

熱力学的定式化に基づく変形の局所化の理論と解析手法

Theory and analysis for strain localization based on thermomechanical formulation

井上 純哉*、堀井 秀之**

*東京大学大学院工学系研究科土木工学専攻
**Ph.D 東京大学助教授 東京大学工学部土木工学科

Localization of displacement is an important problem in engineering world²⁾³⁾, because it is a phenomenon which occurs in different types of materials and has an effect on strength of materials and structures. In localization of displacement, loss of mechanical energy will change from the one which continuously occurs all over the material to the one which occurs locally, due to the influence of interference between micro structures¹⁾. This article suggests generalized theory and analysis of localization of displacement through consideration of simple spring-friction model.

Key Words : localization of displacement, energy loss, micro structure

1. まえがき

変形の局所化現象は異なる材料において共通に起こる現象であり、材料・構造物の強度を支配しているため、工学的に重要な問題である。変形の局所化現象においては、微視的構造が相互に干渉することにより、力学的エネルギーの散逸(非弾性変形やクラックの進展)が材料全体で連続的に発生するモードから局所的に起こるモードに移行するものと考えられる。本研究は、簡単なばね-摩擦モデルでの考察を拡張することにより、一般性のある変形の局所化の理論と解析手法を提案するものである。

2. 例題:ばね-摩擦モデル

2.1 ばね-摩擦モデル

図1に示すようなばねと摩擦要素を組み合わせた系を考える。

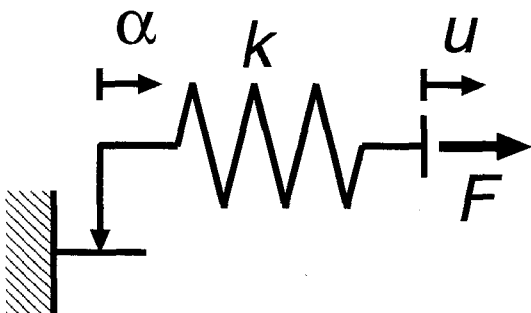


図1. ばね-摩擦モデル

ここで、 α を摩擦面のすべり量、 u を載荷点での変位

とし、摩擦力 f がすべり量 α の関数として $f = f_0 + A\alpha$ と表されるものとする。また、右端に加える外力 F を制御パラメータとする。この時、次の関係が成り立つ。

$$k(u - \alpha) - F = 0 \quad (1)$$

$$k(\alpha - u) + f_0 + A\alpha = 0 \quad (2)$$

これより、 $u = (F - f_0)/A + F/k$ 、 $\alpha = (F - f_0)/A$ となる。また、この解の安定性は停留点の近傍で微小の変動を与える時、外系よりなされるべき仕事の正負で判定される。

例えば u の微小変動を Δu 、 α の微小変動を $\Delta \alpha$ とすると、外系からされるべき仕事 ΔW は

$$\Delta W = \frac{1}{2}k(\Delta u - \Delta \alpha)^2 + \frac{1}{2}A\Delta \alpha^2 \quad (3)$$

となる。よって $A < 0$ の時この解は停留点の近傍で、ある微小変動を与えられた時に外界に対して仕事をするため、不安定であることが解る。また、変位 u を制御変数とする場合は、 $\Delta u = 0$ であるため微小変動 $\Delta \alpha$ に対する外系の仕事 ΔW は

$$\Delta W = \frac{1}{2}(k + A)\Delta \alpha^2 \quad (4)$$

となる。この時、解 $\alpha = (ku - f_0)/(k + A)$ は $A > -k$ のとき安定であり、 $A < -k$ のとき不安定である。 $u + \Delta u$ 、 $\alpha + \Delta \alpha$ がつりあい式 (1) を満足するものとするれば、 $\Delta u = \Delta \alpha$ となる。これを式 (3) に代入すれば、

$$\Delta W = \frac{1}{2}A\Delta \alpha^2 \quad (5)$$

が得られる。式 (3) の右辺の第一項目は弾性挙動に対するものであり、この項は常に正である。つりあい式を用いれば、この項を消去でき、 ΔW は $\Delta \alpha$ のみを用いて表される。

以上の定式化と等価な問題を考える。

$$I = \frac{1}{2}k(u - \alpha)^2 - Fu + f_0\alpha + \frac{1}{2}A\alpha^2 \quad (6)$$

