

数式処理プログラムによる不規則構造解析

AN APPLICATION OF MATHEMATICAL SOFTWARE FOR STOCHASTIC STRUCTURAL ANALYSIS.

河角省治*, 岡林隆敏**, 崎山毅***

Shouji KAWAKADO, Takatosi OKABAYASI and Takesi SAKIYAMA

* (株)PAL構造 部長 電算技術部 (〒852 長崎市旭町8番20号)

**工博 長崎大学 助教授 工学部社会開発工学科 (〒852 長崎市文教町1番14号)

***工博 長崎大学 教授 工学部構造工学科 (〒852 長崎市文教町1番14号)

This paper is concerned with a application of mathematical softwares to calculate the deviation of the displacements and the internal forces of beams under the stochastic distributed load. The purpose of this paper is to explain the concept of the application. For the several beams under the distributed stochastic load, a formula manipulation software 'Mthematica' has used to obtain the analytical solution and a numerical analysis software 'MATLAB' has applied to obtain the numerical solution. The algorithm of the program using those software for calculating the co-variance response of beams are explained.

The calculating results show the standard deviations of the response of the displacements and the internal forces of beams under the white noise distributed load.

Key Words : probabilistic analysis, variance response, beam, Mathematica, MATLAB

1. はじめに

近年, コンピュータのソフトウェア技術の発展に伴って, マトリックス演算や関数演算を効率化したパッケージソフトウェアおよび解析的演算が可能な数式処理ソフトウェアが実現している. 本研究は, 最近飛躍的に発展しつつある, これらの数式処理プログラムを, 不規則構造解析に適応し, 解析解および数値解を得るための有効性について検討したものである.

計算機利用技術の飛躍的な発展に伴い, 計算目的に応じたさまざまなパッケージソフトウェアが開発されてきている. 一般に, これらのソフトウェアはコマンド機能による動作だけでなく, それぞれ固有の簡易言語によるプログラム機能による動作も可能としている. 科学技術計算における数値解析においても, C 言語や FORTRAN といった汎用のプログラム言語によるプログラムだけでなく, より目的の思考の強い簡易言語によるものに移行できることも多い.

C 言語や FORTRAN のプログラミングでは取扱いの困難な数式処理は, SMP⁽¹⁾, MACSYMA⁽¹⁾, Reduce⁽¹⁾, Maple⁽²⁾, Mathematica⁽³⁾, Theorist⁽⁴⁾ などの数式処理が扱えるソフトウェアにより実現できるようになっている. また, 技術計算に多用されるマトリックス演算は, SPEAKEASY⁽²⁾, MATRIX-x⁽⁵⁾, MATLAB⁽⁶⁾ などのソフトウェアの簡易言語を用いたプログラミングにより実現

できる.

不規則振動論や不規則構造解析における動的および静的応答の分散を求める計算は, 一般的に確定論の解析と比べて極めて煩雑になる. さらに, 確率論的解析の基本は, 解析の手法を基礎にしたものであり, 解析の煩雑さが解析の障害となっていると考えることができる. このような視点から, 著者らは, 構造物-荷重系を伊藤型の確率微分方程式でモデル化し, これより誘導される共分散方程式を数値解析する方法を, いくつかの問題に適用してきた⁽⁷⁾⁻⁽¹¹⁾.

近年, パーソナルコンピュータの利用を考えた有限要素法や動的解析の文献が出版され, ソースプログラムが利用できるようになっている. また, Mathematica の効率的な利用⁽¹²⁾⁻⁽¹⁴⁾や MATLAB の制御に関する⁽¹⁵⁾⁻⁽¹⁷⁾解説書も多く出版されている. さらに, 機械制御工学の分野では, これらのソフトウェアが多く使われてきている⁽¹⁸⁾. しかし, 構造解析, 振動解析さらに不規則振動論および不規則構造解析に利用した事例⁽¹⁹⁾⁽²⁰⁾はあまりないように思われる.

本論文は, 不規則分布荷重を受けるはりの共分散応答解析を行うために, その解析解については数式処理ソフトウェア Mthematica を用い, また, その数値解についてはマトリックス演算ソフトウェア MATLAB を用いた. これらの簡易プログラム言語を用いることにより不規則構造解析が容易に行えることを検討したものである.

本論文では、計算例として、不規則分布荷重を白色雑音過程でモデル化し、単純ばりと片持ちばりについて、共分散応答の解析および数値解を求めた。また、この解析における Mathematica および MATLAB のプログラムソースリストを提示することにより、簡易言語による不規則構造解析のプログラムが極めて簡単になることを示した。

2. はりの基礎方程式

(1) 状態方程式

図-1 のような断面力を考える。材長 l の一様断面ばりに不規則分布荷重 $q(x)$ が作用した場合、左端より x 点のたわみ $y(x)$ 、たわみ角 $\phi(x)$ 、曲げモーメント $M(x)$ およびせん断力 $Q(x)$ を状態変数と考えて、これらを状態方程式で表す。

$$\left. \begin{aligned} dy(x)/dx &= \phi(x) \\ d\phi(x)/dx &= -M(x)/EI(x) \\ dM(x)/dx &= Q(x) \\ dQ(x)/dx &= -q(x) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、式の記述を簡易にするために無次元量を導入する。距離 x を無次元長さ $x' = x/l$ で表し、また、各状態量の無次元量を $'$ 付きで表すと、

$$\left. \begin{aligned} y(x) &= y'(x')pl^4/EI \\ \phi(x) &= \phi'(x')pl^3/EI \\ M(x) &= M'(x')pl^2 \\ Q(x) &= Q'(x')pl \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

