目標を達成する優先度は同等であることを想定する．（４）式に従ってファジィ目標計画法設計問題の定式化を試みると，

find $\mathbf{x}=\{x_1, x_2\}$

to minimize



図－２　桁断面と計算のための諸元

表－１　理想点と最悪点

設計目標	固有振動数 F(Hz)	重量 W(kgf)	たわみ D(cm)
理想点	3.63（Ａ点）	5806（Ｃ点）	3.44（Ｂ点）
最悪点	5.85（Ｂ点）	8555（Ｂ点）	10.80（Ａ点）

（Ａ点～Ｃ点は図－３～図－５に示されている．）

$$\mathbf{a}=\{(d_1^+ + d_2^+),(d_3^+),(w_4^- d_4^- + w_5^- d_5^- + w_6^- d_6^-)\}$$

subject to

$$g_1(\mathbf{x})-d_1^+ + d_1^- = 0 \qquad \mu_F(\mathbf{x})-d_4^+ + d_4^- = 1$$
$$g_2(\mathbf{x})-d_2^+ + d_2^- = 0 \qquad \mu_W(\mathbf{x})-d_5^+ + d_5^- = 1$$
$$g_3(\mathbf{x})-d_3^+ + d_3^- = 0 \qquad \mu_D(\mathbf{x})-d_6^+ + d_6^- = 1$$
$$d_i^+ \cdot d_i^- = 0,\ d_i^+ \geqq 0,\ d_i^- \geqq 0,\ i=1, 2, \cdots, 6 \qquad \cdots\cdot(8)$$

上式における制約条件式は次のとおりである．

$$g_1(\mathbf{x}):(x_2-b_1)/26.2-b_2\leqq 0$$
$$g_2(\mathbf{x}):(x_1-2b_2)/152-b_1\leqq 0$$
$$g_3(\mathbf{x}):\sigma_c-\sigma_{ca}\leqq 0 \qquad \cdots\cdot(9)$$

またメンバーシップ関数は（３）式より，

$$\mu_F(\mathbf{x})=1, \qquad \text{if } F(\mathbf{x})\leqq\hat{F}$$
$$\mu_F(\mathbf{x})=(F^u-F(\mathbf{x}))/(F^u-\hat{F}), \qquad \text{if } \hat{F}<F(\mathbf{x})<F^u$$
$$\mu_F(\mathbf{x})=0, \qquad \text{if } F(\mathbf{x})\geqq F^u \qquad \cdots\cdot(10)$$

$$\mu_W(\mathbf{x})=1, \qquad \text{if } W(\mathbf{x})\leqq\hat{W}$$
$$\mu_W(\mathbf{x})=(W^u-W(\mathbf{x}))/(W^u-\hat{W}), \qquad \text{if } \hat{W}<W(\mathbf{x})<W^u$$
$$\mu_W(\mathbf{x})=0, \qquad \text{if } W(\mathbf{x})\geqq W^u \qquad \cdots\cdot(11)$$

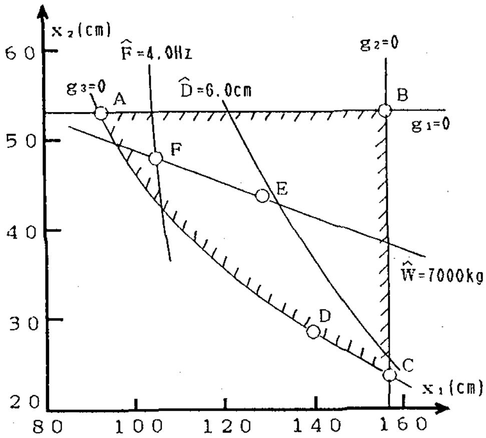
$$\mu_D(\mathbf{x})=1, \qquad \text{if } D(\mathbf{x})\leqq\hat{D}$$
$$\mu_D(\mathbf{x})=(D^u-D(\mathbf{x}))/(D^u-\hat{D}), \qquad \text{if } \hat{D}<D(\mathbf{x})<D^u$$
$$\mu_D(\mathbf{x})=0, \qquad \text{if } D(\mathbf{x})\geqq D^u \qquad \cdots\cdot(12)$$

（ａ）設計目標が $F(\mathbf{x})\precsim\hat{F}$，$W(\mathbf{x})\precsim\hat{W}$，$D(\mathbf{x})\precsim\hat{D}$ の場合の最適設計