とすると、 I を停留させる u 、 α は式(1)・(2)の解と一致する。また、曲面 $I(u, \alpha)$ の曲率の符号(すなわち凸か凹か)を調べることは、解の安定性、すなわち停留解に微小変動を与えた時に外系に対してする仕事[式(3)]を調べることと等価である。さらに、つりあい式(1)より $u = u(\alpha)$ を求め、式(6)に代入して

$$I^*(\alpha) = I(u(\alpha), \alpha) \quad (7)$$

を求めれば、解の安定性は曲面 I^* の曲率の主値の符号により判定される。

式(6)は、系の力学的トータルポテンシャルエネルギーと、摩擦などによって失われ熱となる散逸エネルギーの和を表している。ここでは、このエネルギーの和を全エネルギーと呼ぶことにする。境界値問題となるような連続体の問題を含め、一般に全エネルギー I を用いた熱力学的定式化による解は、式(1~4)のような直接的定式化(強形式と呼ぶ)の解と一致する。よって、強形式から等価な変分問題を導くかわりに、熱力学的考察により簡単に全エネルギー I を求めることができる。解の安定性は前述のエネルギー曲面 I の曲率の主値の正負(上に凸か下に凹か)によって判定され、これも物理的直観と一致している。

2.2 二つの摩擦要素を持つモデル：変形の局所化の判定

次に、図2に示すような二つの摩擦要素をばねでつないだ系を考える。ここで、 α_1, α_2 は各々の摩擦面のすべり量、 u を載荷点での変位とし、摩擦力 f_1, f_2 がすべり量 α_1, α_2 の関数として各々 $f_1 = f_0 + A\alpha_1, f_2 = f_0 + A\alpha_2$ と表されるものとする。ただし、ここでは $A < k$ とする。

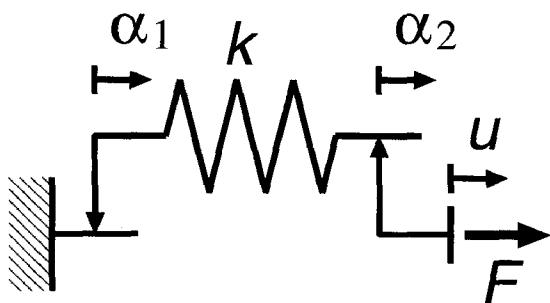


図2. 二つの摩擦面を持つモデル

ここで、変位 u を制御変数とし変化させるとした時、 $A > 0$ の場合は二つのすべり面で同時に同じ速度ですべりが発生するが、 $A < 0$ の場合はどちらかのすべり面ですべりが発生した後、最初にすべりが発生したすべり面のみですべりが進行する事が直観的に分かる。

このことを、先の定式化を用いて説明する。まず、

この系における全エネルギー I は

$$I = \frac{1}{2}k(u - \alpha_1 - \alpha_2)^2 + f_0(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{1}{2}A\alpha_1^2 + \frac{1}{2}A\alpha_2^2 \quad (8)$$

となる。この I を停留させる α_1, α_2 は

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_1} = k(\alpha_1 + \alpha_2 - u) + f_0 + A\alpha_1 = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_2} = k(\alpha_1 + \alpha_2 - u) + f_0 + A\alpha_2 = 0 \quad (10)$$

より、 $\alpha_1 = \alpha_2 = (ku - f_0)/(2k + A)$ となる。また、エネルギー曲面 I の曲率の主値は行列

$$\left[\frac{\partial^2 I}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right] = \begin{bmatrix} k + A & k \\ k & k + A \end{bmatrix} \quad (11)$$

の固有値より $2k + A$ と A となる。この結果、 $A > 0$ では全ての主値が正となるので α_1 と α_2 が同じ値になるこの解は安定であることがわかる。また $A < 0$ では、主値の一つが負になるためこの一様解は不安定となる。

次に、一様解が不安定となる時に、どのような解に落ち着くかを調べる。 $A < 0$ のケースについて、図3にすべりが開始する $u = f_0/k$ におけるエネルギー曲面 $I(\alpha_1, \alpha_2)$ を示す。エネルギー散逸の不可逆性により $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ が許容される。一様解の経路 OA はエネルギー曲面の山の尾根に当たり、不安定な経路である。その結果、可能な経路のうち、 $\alpha_1 = 0$ あるいは $\alpha_2 = 0$ となる経路 $OB \cdot OB'$ いずれかが選択されるものと考えられる。この経路に沿う解は、許される変数 α_1, α_2 の領域内における I の最小値を与えており、更にその解は安定である。