のように無次元表示できる。ここで、 p は一様分布荷重強度を表すものとする。不規則分布荷重 $q(x)$ の分散 σ_q^2 は無次元表示すると、

$$\sigma_q^2 = \sigma_q'^2 p^2 / l \quad (3)$$

となる。以後、式の展開は無次元量で表すものとし、また、式の記述を簡単にするために $'$ も省略する。

はりの変形と断面力の状態変数ベクトルを

$$X(x) = [y(x) \ \phi(x) \ M(x) \ Q(x)]^T \quad (4)$$

と表すと、(2) 式の関係より (1) 式は、次のようにベクトル表示される。

$$\frac{d}{dx} X(x) = A_X X(x) + F_X(x)$$

$$\text{境界条件 : } X(0) = X_0, X(1) = X_1 \quad (5)$$

ここに、 A_X は状態変数 X に関する係数行列、 F_X は外力ベクトルであり、

$$A_X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$F_X(x) = [0 \ 0 \ 0 \ -q(x)]^T \quad (7)$$

のように表される。さらに、境界条件も

$$X_0 = [y_0 \ \phi_0 \ M_0 \ Q_0]^T \quad (8)$$

$$X_1 = [y_1 \ \phi_1 \ M_1 \ Q_1]^T \quad (9)$$

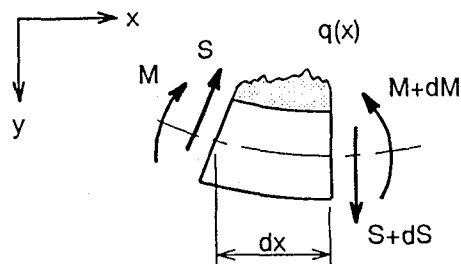


図-1 はり要素の断面力と分布荷重

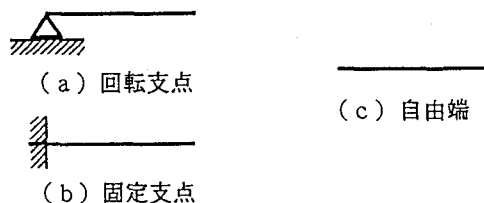


図-2 左端境界条件

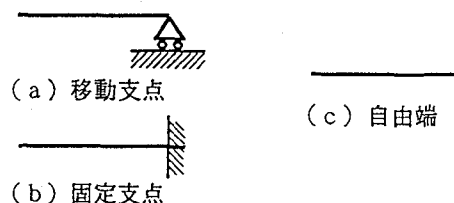


図-3 右端境界条件

のようにベクトル表示される。

(2) 境界条件の処理

はりの左端が図-2 で示されるような回転支持、固定支持および自由端である場合、境界条件の次の量は未知量になる。

$$\begin{bmatrix} \phi_0 \\ Q_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} M_0 \\ Q_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_0 \\ \phi_0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

これを始端境界ベクトルと称して $\bar{X}_0$ で表す。左端境界マトリックス B_X により、左端境界条件と関係づけられる。

$$X_0 = B_X \bar{X}_0 \quad (11)$$

ここに、左端境界マトリックス B_X は、はり左端が回転支持、固定支持および自由端の場合、それぞれ

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

のようになる。

右端では、境界条件が図-3に示される回転支持、固定支持および自由端である場合、次の量は0となる。

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

これを終端境界ベクトルと称して $\tilde{X}_1$ で表すと、右端境界条件は、

$$B'_X X_1 = \tilde{X}_1 = 0 \quad (14)$$

となる。ここに、 B'_X は右端境界マトリックスであり、はり右端が移動端、固定端および自由端の場合、それぞれ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

のようになる。

(3) 荷重のモデル化

不規則分布荷重 $q(x)$ は平均値とその回りの変動に分離されるが、荷重の平均値によるはりの応答は、これまでの構造力学により解析できる。そこで、荷重として平均値回りの変動のみを考え、さらに、不規則分布荷重は正規性白色雑音過程と仮定する。このことにより、応答 $X(x)$ も正規性確率過程となり、応答 $X(x)$ は平均値回りの変動となる。

不規則分布荷重は平均値0、自己相関が

$$E[n(x_1)n(x_2)] = \sigma^2 \delta(x_1 - x_2) \quad (16)$$

で定義される白色雑音過程 $n(x)$ と確定関数 $g(x)$ の積

$$q(x) = n(x)g(x) \quad (17)$$

で表される非定常確率過程とする。なお、 $E[\cdot]$ は集合平均の演算子であり、 δ は Dirac のデルタ関数である。

このような荷重を仮定した場合、(7)式の外力ベクトル $F_X(x)$ は平均値0、自己相関関数

$$E[F_X(x_1)F_X(x_2)] = Q_X(x)\delta(x_1 - x_2) \quad (18)$$

を有する正規性白色雑音過程ベクトルとなる。ここに、強度マトリックス $Q_X(x)$ は

$$Q_X(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2 g^2(x) \end{bmatrix} \quad (19)$$