図－２に示した諸元によってまず各目的関数を１つずつ最優先で最小化して理想点 F^*，W^*，D^* と最悪点 F_*，W_*，D_* を求めておく．表－１に示した理想点と最悪点の値を参考にして，例として次のような設計問題を想定

表—2　ケース（a）のトレードオフ表

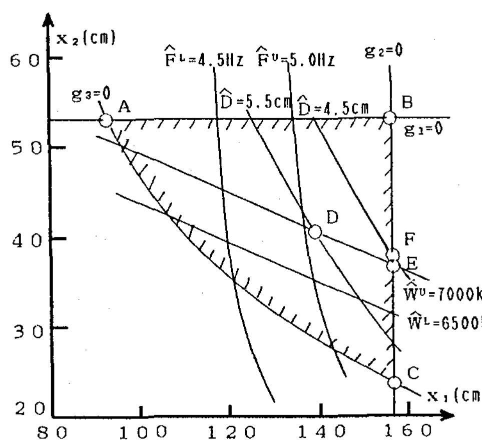
	設計目標	固有振動数F(Hz)	重量W(kgf)	たわみD(cm)
初期設計	目標値	3.63	5806	3.44
	重み係数	0.33	0.33	0.33
	目的関数	4.89	5863	7.20
	メンバーシップ関数	0.43	0.98	0.49
	設計変数(cm)	x_1=138.6, x_2=29.0　(D点)		
1	目標値	4.00	7000	6.00
	重み係数	0.33	0.33	0.33
	目的関数	4.78	7000	6.29
	メンバーシップ関数	0.58	1.00	0.94
	設計変数(cm)	x_1=127.8, x_2=43.8　(E点)		
2	目標値	4.00	7000	6.00
	重み係数	0.80	0.10	0.10
	目的関数	4.02	6772	9.21
	メンバーシップ関数	0.99	1.00	0.33
	設計変数(cm)	x_1=104.6, x_2=47.2　(F点)		



図—3　ケース（a）の設計変数空間

表—3　ケース（b）のトレードオフ表

	設計目標	固有振動数F(Hz)	重量W(kgf)	たわみD(cm)
初期設計	目標値	上側 5.00 下側 4.50	上側 7000 下側 6500	5.50
	重み係数	0.33	0.33	0.33
	目的関数	5.11	7009	5.50
	メンバーシップ関数	1.00	0.99	1.00
	設計変数(cm)	x_1=138.7, x_2=41.2　(D点)		
1	目標値	上側 5.00 下側 4.50	上側 7000 下側 6500	4.50
	重み係数	0.33	0.33	0.33
	目的関数	5.57	7015	4.62
	メンバーシップ関数	1.00	0.99	0.98
	設計変数(cm)	x_1=155.1, x_2=37.2　(E点)		
2	目標値	上側 5.00 下側 4.50	上側 7000 下側 6500	4.50
	重み係数	0.10	0.10	0.80
	目的関数	5.62	7100	4.50
	メンバーシップ関数	1.00	0.94	1.00
	設計変数(cm)	x_1=156.0, x_2=37.9　(F点)		



図—4　ケース（b）の設計変数空間

する．

『固有振動数Fは4.0Hz以下，重量Wは7000kgf以下，たわみDは6.0cm以下となる桁断面を設計したい．固有振動数目標を他の2つの目標より重視する．』

設計の経過を表—2のトレードオフ表および図—3に示す．まず最初に参考のためにメンバーシップ関数における$\hat{F}$，$\hat{W}$，$\hat{D}$を理想点F^*，W^*，D^*に，F^U，W^U，D^Uを最悪点F_*，W_*，D_*に等しくとり，また各目標の重み係数w_F，w_W，w_Dを同等として最初の設計をおこなう．次に理想点より大きな値を目標値$\hat{F}$，$\hat{W}$，$\hat{D}$にとり（緩和）1回目のトレードオフをおこなう．この結果重量WとたわみDは目標値に近づくが，固有振動数Fはまだ目標値から離れている．そこで目標値はそのままにして，重み係数を0.8:0.1:0.1として2回目のトレードオフをおこなう．その結果固有振動数目標が達成され，一方これと競合しているたわみ目標の達成度が低下する．なおこれと同じ結果は，重み係数を0.5:0.25:0.25とした時から得られるが，重み係数が0.4:0.3:0.3では固有振動数Fは4.44Hz（メンバーシップ関数は0.76）にしかならない．