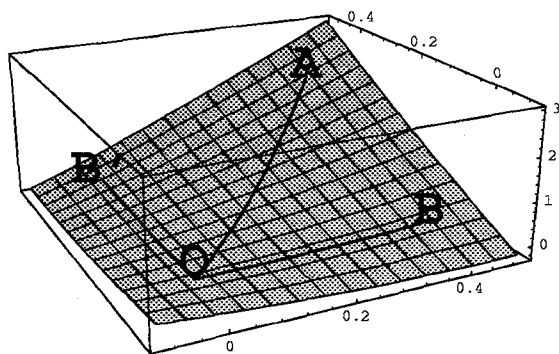


図3. エネルギー曲面

2.3 変形の局所化問題

以上の簡単なモデルの考察を一般化することにより、次のような理論が導かれる。変形の局所化は系の力学的トータルポテンシャルエネルギーと、摩擦などによって失われる散逸エネルギーの和、つまり全エネルギー I の曲率の正負で判定できる。更に、変形の局所化問題は変数の取り得る領域内における I の制約着き最小化問題に帰着される。

次章では、以上の変形の局所化の理論を連続体に適用した例を示す。

3. 連続体における変形の局所化の解析

3.1 すべり面のある連続体

土の様に、Mohr-Columb の破壊条件を満たす材料を考える。材料は最大せん断応力 τ がせん断強度 $c_0 + \sigma \tan \phi$ に達するまでは線形弾性体であり、 $\tau = c_0 + \sigma \tan \phi$ で最大せん断力方向にすべり面が発生し、その後せん断応力 τ はすべり量 α の関数として $\tau = (c_0 + A\alpha) + \sigma \tan \phi_0$ となるものとする。また、簡単のためダイレーションシーは無いものとする。

このような問題に対して、連続体理論の定式化を行うことは可能である。せん断応力がせん断強度に達した領域にはすべり面を連続分布させる。全エネルギー I は変位場 $u(x)$ とすべりの分布密度 $\alpha(x)$ の関数として与えられる。その様な連続体理論を離散化し、解析するというのが一般的な方法であろう。しかし、すべり面が連続分布する解が不安定となる時、必ず一本または有限個のすべり面に局所化することが分かっている。そこでここでは連続体理論を定式化することなく、直接離散化させた問題を考え、解析手法を構築することを試みる。

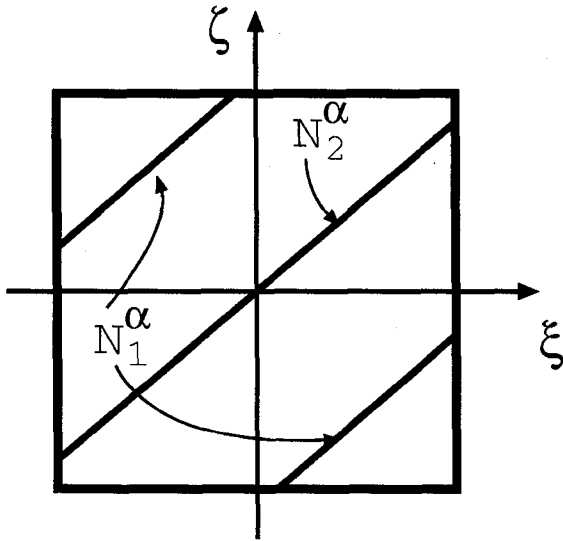


図 4. 要素内のすべり面

いガウス点での応力を用いた。三本のすべり面を考えるのは、すべり面の幾何学的連続性を考えるためである。つまり、図 5 に示すような要素内に一つしかすべり面を持たない、二つの隣り合った要素があった時、これらの要素を横切るようなすべり面を考えることが出来ない。そこで、図 6 に示すように要素内に三つのすべり面を持った要素を考えることにより、隣り合った要素を横切るようなすべり面を考えることが可能となるわけである。