のようになる。

3. 不規則応答解析

(1) 共分散方程式

はりの応答 $X(x)$ は(5)式の解過程として次式で与えられる。

$$X(x) = \Phi_X(x, 0) + \int_0^x \Phi_X(x, \lambda) F_X(\lambda) d\lambda \quad (20)$$

ここに、 $\Phi_X(x_1, x_2)$ は(5)式に関する状態遷移行列であり、

$$\Phi_X(x_1, x_2) = e^{A_X(x_1 - x_2)} \quad (21)$$

により定義される。

これを、共分散の定義 $R_X(x) = E[X(x)X^T(x)]$ に代入し、白色雑音過程ベクトル(18)式の性質を使って積分すると、 $X(x)$ の共分散 $R_X(x)$ は次式のようにになる。

$$R_X(x) = \Phi_X(x, 0) R_{X0} \Phi_X^T(x, 0) + P_X(x) \quad (22)$$

$$P_X(x) = \Phi_X(x, 0) \int_0^x E[X_0 F_X^T(\lambda)] \Phi_X^T(x, \lambda) d\lambda \\ + \int_0^x \Phi_X(x, \lambda) E[F_X(\lambda) X_0^T] d\lambda \Phi_X^T(x, 0) \\ + \int_0^x \Phi_X(x, \lambda) Q_X(\lambda) \Phi_X^T(x, \lambda) d\lambda \quad (23)$$

ここに、 R_{X0} は左端境界条件の共分散である。

この両辺を x で微分して、若干の演算を実行すると、

$$\frac{d}{dx} R_X(x) = A_X(x) R_X(x) + R_X(x) A_X^T(x) \\ + \Phi_X(x, 0) E[X_0 F_X^T(x)] \\ + E[F_X(x) X_0^T] \Phi_X^T(x, 0) + Q_X(x)$$

$$\text{境界条件: } R_X(0) = R_{X0}, R_X(1) = R_{X1} \quad (24)$$

のように、微分方程式の形で表現された共分散方程式を得る。なお、 R_{X1} は右端境界条件の共分散である。

この方程式は、 $E[X_0 F_X^T(x)]$ 、 $E[F_X(x) X_0^T]$ と R_{X0} が求められれば、初期値問題として解くことができる。

(2) 境界条件と外力の相関関数

(20)式において、 $x=1$ とし、右側より $F_X^T(x)$ をかけて平均の操作をする。さらに、白色雑音に関する積分を実行し、境界条件処理(11),(14)式の関係を用いると、

$$E[\tilde{X}_1 F_X^T(x)] = B'_X \Phi_X(1, 0) B_X E[\tilde{X}_0 F_X^T(x)] \\ + B'_X \Phi_X(1, x) Q_X(x) = 0 \quad (25)$$

を得る。この式より $E[\tilde{X}_0 F_X^T(x)]$ が求まる。さらに、

$$E[X_0 F_X^T(x)] = B_X E[\tilde{X}_0 F_X^T(x)] \\ = -(B_X (B'_X \Phi_X(1, 0) B_X)^{-1} B'_X) \\ \times \Phi_X(1, x) Q_X(x) \quad (26)$$

が得られる。この行列の転置により $E[F_X(x) X_0^T]$ が得られる。このようにして、境界条件と外力の相関関数を得ることができる。

(3) 始端状態変数の共分散行列

共分散方程式の解は、(22)式に示すように、これを初期値問題と考えた場合、初期条件 R_{X0} による応答と $R_{X0} = 0$ としたときの荷重項による応答の和として与えられる。(22)式において、 $x=1$ とし式の両側より B'_X と B_X^T をかけると、(11),(14)式の関係より

$$B'_X R_{X1} B_X^T \\ = (B'_X \Phi_X(1, 0) B_X) \tilde{R}_{X0} (B'_X \Phi_X(1, 0) B_X)^T \\ + B'_X P_X(1) B_X^T = 0 \quad (27)$$

が得られる。ここに、 $\tilde{R}_{X0}$ は $\tilde{X}_0$ の共分散である。この式より $\tilde{R}_{X0}$ を求めることができる。この結果、始端状態

$$\begin{aligned} R_{X0} &= B_X \tilde{R}_{X0} B_X^T \\ &= -(B_X (B_X' \Phi_X(1,0) B_X)^{-1} B_X') \\ &\quad \times P_X(1) (B_X (B_X' \Phi_X(1,0) B_X)^{-1} B_X')^T \quad (28) \end{aligned}$$