（b）タイプの異なる設計目標が混じっている場合の最適設計

タイプの異なる設計目標を同時に扱うことができるのは，目標計画法の利点のひとつである．このような場合の最適設計の例として，$F(\mathbf{x})$が$F(\mathbf{x}) \lesssim \hat{F}^L$あるいは$F(\mathbf{x}) \gtrsim \hat{F}^U$，$W(\mathbf{x})$が$\hat{W}^L \lesssim W(\mathbf{x}) \lesssim \hat{W}^U$，　$D(\mathbf{x})$が$D(\mathbf{x}) \eqsim \hat{D}$の場合を考え，具体的には次のような設計問題を想定する．

『固有振動数Fが4.5Hzから5.0Hzの間に入らず，重量Wが6500kgfから7000kgfの間に入り，たわみDは5.5cmに等しくなる桁断面を設計したい．ただし，たわみDはできれば4.5cmまで減らしたい．たわみ目標を他の2つの目標より重視する．』

メンバーシップ関数のほかは（8）式～（9）式がそのまま使用できる．$F(\mathbf{x})$に対するメンバーシップ関数は（7）式より，

$$\mu_F(\mathbf{x}) = 1, \qquad \text{if } F(\mathbf{x}) \leqq \hat{F}^L \text{ or } F(\mathbf{x}) \geqq \hat{F}^U$$

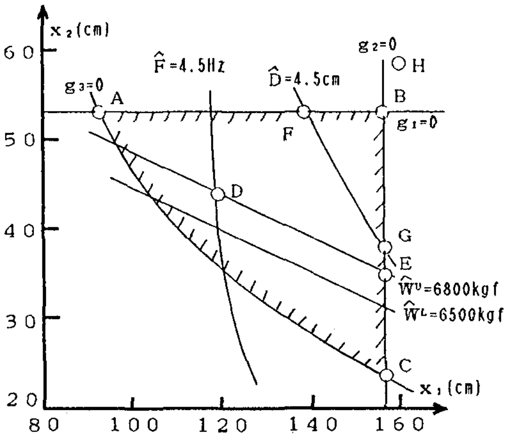
$$\mu_F(\mathbf{x}) = (F^1 - F(\mathbf{x}))/(F^1 - \hat{F}^L), \qquad \text{if } \hat{F}^L < F(\mathbf{x}) < F^1$$

$$\mu_F(\mathbf{x}) = (F(\mathbf{x}) - F^U)/(\hat{F}^U - F^U), \qquad \text{if } F^U < F(\mathbf{x}) < \hat{F}^U$$

表－4　設計目標達成の優先度に応じた最適設計

ケース	目標達成の優先度	最適解	設計変数 (cm)	振動数 F(Hz)	重量W (kgf)	たわみ D(cm)
①	F→W→D	D点	x_1=119.4 x_2= 43.8	4.50 (1.00)	6800 (1.00)	7.32 (0.55)
②	W→D→F	E点	x_1=156.0 x_2= 34.6	5.55 (0.22)	6800 (1.00)	4.81 (0.95)
③	D→F→W	F点	x_1=138.1 x_2= 53.4	5.25 (0.45)	8137 (0.24)	4.50 (1.00)
④	(F+W)→D	D点	x_1=119.4 x_2= 43.8	4.50 (1.00)	6800 (1.00)	7.32 (0.55)
⑤	3目標が同等	D点	x_1=119.4 x_2= 43.8	4.50 (1.00)	6800 (1.00)	7.32 (0.55)
⑥	Dに重み付け	G点	x_1=156.0 x_2= 37.9	5.62 (0.17)	7100 (0.83)	4.50 (1.00)
⑦	D→(F+W)	B点	x_1=156.0 x_2= 53.4	5.85 (0.00)	8555 (0.00)	3.44 (0.94)
⑧	D→(F+W)	H点	x_1=160.0 x_2= 58.9	6.06 ----	9159 ---	3.00 (1.00)

