

散逸関数を用いた構成則理論の粒状体への応用

THEORY OF CONSTITUTIVE LAW BASED ON DISSIPATION FUNCTION
AND ITS APPLICATION TO GRANULAR MATERIALS

岸野 佑次

Yuji KISHINO

工博 東北大学助教授 工学部土木工学科 (〒980-77 仙台市青葉区荒巻字青葉)

The author has proposed a constitutive theory for frictional materials. The theory has capability to reflect dissipation mechanism in terms of the dissipation condition, which is a generalization of the yielding condition. The dissipative strain-rate in this theory consists of two parts; the primary and subordinate strain-rates. The subordinate strain-rate, a generalized form of instantaneous dilatancy, is related anisotropically to the primary strain-rate, while the total strain-rate is determined with an energetically-derived flow rule as well as the associated consistency condition. In this paper, after the brief summarization of this theory, a constitutive model for granular materials derived from this theory is presented. This example exhibits a typical stress-strain curve of dense sands with strain-softening. With this example, this paper gives considerations on this theory, which includes comparison with the classical plasticity theory, the representation of induced anisotropy, the stress-dilatancy equation for granular materials and the strain-softening.

Key Words : constitutive law, dissipative function, constraint condition, granular materials

1. まえがき

材料の非弾性的挙動においては、変形が材料内部のエネルギー散逸を伴う何らかのモードに支配されて生じる。したがって、非弾性的挙動を力学的に合理的に定式化するためには、材料内部における散逸機構を適切にモデル化する必要がある。破壊力学におけるモデル化された破壊モードによる解析はその良い例であろう。脆性破壊以外においても、このような散逸変形モードを考慮することは合理的な非弾性構成則を導く上で重要なことであると考えられる。従来より、摩擦性材料については、その散逸機構を直接的・間接的に考慮した構成則の誘導が種々行われている。¹⁻⁵⁾ ただし、それぞれ着目点が異なることから、2次元である、^{1,3,5)} 体積変化がない、^{1,4)} 等方性を仮定している、^{2,4)} 等々の制約がある。

一方、硬化・軟化までを考慮した理論構成とはなっていないが、材料内部に生じる非弾性的エネルギーを散逸関数として反映させ、これをもとに構成則理論を組み立てようとする試みがなされている。^{6,7)} 散逸関数は材料の非弾性的性質をモデル化する上で重要である。これは、塑性論における塑性ポテンシャルが単に塑性ひずみの方向を数学的に決定するためのものであるのに比し、散逸関数は材料の散逸機構に基づく変形モードが生じる場合の散逸エネルギーという物理的な意味を有しているからである。弾性部分は弾性ひずみエネルギー、散逸部分は散逸関数という形で、それぞれ、エネルギー的にとり扱うことは合理的であると考えられる。

ところで、従来の金属塑性論においては、塑性体積ひずみがないとする仮定が設けられている。一方、Rudnickiら²⁾ は体積変化を伴う地盤材料の流動則を定めるために金属材料の J_2 流動則を拡張し、偏差部分は J_2 流動則に従い、体積ひずみ速度はひずみ速度テンソル偏差部分の絶対値に比例するという仮定を設けた。金谷⁴⁾ は、ダイレイタンシーに抵抗する応力成分を拘束応力と呼んで他の成分と区別し、粒状体の3次元の変位速度場の研究を行った。また、佐武⁸⁾ は非等方的な偏差ひずみの一般的分解を行うための提案を行った。拘束条件はこのように分離された成分間に拘束を与え、散逸変形モードを規定するものであり、流動則や硬化・軟化則を与える前提として、あらかじめ非弾性構成則の一部として導入しておく必要があると考えられる。

以上のような背景の下に、著者は摩擦性材料の構成則理論を提案した。⁹⁾ この理論はまず、散逸ひずみを主・従2つの部分に分けて考え、両者の間に拘束条件を導入した。これにより、ダイレイタンシーの一般化した表現を可能とした。また、流動則の誘導においては、散逸仕事速度に対するエネルギー的条件としての意味をもつ散逸条件を用いた。本論文においては、この理論の概要を整理して示した後、とくにひずみ軟化を含む粒状体の構成式に応用した例を示した。また、本理論の塑性論との比較、誘導異方性および軟化の取り扱い、粒状体の構成則などについて種々の考察を行った結果を示した。