を求めることができる。

4. 数式処理プログラム

(1) Mathematica

Mathematica は⁽¹⁾⁽³⁾、大型計算機システム用に開発された数式処理プログラム Symbolic Manipulation Programs (SMP) を前身とし、1988 年 S.Wolfram によりパーソナルコンピュータ (Macintosh) 用数式処理プログラムとして発表されている。以来、MS-DOS, UNIX, MS-Windows などの各種のコンピュータシステムに順次移植され、現在、パーソナルコンピュータから EWS に到る数多くのシステム上で使用できるソフトウェアとなっている。また、その機能においては数多くの数学関数、高速数値演算、グラフィックス、音声応答機能などの取扱いを可能としており、数学の計算に関する総合的なソフトウェアといえる。

本論文では、Mathematica の特徴である、数値処理、記号処理、グラフィックス処理を統一的に取り扱えることのなかから、記号処理すなわち数式処理に着目し、数式処理のプログラミング機能を用いることで、不規則構造解析における数式計算を簡単なプログラムで処理することを試みる。

(2) MATLAB

MATLAB は⁽¹⁾⁽⁶⁾、制御設計や信号処理の支援ツールとして、初めは大型計算機用の数値解析ソフトウェアとして FORTRAN 言語により開発されている。現在 UNIX, Macintosh, MS-DOS, MS-Windows などのコンピュータシステム上での稼動が可能となっており、制御設計などの利用だけではなく、数値解析の汎用的なソフトウェアとしての利用が考えられる。MATLAB の基本的なデータ要素は長方形の数値行列であり、行列演算のアルゴリズムは、線形代数に関する FORTRAN サブルーチンライブラリの開発や整備を目的として、米国の Argonne 国立研究所を中心に行われた LINPACK, EISPACK プロジェクトで開発されたものを利用している。その特徴としては、行列演算や各種関数などの機能を利用できる数値解析基本モジュールを核として、各種制御解析や信号処理などの専用 Toolbox が拡張機能モジュールとして提供されていることにある。

本論文では、MATLAB の行列演算の簡易な表現に着目し MATLAB を用いることで、不規則構造解析の数値解析を簡単なプログラムで実現することを試みた。

5. Mathematica による解析

本解析では、白色雑音過程でモデル化した不規則分布荷重を受ける単純ばりと片持ちばりについて、応答の共分散の解析解を Mathematica により求める。

(1) Mathematica による解析手法

Mathematica の数式処理の機能には、行列を含む代数計算、微分・積分の計算、微分方程式の計算などがあるが、積分の計算と微分方程式の計算とを比較すると、解析演算においては、前者の方が一般的に求め易いといえる。そこで、はりの応答の共分散を求める計算では、(22),(23) 式の積分による計算を用いることとした。図-4 にそれを示す。

計算に必要な数式処理は、以下のようである。

- (a) 左端境界マトリックス B_X の定義。
- (b) 右端境界マトリックス B_X' の定義。
- (c) 外力の強度マトリックス Q_X の定義。
- (d) 状態遷移行列 $\Phi_X(x_1, x_2)$ の関数としての定義。
- (e) 境界条件と外力の相関関数 $E[X_0 F_X^T(x)]$ の関数としての定義、および行列の計算。
- (f) 境界条件の共分散 R_{X0} を得るための定積分の計算、および行列の計算。
- (g) 応答の共分散 $R_X(x)$ を得るための定積分の計算、および行列の計算。

また、この処理のために Mathematica の機能として、以下を用いた。

- 1. 行列の定義 : { } で囲まれたリストによる
- 2. 行列の計算 : 積記号はピリオドを用いる
- 3. 逆行列の計算 : Inverse[]
- 4. 転置行列の計算 : Transpose[]
- 5. 関数の定義 : 変数名は__を付ける
定義式は := に続ける
- 6. 定積分の計算 : Integrate[]

なお、';' に続く説明は Mathematica の固有の手続き方法および手続き名である。また、5., 6. の処理はすべて行列としての取扱いが可能である。このことにより、Mathematica によるプログラムは非常に簡明なものとなる。

(2) Mathematica のプログラム

図-4 に不規則分布荷重を受ける単純ばりの共分散応答を求めるための、Mathematica のプログラムリストを示す。行先頭の数字はリスト識別のために付加している。

リストの 1 行から 4 行までは、行列の初期化処理であり、続く、5 行から 10 行までは、共分散方程式を解くための準備である。さらに、11 行から 13 行は、積分の計算を行い共分散応答を得るものである。また、境界マトリックスの定義を変更することだけで、片持ちばりや両端固定ばりの計算が行えるものとなっている。