（かっこ内はメンバーシップ関数）



図－5　ケース（c）の設計変数空間

$\mu_F(\mathbf{x})=0$,　　　　if $F^1 \leqq F(\mathbf{x}) \leqq F^U$　　····（13）

またW(**x**)とD(**x**)に対するメンバーシップ関数は（6）式より，

$\mu_W(\mathbf{x})=1$,　　　　if $\hat{W}^L \leqq W(\mathbf{x}) \leqq \hat{W}^U$

$\mu_W(\mathbf{x})=(W(\mathbf{x})-W^1)/(\hat{W}^L-W^1)$,

　　　　if $W^1 < W(\mathbf{x}) < \hat{W}^L$

$\mu_W(\mathbf{x})=(W^U-W(\mathbf{x}))/(W^U-\hat{W}^U)$,

　　　　if $\hat{W}^U < W(\mathbf{x}) < W^U$

$\mu_W(\mathbf{x})=0$,　　　　if $W(\mathbf{x}) \leqq W^1$ or $W(\mathbf{x}) \geqq W^U$　　····（14）

$\mu_D(\mathbf{x})=1$,　　　　if $\hat{D}^L \leqq D(\mathbf{x}) \leqq \hat{D}^U$

$\mu_D(\mathbf{x})=(D(\mathbf{x})-D^1)/(\hat{D}^L-D^1)$,

　　　　if $D^1 < D(\mathbf{x}) < \hat{D}^L$

$\mu_D(\mathbf{x})=(D^U-D(\mathbf{x}))/(D^U-\hat{D}^U)$,

　　　　if $\hat{D}^U < D(\mathbf{x}) < D^U$

$\mu_D(\mathbf{x})=0$,　　　　if $D(\mathbf{x}) \leqq D^1$ or $D(\mathbf{x}) \geqq D^U$　　····（15）

設計の経過を表－3のトレードオフ表および図－4に示す．まず上式の$F^U=F^1$に$(\hat{F}^U+\hat{F}^L)/2$，W^1，D^1に理想点W^*，D^*，W^U，D^Uに最悪点W_*，D_*，さらに$\hat{F}^U$，$\hat{F}^L$，$\hat{W}^U$，$\hat{W}^L$，$\hat{D}^U=\hat{D}^L$に目標値を与え，各目標の重み係数w_4^-，w_5^-，w_6^-を同等として最初の設計をおこなう．この結果すべての目標が一度達成されるがさらにたわみDの値を改善するため，$\hat{D}^U=\hat{D}^L$=4.5cmとして1回目のトレードオフをおこなう．この結果をみるとたわみDはまだ目標値に達していないので，たわみ目標に重み0.8をつけて2回目のトレードオフをおこなう．その結果たわみ目標は完全に達成され，一方これと競合している重量目標の達成度が少し低下する．

（c）設計目標達成の優先度に応じた最適設計

目標計画法のひとつの特徴は，目標達成の優先度を絶対的な優先順位と相対的な重み係数によって与えることができることである．ここでは優先順位と重み係数を色々変えて最適設計をおこなった例を示す．問題はF(**x**)がF(**x**)≂$\hat{F}$，W(**x**)が$\hat{W}^L$≲W(**x**)≲$\hat{W}^U$，D(**x**)がD(**x**)≲$\hat{D}$の場合を考え，具体的には次のような設計問題を想定する．

『固有振動数Fが4.5Hzに等しくなり，重量Wが6500kgfから6800kgfの間に入り，たわみDは4.5cmより小さくなる桁断面を設計したい．』

この場合達成関数をのぞいて（8）式～（9）式のファジィ目標計画法問題がそのまま使用できる．達成関数**a**の式だけは優先度の与え方に応じてその内容を変えるが，この変更は極めて簡単におこなえる．メンバーシップ関数はW(**x**)に対しては（14）式，D(**x**)に対しては（12）式となり，F(**x**)はW(**x**)と同じタイプにし$\hat{F}=\hat{F}^L=\hat{F}^U$としてやればよい．