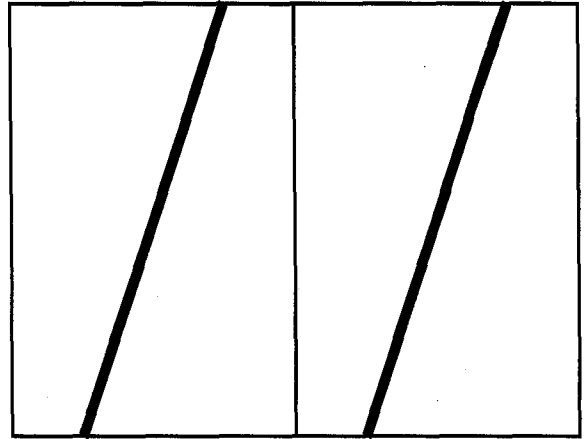


図 5. すべり面が一つ

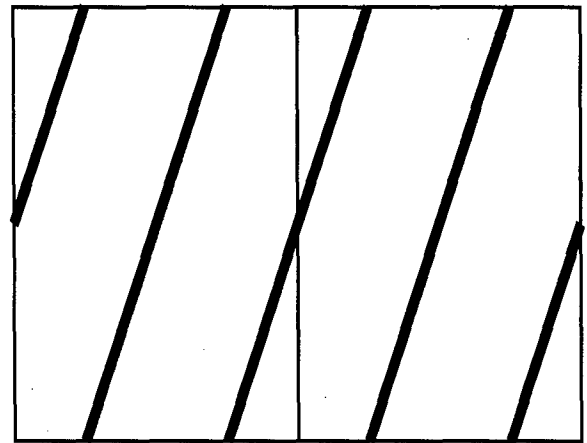


図 6. すべり面が三つ

すべり面でのすべり量を α_i とし、すべり量に対する変位場を図 7・8 に示す様な形状関数 $N^\alpha(\xi, \eta)$ で補間した⁴⁾。

形状関数 $N_1^\alpha(\xi, \eta)$ はすべり面の上側にある節点を 3, 4 とした時、

$$\text{上側では } N^\alpha = (1 - \eta) \quad (12)$$

$$\text{下側では } N^\alpha = -(1 - \eta) \quad (13)$$

となる形状関数である。

3.2 有限要素解析

本解析では四節点四角形要素を使用し、せん断応力がせん断強度に達した要素に対して、破壊条件を満たした方向に図 4 に示すようなすべり面が発生するものとした。この時、要素内に三本のすべり面を考えることにし、破壊条件に用いる応力は、すべり面に最も近

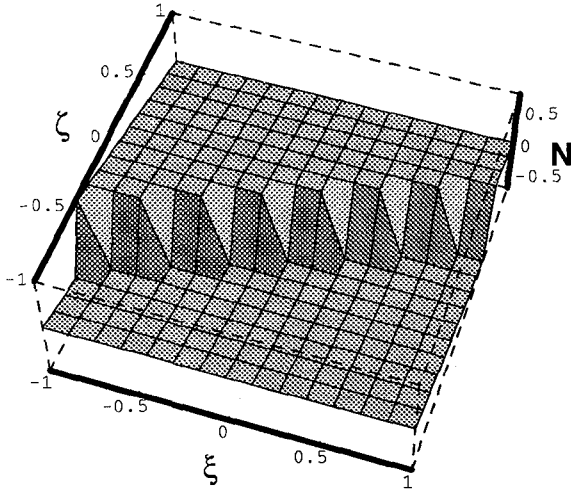


図 7. N_1^α

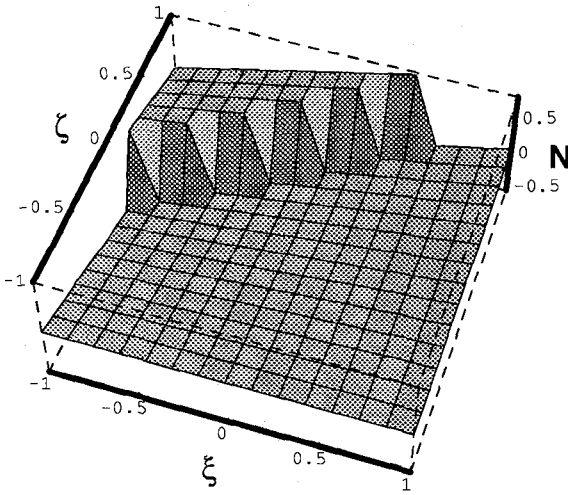


図 8. N_2^α

形状関数 $N_2^\alpha(\xi, \eta)$ はすべり面を挟んで節点 3 と節点 1, 2, 4 がむかいあうとした時に

$$\text{節点 3 の側では } N^\alpha = 1 - N_3 \quad (14)$$

$$\text{反対側では } N^\alpha = -N_3 \quad (15)$$

となるような形状関数である。ここで、 N_3 は節点 3 に関する形状関数である。

この材料の各要素内でのトータルポテンシャルエネルギーは

$$\Pi_i = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma(\varepsilon - \varepsilon_\alpha) d\Omega \quad (16)$$