2. 摩擦性材料の構成則理論

ここでは、著者の提案した構成則理論⁹⁾の要点を整理して示す。本理論は、流動則を散逸関数に基づくエネルギー的条件に基づいて決定するところに特徴がある。また、誘導異方性の取り扱いを容易にした。本理論ではエネルギー散逸を伴うひずみを散逸ひずみと称する。

(1) 散逸変形モード

一般に、不可逆的な内部構造変化を伴う材料の非弾性的変形は、材料の種類や作用応力のレベルに応じた固有の散逸変形モードに支配されて生じると考えることができよう。これは、材料の破壊が特定の破壊モードに支配されることと同様である。ここでは、このような散逸変形モードを導入するための変形の分解について記す。

まず、ひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ を弾性ひずみ速度 $\dot{e}$ と散逸ひずみ速度 $\dot{d}$ とに分け、

$$\dot{\epsilon} = \dot{e} + \dot{d} \quad (1)$$

と表わす。以下、構成式を速度型で誘導するが、とくに時間微分としての実質的な意味はないものとする。弾性ひずみ速度については応力速度 $\dot{\sigma}$ との間に通常の弾性的関係を仮定する。

つぎに、散逸ひずみ速度について、

$$\dot{d} = \dot{d}' + \dot{d}'' \quad (2)$$

のように、散逸変形に主体的に関与する主散逸ひずみ速度 $\dot{d}'$ と、これに従属して生じる従散逸ひずみ速度 $\dot{d}''$ とに分解されると考える。さらに、主散逸ひずみ速度テンソルと従散逸ひずみ速度テンソルは次のように直交するとする。

$$\dot{d}' : \dot{d}'' = 0 \quad (3)$$

ここに、記号 ':' はテンソルの複内積を表わす。

このような分解の典型的な例は、金属塑性論における偏差ひずみと体積ひずみの分解である。この場合、後者の従散逸ひずみは零である。これに対して、粒状体において同様の分解を適用した場合、せん断に伴っていわゆるダイレイタンスが生じ、従散逸ひずみは零とはならない。ここでは、主・従散逸ひずみ速度のひずみ速度空間における方向を n , l と表わし、偏差ひずみと体積ひずみの分解を一般化することとする。 n , l は単位テンソルを表わし、次式を満足する。

$$n : n = 1, \quad l : l = 1, \quad l : n = 0 \quad (4)$$

一般に、従散逸ひずみは零とはならないので、主・従散逸ひずみ速度間に次の拘束条件を仮定する。

$$\dot{d}' = n \dot{\alpha}, \quad \dot{d}'' = C(\sigma, n, \alpha) l \dot{\alpha} \quad (5)$$

ここに、 α は

$$\alpha = \int \dot{\alpha} dt \quad \dot{\alpha} = \dot{d} : n \quad (6)$$

と定義される量であり、散逸変形の進行を表わすパラメータとして用いられる。また、 $C(\sigma, n, \alpha)$ は主散逸ひずみ速度と従散逸ひずみ速度の間の比を表わすための関数であり、これを拘束関数と称する。以上の定義式を用いれば、散逸ひずみ速度は次式のように表わされる。