①優先順位を固有振動数目標→重量目標→たわみ目標

$\mathbf{a}=\{(d_1^++d_2^+),(d_3^+),(d_4^-),(d_5^-),(d_6^-)\}$

②優先順位を重量目標→たわみ目標→固有振動数目標

$\mathbf{a}=\{(d_1^++d_2^+),(d_3^+),(d_5^-),(d_6^-),(d_4^-)\}$

③優先順位をたわみ目標→固有振動数目標→重量目標

$\mathbf{a}=\{(d_1^++d_2^+),(d_3^+),(d_6^-),(d_4^-),(d_5^-)\}$

④優先順位を（固有振動数目標＋重量目標）→たわみ目標　$(w_4^-=w_5^-=0.5)$

$\mathbf{a}=\{(d_1^++d_2^+),(d_3^+),(w_4^-d_4^-+w_5^-d_5^-),(d_6^-)\}$

⑤3目標の優先順位も重み係数も同等

$(w_4^-=w_5^-=w_6^-=0.33)$

$\mathbf{a}=\{(d_1^++d_2^+),(d_3^+),(w_4^-d_4^-+w_5^-d_5^-+w_6^-d_6^-)\}$

⑥3目標の優先順位を同等にし，たわみ目標に重みをつける．　$(w_4^-=w_5^-=0.1, w_6^-=0.80)$

$\mathbf{a}=\{(d_1^++d_2^+),(d_3^+),(w_4^-d_4^-+w_5^-d_5^-+w_6^-d_6^-)\}$

⑦たわみの目標値を3.0としてたわみの最小化をおこなう．

$(w_4^-=w_5^-=0.5)$

$\mathbf{a}=\{(d_1^++d_2^+),(d_3^+),(d_6^-),(w_4^-d_4^-+w_5^-d_5^-)\}$　)

⑧たわみの目標値を3.0として制約を無視してもこの目標を達成する．$(w_4^-=w_5^-=0.5)$

$\mathbf{a}=\{(d_6^-),(d_1^++d_2^+),(d_3^+),(w_4^-d_4^-+w_5^-d_5^-)\}$

以上の８ケースの最適設計の結果を表－４および図－５に示す．表－４および図－５より目標達成の優先度に応じて結果が異なってくること，ケース⑦のように最小化目標によって１点に解が決まる場合下位の目標は無視されること，ケース⑧のように制約条件を無視しても目標を達成させることができることなどがわかる．

（２）トラスの最適設計

図－６に示す２０部材トラスの多目標最適設計を考える．設計変数は部材断面積$\mathbf{x}=\{x_1,\cdots,x_n,\cdots,x_N\}$（断面は正方形Ｂｏｘ断面），制約条件は応力度について，

$$g_i(\mathbf{x}):\sigma_i(\mathbf{x})-\sigma_{ai}(\mathbf{x})\leqq 0$$

目的関数は面内全体座屈荷重係数Ｂと重量Ｗとする．いま設計目標を$B(\mathbf{x})\gtrsim\hat{B}$，$W(\mathbf{x})\lesssim\hat{W}$とし，目標を達成する優先順位は$B(\mathbf{x})$，$W(\mathbf{x})$の順であることを想定する．（４）式に従ってファジィ目標計画法による設計問題の定式化を試みると，

find　$\mathbf{x}=\{x_1,\cdots,x_n,\cdots,x_N\}$

to minimize

$$\mathbf{a}=\{(\sum_{i=1}^{N}d_i^+),(d_{N+1}^-),(d_{N+2}^-)\}$$

subject to

$$g_i(\mathbf{x})-d_i^+ + d_i^- = 0,\quad i=1,2,\cdots,N$$
$$\mu_B(\mathbf{x})-d_{N+1}^+ + d_{N+1}^- = 1$$
$$\mu_W(\mathbf{x})-d_{N+2}^+ + d_{N+2}^- = 1$$
$$d_i^+\cdot d_i^- = 0,\quad d_i^+\geqq 0,\quad d_i^-\geqq 0,$$
$$i=1,2,\cdots,N+2 \qquad \cdots\cdots(16)$$

メンバーシップ関数は，$B(\mathbf{x})$については（５）式，$W(\mathbf{x})$については（３）式よりつくられる．

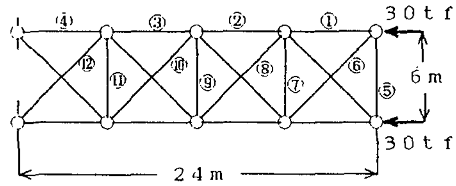
（ａ）設計目標が$B(\mathbf{x})\gtrsim\hat{B}$，$W(\mathbf{x})\lesssim\hat{W}$の場合の最適設計

図－６に示した諸元によってまず各目的関数を１つずつ最優先で最大化または最小化して理想点B^*，W^*と最悪点B_*，W_*を求めておく．表－５に示した理想点と最悪点の値を参考にして計算例として次のような設計問題を想定する．