以上のようにわずか 13 行のプログラムではりの共分散応答の解析を可能としている。以下に、各行の処理内容について説明を行う。

$$\begin{aligned}
R_X(x) &= \Phi_X(x, 0) R_{X0} \Phi_X^T(x, 0) + P_X(x) \\
P_X(x) &= \Phi_X(x, 0) \int_0^x E[X_0 F_X^T(\lambda)] \Phi_X^T(x, \lambda) d\lambda \\
&\quad + \int_0^x \Phi_X(x, \lambda) E[F_X(\lambda) X_0^T] d\lambda \Phi_X^T(x, 0) \\
&\quad + \int_0^x \Phi_X(x, \lambda) Q_X(\lambda) \Phi_X^T(x, \lambda) d\lambda
\end{aligned}$$

```

1. bl={{0,0},{1,0},{0,0},{0,1}}
2. br={{1,0,0,0},{0,0,1,0}}
3. qx={{0,0,0,0},{0,0,0,0},
        {0,0,0,0},{0,0,0,s}}
4. hx[x_]:={{1,x,-x^2/2,-x^3/6},
             {0,1,-x,-x^2/2},
             {0,0,1,x},
             {0,0,0,1}}
5. bb=bl.Inverse[br.hx[1].bl].br
6. xf[a_]:=bb.hx[1-a].qx
7. fx[a_]:=Transpose[-bb.hx[1-a].qx]
8. px[x_,a_]:=
    hx[x].xf[a].Transpose[hx[x-a]]
    +hx[x-a].fx[a].Transpose[hx[x]]
    +hx[x-a].qx.Transpose[hx[x-a]]
9. pxl=Integrate[px[1,z],{z,0,1}]
10. r0=-bb.pxl.Transpose[bb]
11. rpx=Integrate[px[x,z],{z,0,x}]
12. rr0=hx[x].r0.Transpose[hx[x]]
13. rx=Simplify[rr0+rpx]

```

図-4 Mathematica のプログラムリスト

- 1行 bl は左端境界マトリックス B_X であり, (12) 式の回転支持の条件により定義.
- 2行 br は右端境界マトリックス B_X' であり, (15) 式の移動端の条件により定義.
- 3行 qx は外力の強度マトリックス Q_X であり, (19) 式により定義. なお, このとき $g(x) = 1$ ($0 \leq x \leq 1$) とすることで, s は荷重の分散 σ^2 を表すものになっている.
- 4行 hx は状態遷移行列 Φ_X であり, (21) 式の解析解として $x = (x_1 - x_2)$ で定義された関数.
- 5行 bb は(26)式および(28)式の係数行列を計算したものである.
- 6行 xf は境界条件と外力の相関関数 $E[X_0 F_X^T(x)]$ であり, (26)式において x を a と表した関数.
- 7行 fx は境界条件と外力の相関関数 $E[F_X(x) X_0^T]$ であり, (26)式の転置行列とした関数.
- 8行 px は共分散方程式における被積分関数であり, (23)式において λ を a と表した被積分関数.

9行 pxl は始端状態変数の共分散を求めるための, 左端における外力項による応答 $P_X(1)$ であり, (23)式において $x = 1$ として積分を計算することで求めている.

10行 r0 は始端状態変数の共分散 R_{X0} であり, (28)式の計算を行っている.

11行 rpx は共分散応答 $R_X(x)$ の外力項による応答の項であり, (23)式の積分計算を行っている.

12行 rr0 は共分散応答 $R_X(x)$ の初期条件による応答の項であり, (22)式の第1項の計算を行っている.

13行 rx は共分散応答 $R_X(x)$ であり, (22)式の計算を行なうと共に数式の整理を行っている.

(3) Mathematica による解析解

Mathematica のプログラムをパーソナルコンピュータで実行することにより, わずかの時間ではりの応答の共分散 $R_X(x)$ が得られる.

以下に単純ばりと片持ちばりの共分散行列の対角項, すなわち不規則分布荷重を受けるはりの応答の分散を示す. これらの結果は, 著者の一人が机上の計算により得た結果と一致している⁽⁹⁾. この計算を解析的に実行すると, 極めて煩雑な積分を数多く実行しなければならない.

単純ばりの分散応答は次式のように得られる.

$$E[y(x)^2] = \frac{s}{945} x^2 (1-x)^2 \times (2+4x-x^2-6x^3+3x^4) \quad (29)$$

$$E[\phi(x)^2] = \frac{s}{945} (2-21x^2+105x^4-126x^5+42x^6) \quad (30)$$

$$E[M(x)^2] = \frac{s}{3} x^2 (1-x^2) \quad (31)$$

$$E[Q(x)^2] = \frac{s}{3} (1-3x+3x^2) \quad (32)$$

片持ちばりの分散応答は次式のように得られる.

$$E[y(x)^2] = \frac{s}{1260} x^4 (105-105x+35x^2-2x^3) \quad (33)$$

$$E[\phi(x)^2] = \frac{s}{60} x^2 (20-30x+15x^2-2x^3) \quad (34)$$

$$E[M(x)^2] = \frac{s}{3} (1-x)^3 \quad (35)$$

$$E[Q(x)^2] = s(1-x) \quad (36)$$

6. MATLAB による解析

本解析では, 白色雑音過程でモデル化した不規則分布荷重を受ける単純ばりと片持ちばりについて, 応答の共分散の数値解を MATLAB により求める.