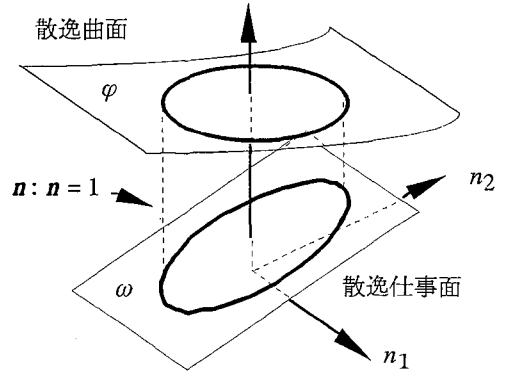


図-1 散逸ひずみ速度空間

$$\dot{d} = (n + Cl) \dot{\alpha} \quad (7)$$

以後、散逸変形に伴って生じる量は、 $\dot{\alpha}$ で除し、単位の主散逸ひずみあたりの量として表示する。

(2) 散逸仕事と散逸条件

材料要素の変形に伴って内部応力のする仕事の中、散逸変形に対応する部分を散逸仕事と称する。散逸仕事速度は次式のように与えられる。

$$\sigma : \dot{d} = \omega \dot{\alpha} \quad (8)$$

ここに、

$$\omega = \sigma : (n + Cl) \quad (9)$$

は単位の主散逸ひずみあたりの散逸仕事を表わす。 ω は n の値によっては負にもなり得るが、散逸変形の不可逆性より、実際に生じる n に対しては正である必要がある。ここで、主散逸ひずみ速度の方向が n の散逸変形が生じる条件としてつぎの2つの条件を仮定する。

散逸条件①: ω が、応力状態、変形履歴、 n により定まるある一定のエネルギーレベルに達していること。

散逸条件②: 条件①を満たすものは n 以外にはないこと。

散逸条件①におけるエネルギーレベルは、次の散逸関数と呼ばれる関数により与えられると仮定する。

$$\varphi = \varphi(\sigma, n, \alpha) \geq 0 \quad (\text{for } n : n = 1) \quad (10)$$

よって、散逸条件①は

$$f = \varphi - \omega = 0 \quad (\text{for } n : n = 1) \quad (11)$$

と表わすことができる。この式における f は応力と散逸変形パラメータを現在の状態に固定して考えると、 n の関数となる。

この様子を散逸ひずみ速度空間上に表示すると、図-1 ようになる。上向きの軸は単位の主散逸ひずみあたりの散逸エネルギーを表わす。散逸関数を表わす面は散逸曲面、単位の主散逸ひずみあたりの仕事を表わす平面は散逸仕事面と表示されている。図-1の場合、 $n : n = 1$ となる全ての n に対して $f > 0$ で、散逸曲面と散逸仕事面の共通点はない。したがって、散逸条件

が満たされず、変形は弾性変形のみよりなる。この弾性状態より载荷が進み、はじめて $f=0$ を満たす際には ω と φ とは $n:n=1$ 上で接することになる。すなわち、上記の第2の散逸条件も満たされる。これ以降の散逸変形は、同条件より ω と φ が $n:n=1$ 上で接する状態を保ったまま推移することになる。なお、実際に生じる n 以外に対しては $f>0$ であるので、 ω と φ が接する条件は f が極小として満たされる。

(3) 流動則

散逸条件②より流動則が得られる。すなわち、式(5)を付帯条件 (l は固定) とする式(11) f の極値条件より、次の流動則が誘導される。⁹⁾

$$n = \frac{\tau - (\tau:l)l}{\tau:n} \quad (12)$$

ここに、

$$\tau = \sigma - \frac{\partial \varphi}{\partial n} + (\sigma:l) \frac{\partial C}{\partial n} \quad (13)$$

一般に、 τ は n の関数であるので、式(12)は n を求めるための陽な式とはなっていない。そこで、以後、 C と φ が n に依存せず、

$$C = C(\sigma, \alpha), \quad \varphi = \varphi(\sigma, \alpha) \quad (14)$$

とおくことができる場合について考える。このとき、

$$\tau = \sigma \quad (15)$$

である。ここで、

$$\sigma' = (\sigma:n)n, \quad \sigma'' = (\sigma:l)l \quad (16)$$

を用いれば、式(12)より流動則は次式で与えられる。

$$n = \frac{\sigma - \sigma''}{\sigma:n} \quad (17)$$

载荷の際に主散逸ひずみのする仕事は正であると仮定できるであろう。このとき、上式の分母は

$$\sigma:n = \sqrt{\sigma:\sigma - \sigma'':\sigma''} \quad (18)$$

と表わされ、右辺に n が含まれない形となる。

式(16), (17)より次式が得られる。

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' \quad (19)$$

流動則により n が定まった後は、一般に、 C , φ および式(9)の ω は σ と α で表わされるので、前節の2つの散逸条件を統合した散逸条件を改めて次式のように表わすことができる。

$$f = f(\sigma, \alpha) = 0 \quad (20)$$

散逸が生じない状態は $f>0$ として判定されることになるので、もし、 f の符号を変えれば、 f は塑性論における降伏関数と同様の役割を果たすことになる。

(4) 硬化・軟化則

前節において流動則を誘導する際には、 f に含まれる l は一定としたが、硬化・軟化則を決定するためには、 $l = l(\sigma, \alpha)$ として誘導異方性を考慮した定式化を行う。散逸が継続して生じるためには、散逸条件式(20)を満たし続ける必要がある。すなわち、式(20)の時間微分をとることにより、