『座屈荷重係数Ｂは4.0以上，重量Ｗは3385kgf（理想点）以下となるトラスを設計したい．結果を見て座屈荷重係数Ｂは3.5以上になる緩和を与えてもよい．』

設計の経過を表－６のトレードオフ表に示す．座屈荷重係数Ｂが4.0となった時の重量Ｗは，3513kgfで目標を上回っている．そこで座屈荷重係数Ｂを3.5以上に緩和してやると，重量Ｗは3393kgfとなり目標の3385kgfにかなり近づく．

（ｂ）設計目標が$B(\mathbf{x})\lesssim\hat{B}$，$W(\mathbf{x})\gtrsim\hat{W}$の場合の最適設計



弾性係数　$E=2.1\times10^6$kgf/cm²

単位体積重量　$\rho=7.8\times10^{-3}$kgf/cm³

断面積下限値　$A_{min}=20$cm²

断面積上限値　$A_{max}=45$cm²（①-④）

$A_{max}=30$cm²（⑤-⑫）

図－６　２０部材トラスと計算のための諸元

表－５　理想点と最悪点

設計目標	座屈荷重係数　Ｂ	重量 W(kgf)
理想点	4.86	3385
最悪点	3.44	3835

表－６　ケース（ａ）のトレードオフ表

	設計目標	応力度 (kgf/cm²)	座屈荷重係数Ｂ	重量 W(kgf)
初期設計	目標値	全部材	4.00	3385
	目的関数	$\sigma\leqq\sigma_a$	4.02	3513
	メンバーシップ関数	＊＊＊＊＊	1.00	0.71
	設計変数(cm²)	$x_1=42.5$, $x_2=42.2$, $x_3=42.3$, $x_4=44.5$, $x_5=20.0$, $x_6=27.2$, $x_7=20.0$, $x_8=27.2$, $x_9=37.3$, $x_{10}=26.8$, $x_{11}=20.0$, $x_{12}=28.6$		
1	目標値	全部材	3.50	3385
	目的関数	$\sigma\leqq\sigma_a$	3.52	3393
	メンバーシップ関数	＊＊＊＊＊	1.00	0.98
	設計変数(cm²)	$x_1=42.1$, $x_2=42.6$, $x_3=43.0$, $x_4=42.5$, $x_5=20.0$, $x_6=27.5$, $x_7=20.0$, $x_8=25.6$, $x_9=20.0$, $x_{10}=25.0$, $x_{11}=20.0$, $x_{12}=29.6$		

表－７　ケース（ｂ）のトレードオフ表

	設計目標	応力度 (kgf/cm²)	座屈荷重係数Ｂ	重量 W(kgf)
初期設計	目標値	４部材が	3.00	3510
	目的関数	$\sigma\geqq\sigma_a$	3.00	3367
	メンバーシップ関数	＊＊＊＊＊	1.00	0.00
	設計変数(cm²)	$x_1=41.9$, $x_2=42.6$, $x_3=42.8$, $x_4=35.8$, $x_5=20.0$, $x_6=30.8$, $x_7=20.0$, $x_8=25.6$, $x_9=20.0$, $x_{10}=24.6$, $x_{11}=20.0$, $x_{12}=29.9$		
1	目標値	全部材	4.00	3510
	目的関数	$\sigma\leqq\sigma_a$	3.80	3510
	メンバーシップ関数	＊＊＊＊＊	1.00	1.00
	設計変数(cm²)	$x_1=44.4$, $x_2=42.4$, $x_3=45.3$, $x_4=40.9$, $x_5=20.0$, $x_6=27.1$, $x_7=22.5$, $x_8=26.7$, $x_9=20.0$, $x_{10}=24.1$, $x_{11}=22.7$, $x_{12}=34.8$		

設計目標が（ａ）の場合と逆の$B(\mathbf{x})\lesssim\hat{B}$，$W(\mathbf{x})\gtrsim\hat{W}$となっており，理想点と最悪点が入れ替わる．（１６）式は達成関数$\mathbf{a}$をのぞいてそのまま使え，達成関数は次のように変えておく．

$$\mathbf{a}=\{(d_{N+1}^-),(\sum_{i=1}^{N}d_i^+),(d_{N+2}^-)\}$$

上式は座屈荷重係数目標を応力度制約（目標）よりも上位においてまず座屈荷重係数目標を達成させる表現となっている．メンバーシップ関数は$B(\mathbf{x})$については（３）