(1) MATLAB による解析手法

数値計算においては, 積分の計算を行うよりも微分方程式を Runge-Kutta などの数値解法を用いて求める方がより一般的であり, また, 効果的であるといえる. そこで, ここではマトリックス形式の微分方程式である(24)式の共

分散方程式を数値解法により求めることとした。図-5にそれを示す。

MATLAB の数値計算プログラムの特徴は、行列演算が FORTRAN と比べると簡単に記述できる。また、専用の行列演算アルゴリズムを用いていることから、高速演算が期待できる。さらに、プログラム構造としての階層化が容易に記述できるなどのことがある。

図-5 のプログラムは、マトリックス形式の微分方程式を解くために、従来ベクトル形式で用いられている Runge-Kutta の数値積分法をマトリックス形式に拡張した関数である。また、共分散方程式の右辺の微分係数を求める関数、および境界条件と外力の相関関数を求める関数も示した。なお、Runge-Kutta の公式は 4 次のものとした。

計算における数値演算のプロセスは、以下ようである。

- (a) 左端境界マトリックス B_X の定義。
- (b) 右端境界マトリックス B_X' の定義。
- (c) 境界条件と外力の相関関数や始端状態変数の共分散を連立方程式として求めるための係数マトリックスの計算。
- (d) 始端状態変数の共分散を得るため、Runge-Kutta 積分の実行による $P_X(1)$ の計算。
- (e) 始端状態変数の共分散 R_{X0} の計算。
- (f) 共分散応答 $R_X(x)$ を得るための Runge-Kutta 積分の実行。

MATLAB では、これらの処理をコマンド群として記述する。また、この処理を実行するために、以下のような関数を用いる。

1. 状態方程式の係数マトリックス A_X の定義。
2. 外力の強度マトリックス Q_X の定義。
3. 状態遷移行列 $\Phi_X(x_1, x_2)$ の定義。
4. 境界条件と外力の相関関数 $E[X_0 F_X^T(x)]$ の定義。
5. 共分散方程式の右辺の微分係数を求める関数の定義。
6. 微分方程式の数値積分、マトリックス形式の Runge-Kutta 積分スキームからなる関数の定義。

(2) MATLAB のプログラム

図-5 に共分散応答解析における数値積分を行うために MATLAB で用いた関数のプログラムリストの一部を示す。なお、ここに用いている行列名のほとんどは前章で示した Mathematica のそれと同じものとしており、それらについては説明を省略する。また同様に、行先頭の数字はリスト識別のために連番で付加しているが、各関数はそれぞれ別のファイルに区分されている。さらに、リストにおける () 内の : は行列をベクトルに並べ替える操作を、各行末の ; は計算結果の非表示を、また、行列名の後の ' は転置行列の操作を意味する MATLAB 固有の表現である。

リストの 1 行から 20 行は、Runge-Kutta の 4 次の公式を用いたマトリックス形式の数値積分の関数であり共分散方程式(24)式の計算に用いられる。

引数の $h0, n, d$ はそれぞれ積分領域の初期値、分割

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} R_X(x) = & A_X(x) R_X(x) + R_X(x) A_X^T(x) \\ & + \Phi_X(x, 0) E[X_0 F_X^T(x)] \\ & + E[F_X(x) X_0^T] \Phi_X^T(x, 0) + Q_X(x) \end{aligned}$$

%Matrix-formulation Runge-Kutta equation

```
1. function [x,xr]=rkcve(h0,n,d,r0
    ,ax,qx,bb)
2. y=r0(:);
3. xr(1,:)=y';
4. x(1)=h0;
5. xx=h0;
6. for k=2:n
7. k1=drmat(xx,r0,ax,qx,bb)*d;
8. xx=xx+0.5*d;
9. r1=r0+0.5*k1;
10. k2=drmat(xx,r1,ax,qx,bb)*d;
11. r2=r0+0.5*k2;
12. k3=drmat(xx,r2,ax,qx,bb)*d;
13. xx=xx+0.5*d;
14. r3=r0+k3;
15. k4=drmat(xx,r3,ax,qx,bb)*d;
16. r0=r0+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
17. y=r0(:);
18. xr(k,:)=y';
19. x(k)=xx;
20. end
```

%Differential coefficient Matrix

```
21. function [dr]=drmat(x,rx,ax,qx,bb)
22. xf=cal_cor(x,qx,bb);
23. dr=ax*rx+rx*ax'+xf+xf'+qx;
```

%Correlation function Matrix

```
24. function [xf]=cal_cor(x,qx,bb)
25. hf=cal_phi(1-x);
26. hb=cal_phi(x-0);
27. xf=-hb*bb*hf*qx;
```

図-5 MATLAB のプログラムリスト

点数、刻み幅であり、 $r0$ は応答の共分散 $R_X(x)$ の初期値である。また、 ax は状態方程式の係数行列 A_X を表し(6)式の定義としている。さらに、引数 ax, qx, bb は共分散方程式の微係数の計算のために、下位の関数 $drmat()$ で用いられるが、一般の数値積分問題では、これらは必要に応じて用いられるものである。7 行から 16 行までが Runge-Kutta の 4 次の積分スキームである。