である。また、摩擦による散逸エネルギーは

$$T_i = \sum (c_0 + \sigma \tan \phi) l_j \alpha_j \quad (17)$$

ただし、 l はすべり面の長さである。

となる。よって各要素ごとの全エネルギー I_i は

$$I_i = \Pi_i + T_i \quad (18)$$

となる。よって、各要素ごとの全エネルギーの和である材料全体の全エネルギーは

$$I = \sum I_i \quad (19)$$

として得られる。このようにして得られた、全エネルギーを変微分することで適当な要素分割に対して次の式 (20) が求まる。

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\alpha} \\ K_{\alpha u} & K_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_u \\ f^\alpha \end{Bmatrix} \quad (20)$$

よって、この材料の停留点 $\{u, \alpha\}$ は式 (20) の解として求まる。また、一様解の安定性は行列

$$\left[\frac{\partial^2 I}{\partial u_i \partial u_j} \right] = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\alpha} \\ K_{\alpha u} & K_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \quad (21)$$

の固有値の正負を調べることにより判定できる。この行列の固有値はエネルギー曲面 $I(u, \alpha)$ の曲率となっている。しかしここでは、直接式 (21) の固有値を調べることはせず、式 (5) から式 (7) の誘導と同様に、つりあいの式の解

$$u = u(\alpha) = K_{uu}^{-1} (F_u - K_{u\alpha} \alpha) \quad (22)$$

を式

$$K_{\alpha u} u + K_{\alpha\alpha} \alpha = f^\alpha \quad (23)$$

に代入して得られる α のみの式における係数行列

$$[K^\alpha] = [K_{\alpha\alpha} - K_{\alpha u} K_{uu}^{-1} K_{u\alpha}] \quad (24)$$

の固有値を調べることで解の安定性を調べることにする。これは、エネルギー曲面 $I^*(\alpha)$ の曲率の主値である。この操作により、すべり面同士の相関、つまりどのすべり面とどのすべり面が一緒にすべると不安定になるかが明白になるのである。

固有値が全て正である場合は、前述の通り解は安定であり、全てのすべりの生じる可能性のあるすべり面で、すべりが進行する。一方、負の固有値が生じた時、一様解は不安定となり変形 (すべり面) の局所化が発生する。この時、問題はすべり変位 α_i の取り得る領域 $\alpha_i \geq 0$ における全エネルギー I^* の最小化問題となる。この場合、最小値は領域境界、つまりいくつかのすべり変位が 0 となる領域において実現される。さらに、解の選択 ($\alpha_i \neq 0$ となるすべり面) においてはすべり面の幾何学的連続性を考慮しなくてはならない。

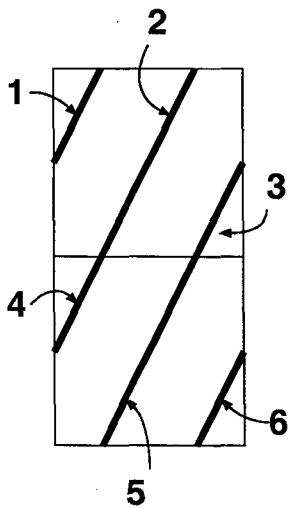


図 9. 幾何学的連続性

すべり面の幾何学的連続性とは、隣り合った要素内のすべり面のうち、どのすべり面とどのすべり面が接続して一つの大きなすべり面を形成する可能性があるかということである。つまり、図 9 に示すような二つの要素があるとする、すべり面 2 は 4 とは接続することが出来るが、すべり面 5, 6 とは接続できない。同様にすべり面 3 は 5 とは接続可能であるが、4, 6 とは不可能であるということである。