式，W($\mathbf{x}$)については（５）式よりつくられる．具体的な計算例として次のような設計問題が想定できる．

『まず応力度制約を無視して座屈荷重係数Ｂは3.0以下，重量Ｗは3510kgf以上となるトラスを設計したい．初期設計の結果，応力度が許容応力度を超えていれば，座屈荷重係数Ｂの目標を4.0以下に緩和してみる．』

設計の経過を表－７のトレードオフ表に示す．初期設計において座屈荷重係数Ｂの値が目標値の3.0になった時，４部材の応力度が許容応力度を超えている（最大でσ_a=692kgf/cm²に対して190kgf/cm²）．そこで座屈荷重係数Ｂの目標を4.0以下に緩和してトレードオフを試みると座屈荷重係数Ｂが3.80になった時，全部材の応力度が許容応力度以内に入り，重量Ｗも3510kgfで目標を達成する．

６．あとがき

本研究では多目標構造最適設計に対応できる最適設計のひとつの方法として，従来の目標計画法に次の４点について拡張または考察を加えた対話的ファジィ目標計画法を示した．

（ａ）“目的関数の最小化”以外のタイプの目標への拡張．

（ｂ）優先順位と重み係数による目標達成の優先度の表現．

（ｃ）目標の緩和と引き締めおよび優先度の変更によるトレードオフ解析．

（ｄ）目標をファジィ目標にとしたファジィ目標計画法．

いくつかの構造最適設計への応用例よりわかるように，本方法によれば（ａ）～（ｃ）の内容の実現が，他の多目的最適化手法に比べて比較的簡単に可能になる．また（ａ）～（ｃ）の内容を組み合わせて用いることによって，実際の多目標最適設計で生じる様々な問題に対応することが可能になる．さらに“ファジィ”目標計画法とすることで“尺度の異なる差異の基準化”の問題を考える必要がなくなる，差異が０～１に基準化されているので重み係数が比較的有効に働く，メンバーシップ関数が常に目標に対する達成度を表していることから達成度の把握がしやすくなる，などの利点が得られる．

参考文献

1)Kuppuraju,N. and Mistree,F. : Compromise:An Effective Approach for Solving Multiobjective Structural Design Problems, Computers and Structures, 22(5), pp.857-865, 1986

2)Rao,S.S.,Venkayya,V.B. and Khot,N.S. : Optimization of Actively Controlled Structures Using Goal programming Techniques, Inter. Jour. for Numer. Meths. in Engng., 26, pp.183-197, 1988

3)Chang,P. and Perl,J. : A Finite Element Based Approach to Multi-Objective Structural Optimization Using Goal Programming, Engineering Optimization, 13, pp.65-82, 1988

4)El-Sayad,M.E.M.,Ridgely,B.J. and Sandgren,E. : Nonlinear Structural Optimization Using Goal Programming, Computers and Structures, 32(1), pp.69-73, 1989

5)Mohandas,S.U.,Phelps,T.A. and Ragsdell,K.M. : Structural Optimization Using a Fuzzy Goal Programming Approach, Computers and Structures, 37(1), pp.1-8, 1990

6)斉藤進,堀井健一郎,依田照彦 ： 非線形目標計画法によるトラス構造物の最適設計，第１４回構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，pp.537-542, 1990

7)林正,平山博,大森龍一郎 ： 非線形目標計画法の最適構造設計への応用，土木学会論文集 No.437/I-17, pp.125-132, 1991

8)Rao,S.S.,Sundararaju,K.,Prakash,B.G. and Balakrishna,C. : Fuzzy Goal Programming Approach for Structural Optimization, AIAA Journal,30(5), pp.1425-1432, 1992

9)林正,平山博 ： 非線形目標計画法によるニールセン橋の最適構造設計，土木学会論文集 No.465/I-23, pp.155-158, 1993

10)斉藤進,堀井健一郎,依田照彦 ： 対話型ゴールプログラミングを利用した構造最適設計について，第１８回構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，pp.423-428, 1994

11)Ignizio,J.P. : Goal Programming and Extensions, Lexington Books, 1976

12)坂和正敏 ： 非線形システムの最適化，森北出版，1986

13)坂和正敏 ： ファジイ理論の基礎と応用，森北出版，1989

14)矢川元基編 ： ファジイ推論，培風館，1991

（１９９４年９月１４日受付）