リストの 21 行から 23 行は、この問題における共分散方程式の微分係数を求める関数である。

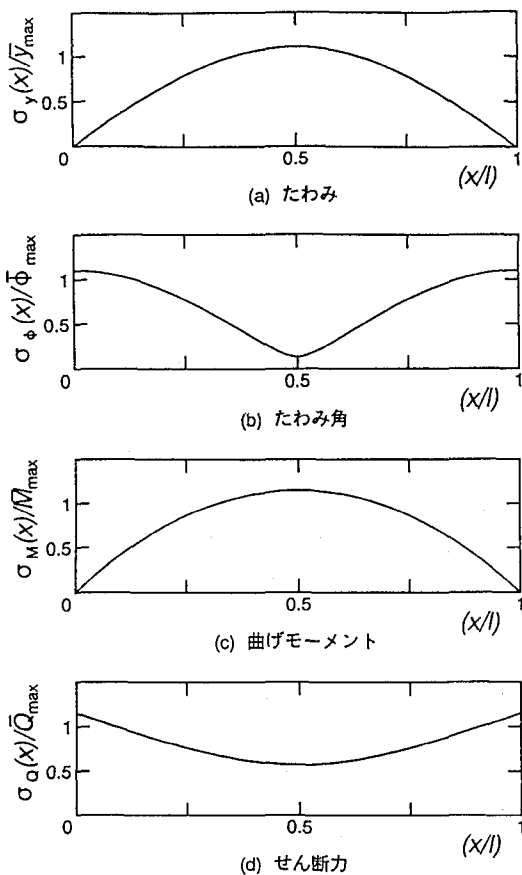


図-6 単純ばりの応答の標準偏差

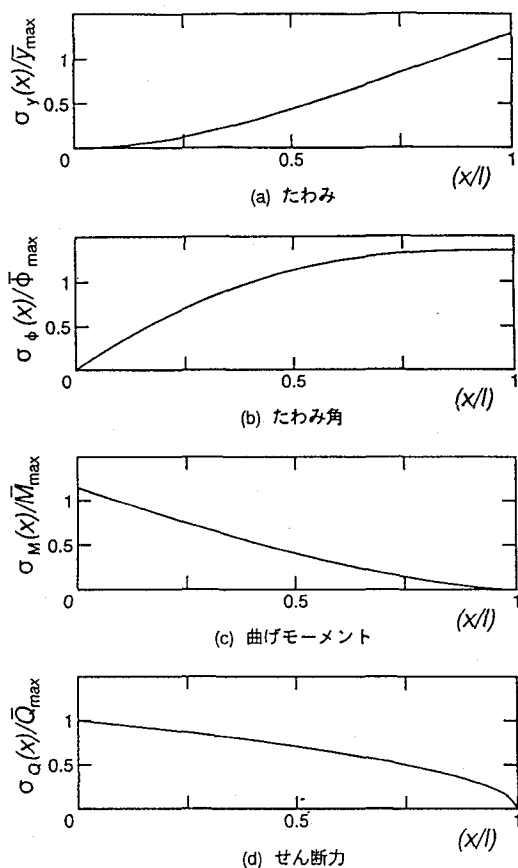


図-7 片持ちばりの応答の標準偏差

22 行は境界条件と外力項の相関をもとめる関数の引用であり、23 行は(24)式の右辺に相当する。

リストの 24 行から 27 行は、境界条件と外力項の相関をもとめる関数であり、 $\Phi_X(x, 0)$ と $E[X_0 F_X^T(x)]$ の積のかたちで定義している。

25 行および 26 行で用いている関数 `cal_phi()` は状態遷移行列を計算する関数であり、ここでは解析解を用いている。

(3) MATLAB による数値解

MATLAB のプログラムをパーソナルコンピュータで実行することにより、わずかの時間ではりの応答の共分散 $R_X(x)$ が得られる。

図-6 および 図-7 にこれらのプログラムを用いて求めた MATLAB の計算結果を図示する。この計算ではグラフの表示を正確にするために、数値積分の分割数は 100 としている。

図-6 は単純ばりのたわみ、たわみ角、曲げモーメントおよびせん断力の応答の標準偏差であるが、これらの値は等分布荷重 $p = 1$ が作用したときのはりの応答の最大値 $\bar{y}_{\max}$, $\bar{\phi}_{\max}$, $\bar{M}_{\max}$ および $\bar{Q}_{\max}$ で規準化している。また、図-7 は片持ちばりについて同様に求めたものである。

これらの結果は、著者の一人が得た結果と一致しており⁽⁹⁾、また、Mathematica のグラフィック機能を用いて 5 章で求めた解析解を図化したものとも一致する。

MATLAB のプログラムは、Mathematica におけるプログラムと比べると、若干複雑となる。また、計算時間は、パーソナルコンピュータを用いた場合でも、本解析例では両者わずかの時間であり、それらに差異は特に認められない。しかし、解析解が得られないような問題や系がより複雑になった問題においても、この数値計算プログラムを基本として、多少の追加をおこなうことで、そのような問題の解析が可能であるという利点がある。

表-1 に不規則構造解析に適用した場合における Mathematica と MATLAB の特徴を比較したものを示す。

表-1 Mathematica と MATLAB の特徴比較

	Mathematica	MATLAB
プログラム	短い	やや長い
単径間の場合	解析解を得る	数値解を得る
多径間の場合への拡張	解析解を得ることが困難となる	数値解析であるので対応できる