3.3 解析例

今この材料の二軸圧縮試験を考え、問題を図 11 に示すように三種類の異なった大きさおよび形のメッシュに対して、図 10 に示すように σ_2 一定で、 σ_1 方向に変位制御で載荷するという境界条件を与え解析をした。なお、三つのメッシュ分割全てで境界条件および破壊条件は同じ値にし、材料の上面での変位の増分を一定にして計算を行った。なお、最大せん断応力がせん断強度 $c_0 + \sigma \tan \phi_0$ に達した時、すべり面が発生する可能性があるものとする。この時、応力はすべり面に一番近いガウス点のものを使った。

図 11 に示すメッシュを用いて実際に行列 $[K_{\alpha\alpha} - K_{\alpha u} K_{uu}^{-1} K_{u\alpha}]$ を計算した結果、全てのメッシュ分割において $A \geq 0$ の時は固有値は全て正であった。これは、全てのすべり面が同時にすべることが安定に起こることを意味している。つまり、図 12 に示すように (○が滑べりが発生するすべり面である) 材料全体で摩擦すべりが進行することが解る。また、 $A < 0$ の時は全てのメッシュ分割において負の固有値が存在した。このことは図 12 の様な解が不安定であり変形が局所的に発生することを意味している。次に、 $A < 0$ の場合、 $\alpha > 0$ という条件のもとで I の最低点を求めることで、すべりが進行するすべり面と、単に弾性除荷されるすべり面を分別することができる。すなわち、 α の n 次空間

の第一象限の境界の何処に I の最低点があるかを調べればよいのである。

Displacement Control

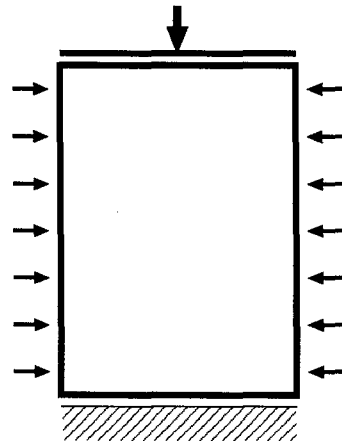


図 10. 境界条件

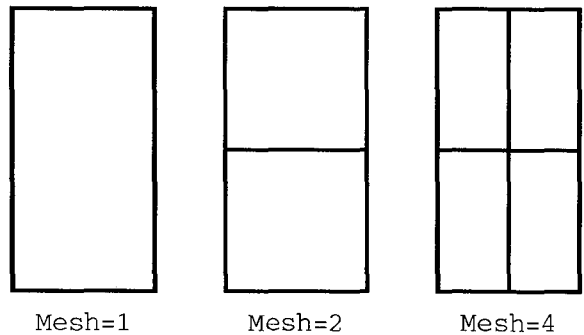


図 11. メッシュ分割

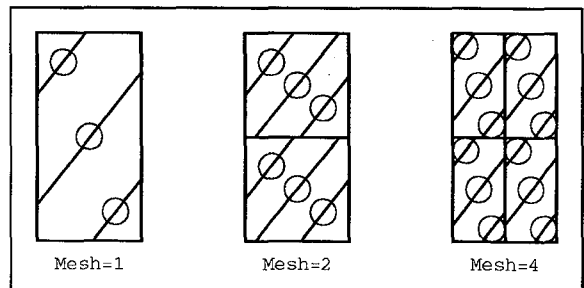


図 12. $A \geq 0$

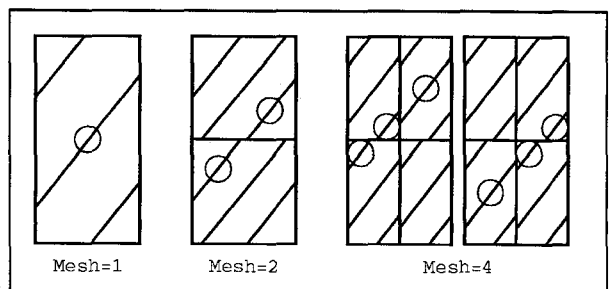


図 13. $A < 0$

以上の計算の結果、図 13 に示すように全てのメッ

シュ分割において、すべり面が材料中央に一つできるモード分岐解析の結果として得られた。このことは、このような境界条件の下では、材料中央にすべり面が一つできるモードが安定な経路として選ばれることを意味している。また、図14~16のように荷重沈下曲線もほぼ同じであった。さらに、除荷が起こる $A < 0$ の状態で分岐解析をせずに式(20)で求まる停留点を辿った解と、分岐解析を行った時の解を比較すると、図14~16のように全てのメッシュ分割において停留解は分岐解析の解よりも大きな値を示した。