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = 0 \quad (21)$$

であるので、次の硬化・軟化則を得る。

$$\dot{\alpha} = \frac{m:\dot{\sigma}}{D} \quad (22)$$

ここに、

$$m = - \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial \sigma:n}{\partial \sigma} + \sigma:l \frac{\partial C}{\partial \sigma} + C \frac{\partial \sigma:l}{\partial \sigma} - \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \quad (23)$$

$$D = \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \sigma: \left(\frac{\partial n}{\partial \alpha} + l \frac{\partial C}{\partial \alpha} + C \frac{\partial l}{\partial \alpha} \right) \quad (24)$$

である。

以上より、散逸ひずみ速度は

$$\dot{d} = \frac{(n + Cl)m:\dot{\sigma}}{D} \quad (25)$$

と与えられるが、一般には $m \neq n + Cl$ であり、いわゆる関連流動則型の構成式にはなっていない。ただし、 l , C , φ が全て α のみの関数と考えられる特殊な場合には、 $m = n + Cl$ であり、関連流動則型の構成式を得る。以上より、関連・非関連の区別は、 l , C , φ の関数形に依存しているといえることができる。

3. 粒状体構成則への応用例

ここでは、前章の構成則理論に関して考察するために行った軟化を含む要素試験シミュレーションについて示す。なお、硬化のみのシミュレーション⁹⁾はすでに行っているが、ここに示す例はこれと立上り部分が類似したものとなるように諸パラメータを設定した。

ダイレイタンス現象が応力の変化とともに異方的に生じることを考慮するため、SMP理論^{10,12)}を参考とし、従散逸ひずみ速度 $\dot{d}''$ の方向を表わす単位のテンソル l の主値を次式のように仮定する。

$$l_k = \frac{1}{\sigma_k} \left/ \sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{\sigma_3^2}} \right. \quad (k=1,2,3) \quad (26)$$

ここに、誘導異方性の主軸は応力の主軸に一致し、以下座標軸は応力主軸の方向にとることとする。なお、 l の選択は実験事実と適合するように行う必要があるが、例えば等方テンソルとすると非現実的な結果を与える⁹⁾など、現時点では上式以外には適当なテンソルが見出されていない。

本モデルにおける拘束関数 C は、変形パラメータ α のみの関数とし、単位の主散逸ひずみあたりの散逸仕事を次式のようにおく。

$$\omega = \sigma:n + C(\alpha) \sigma:l \quad (27)$$

また、散逸関数については、次式を仮定する。⁹⁾

$$\varphi = (M - K C(\alpha)) \sigma:l \quad (28)$$

この散逸関数はRoscoeらの散逸関数¹¹⁾を一般化したものであり、等方応力の代わりに従散逸ひずみ方向の応力 $\sigma:l$ に比例（ただし、係数は従散逸ひずみによって変化）して散逸が生じるとした。

C と φ は応力 σ と変形パラメータ α のみの関数

であるので、流動則は式(17)により定めることができる。
すなわち、主散逸ひずみ速度 $\dot{d}'$ の方向を表わす単位
のテンソル n の主値は次式で与えられる。

$$n_k = \frac{\sigma_k - \frac{3}{\sigma_k} \left/ \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{\sigma_3^2} \right) \right.}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 9 \left/ \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{\sigma_3^2} \right) \right.}} \quad (k=1,2,3) \quad (29)$$

拘束関数は、例えば、せん断応力せん断ひずみ関係が
しばしば用いられる双曲線関数になるように選ぶことも
できるが、⁹⁾ この場合軟化は表現されない。ここでは多
項式を用いることとし、初期载荷の段階から散逸ひずみ
が生じるように次式を仮定する。

$$C(\alpha) = \frac{M}{1+K} - c_1 \alpha + c_2 \alpha^2 - c_3 \alpha^3 + c_4 \alpha^4 \quad (30)$$