7. おわりに

本論文は、不規則構造解析における極めて煩雑な数式処理を、数式処理ソフトウェアを利用することにより簡単なプログラムにより実現できること、さらに、その数値計算においても数値計算ソフトウェアを用いることで、プログラムの記述がより簡明となることを明らかにした。このことは、確率論的解析における一つの障害といえる解析の煩雑さを、数式処理プログラムの利用により、簡明なものとするのが可能であることを示唆している。

本論文の解析例としては、著者の一人がすでに報告している⁹⁾、白色雑音過程でモデル化した不規則分布荷重を受けるはりの共分散応答の問題を取り上げ、その解析解と数値解をパーソナルコンピュータの計算により求めたものである。この問題は、不規則構造解析における最も基本的なものであるが、このような解析を行うことで、数式処理プログラムの有効性を確認できたといえる。

本研究で得られた結果を要約すると、次のようになる。

- (1) 数式処理ソフトウェア Mathematica を用いることで、不規則分布荷重を受けるはりの共分散応答の解析解を、パーソナルコンピュータの計算でもわずかの時間で得ることができる。
- (2) 数値演算ソフトウェア MATLAB を用いた数値計算プログラムにより、不規則分布荷重を受けるはりの共分散応答の数値解が、パーソナルコンピュータによりわずかの時間で得ることができる。
- (3) 数式処理プログラムの利用により、煩雑な解析を必要とする確率論的解析をより簡明なものとする可能性を示した。
- (4) 伝達マトリックス法を確率論的解析に拡張した確率伝達マトリックス法は、計算機およびソフトウェアを活用することにより、不規則構造解析を簡単に実現できものとなっている。

本論文は、数式処理、数値処理の2つのソフトウェアを、単一はりの不規則構造解析という確率論的解析の問題に適用し、その有効性や特徴を検討したものである。今後の課題として、確率論的解析におけるより複雑な問題への応用を考えている。この場合、それぞれのソフトウェアに適した問題の分類や整備を行うことで、より効果的な適用を検討したい。また、本研究では検討していないソフトウェアの確率論的解析への適用も将来の課題としたい。

参考文献

- 1) 阿部寛：やさしい Mac の数値／数式処理プログラム、毎日コミュニケーションズ、1990年8月。
- 2) 日本サン・マイクロシステムズ株式会社：Catalyst 1994、日本サン・マイクロシステムズ株式会社、1994年7月。
- 3) S.Wolfram (白水重明訳)：Mathematica A System for Doing Mathematics by Computer, アジソン・ウエスレイ・パブリッシャーズジャパン株式会社、1992年3月。
- 4) Presience Corporation, Theorist reference manual, Presience Corporation, 1990-10.
- 5) Integrated Systems Inc.: MATRIX-x USER'S GUIDE, Integrated Systems Inc., 1984.
- 6) The MathWorks, Inc.: MATLAB Reference Guide, サイバネットシステム株式会社、1993年5月。
- 7) 岡林隆敏・単一走行車両による道路橋の二乗平均応答解析, 土木学会論文報告集, 第286号, pp.15-27, 1979年6月。
- 8) 岡林隆敏・不確定変量を有する動的系の非定常不規則応答, 土木学会論文報告集, 第308号, pp.11-24, 1981年4月。
- 9) 岡林隆敏・不規則な分布荷重を受けるはりの解析, 土木学会論文報告集, 第316号, pp.11-21, 1981年12月。
- 10) 岡林隆敏・浦川剛・吉田啓三：相関のある不規則分布荷重を受けるはりの解析, 土木学会論文報告集, 第341号, pp.155-162, 1984年1月。
- 11) 岡林隆敏・河角省治・吉田啓三：不規則な初期たわみを有する柱の確率論的解析, 構造工学論文集, Vol.40A, pp.645-655, 1994年3月。
- 12) T.W.Gray, J.Glynn (榊原進訳)：Mathematica ビギナーズガイド, 株式会社トッパン, 1992年10月。
- 13) R.Maeder (井川俊彦訳)：Mathematica プログラミング技法, 株式会社トッパン, 1992年3月。
- 14) マーサ L.アベル, ジェームス P.ブレイセルトン (川瀬宏海, 五島奉文訳)：Mathematica 演習, 富士ソフトウェア株式会社, 1993年5月。
- 15) D.M.Etter: Engineering Problem Solving with MATLAB, PRENTICE HALL, Inc..
- 16) K.Ogata: Solving Control Engineering Problem with MATLAB, PRENTICE HALL, Inc..
- 17) K.Ogata: Designing Linear Control Systems with MATLAB, PRENTICE HALL, Inc..
- 18) 古賀雅伸・古田勝久, 数値処理と数式処理を融合した制御系 CAD 言語 MATX, 計測自動制御学会論文集, Vol.29, No.10, pp.1191-1198, 1993年10月。
- 19) N.I.Ioakimidis, Application of Mathematica to the direct semi-numerical solution of finite element problems, Comput. Struct. Vol.45, pp.833-839, 1992.
- 20) 大塚宣子・坂田力・黒木健実, 数式処理言語 Mathematica の構造解析への応用, 土木学会西部支部講演概要集, 1, pp.38-39, 1994年3月。

(1994年9月14日 受付)