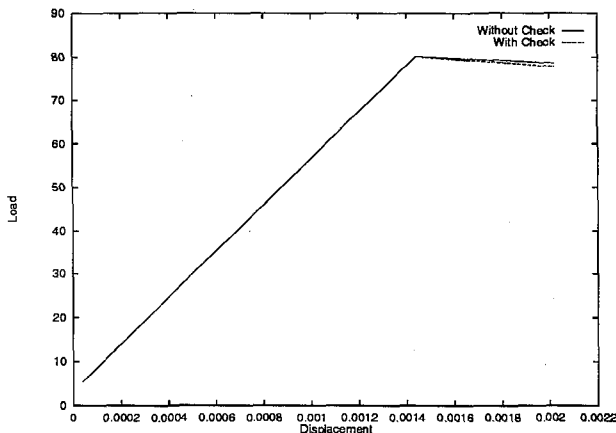


図14. 荷重沈下曲線(メッシュ数1)

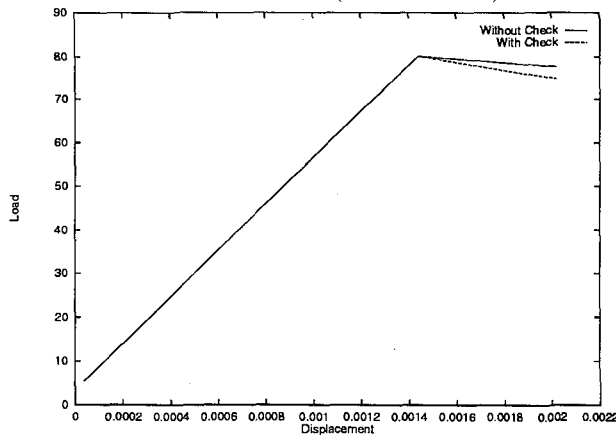


図15. 荷重沈下曲線(メッシュ数2)

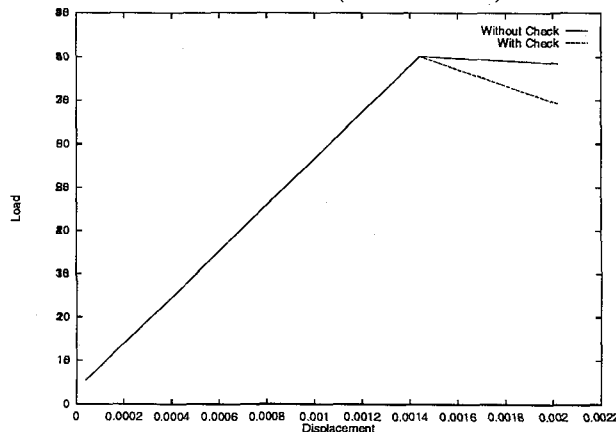


図16. 荷重沈下曲線(メッシュ数4)

4. まとめ

本研究では、簡単なモデルでの考察を拡張することにより、トータルポテンシャルエネルギーと散逸エネルギーの和である、全エネルギーの曲面の曲率を調べることで変形の局所化を予測し、さらに、全エネルギーが最小となる経路を辿って変形の局所化が進行するという、一般性のある変形の局所化の理論を提案した。

次に、その理論をすべり面を持った連続体に応用することによりその理論の有効性を示し、同時にその様な不連続面を有する材料の解析手法を提案した。本研究で提案する変形の局所化理論は一般性の高いものであり、力学的エネルギーの散逸が局所化する、コンクリートの亀裂などのような多くの現象に適用できるものと考えられる。

参考文献

- 1) Q.S.Nguyen. 1987. Bifurcation and Post-Bifurcation Analysis in Plasticity and Brittle Fracture, J.Mech.Phys.Solids, Vol.35, No.3, pp.303-324
- 2) Viggo Tvergaard and Alan Needleman. 1993. Shear band development in polycrystals. Proc.R.Soc.Lond. A443, 547-562
- 3) Q.S.Nguyen. Uniqueness, Stability and Bifurcation of Standard Systems.
- 4) R.G.Wan, D.H.Chan and N.R.Morgenstern. 1990. A finite element method for the analysis of shear bands in geomaterials. Finite Elements in Analysis and Design, 7, 129-143.

(1994年9月14日受付)