以上の仮定より、散逸ひずみ速度を与える式(25)に含
まれる m および D が、式(23)、(24)より、次のように
算定される。

$$m = \frac{\sigma}{\sigma:n} - \{ M - (1+K)C + \frac{\sigma:l}{\sigma:n} \} \frac{\partial \sigma:l}{\partial \sigma} \quad (31)$$

$$D = -(1+K) \sigma:l \frac{\partial C}{\partial \alpha} \quad (32)$$

ここに、

$$\sigma:l = 3 \left/ \sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{\sigma_3^2}} \right. \quad (33)$$

$$\sigma:n = \sqrt{\sigma:\sigma - (\sigma:l)^2} \quad (34)$$

$$\frac{\partial \sigma:l}{\partial \sigma} = 3l^3 \quad (35)$$

以上より、弾性部分については等方性を仮定すれば、
このモデルにおいては、8つの材料定数 $E, \nu, M, K,$
 $c_1 \sim c_4$ を定めることにより、構成則が確定する。なお、
応力ひずみ関係をたとえば双曲型となるように定めるの
であれば、材料定数の数は6個でよい。⁹⁾

表-1に具体例として用いた諸定数の値を示す。ヤング
率については、値を10倍程度に変えても、応力ひずみ
関係などに大きな変化を生じない。⁹⁾ 以下に、平均応力
 p 一定、主ひずみ差制御の要素試験のシミュレーション
結果を示す。

導いた流動則の基本的な性質を調べるために、主応力)
 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ および主散逸ひずみ速度に対してLodeの
パラメータ

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (36)$$

$$\mu_d = \frac{2\dot{d}_2 - \dot{d}_1 - \dot{d}_3}{\dot{d}_1 - \dot{d}_3} \quad (37)$$

を導入する。金属塑性論の流動則は、つぎのいわゆるシ
ミラリティー則¹³⁾を満足する。

$$\mu_\sigma = \mu_d \quad (38)$$

いま、式(7)、(29)、(30)に基づく流動則について、応力
と散逸ひずみ速度に対するLodeのパラメータの関係を示

表-1 要素試験シミュレーションに用いた諸定数

E : 2,000 kgf/cm ² (196 MPa)	ν : 0.3		
M : 0.55	K : 0.3		
c_1 : 288	c_2 : 159×10 ²	c_3 : 316×10 ³	c_4 : 207×10 ⁴
p : 4 kgf/cm ² (392 kPa)			

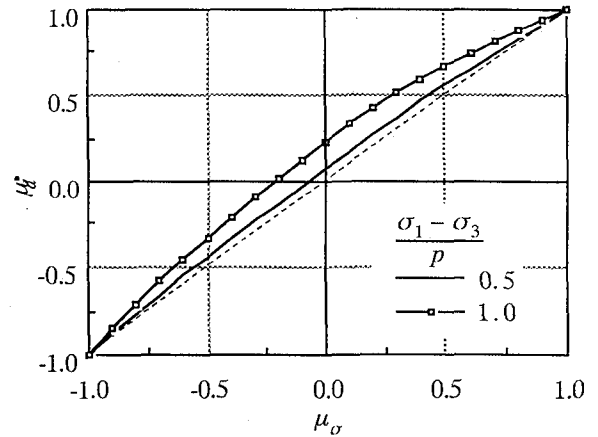


図-2 シミラリティー則との相違

すと、図-2のようになる。同図の破線はシミラリティー
則を示している。この図より、応力比の増加とともにシ
ミラリティー則から離れていく様子がわかる。

以下、3軸圧縮試験 ($\mu_\sigma = -1$) および3軸伸張試験
($\mu_\sigma = 1$) の2つの場合についての要素試験シミュレー
ションの結果を比較している。なお、結果の整理は、正
8面体面における以下の変数を用いて行った。

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (39)$$

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2} \quad (40)$$

$$\dot{\epsilon}_{oct} = \frac{1}{3} (\dot{d}_1 + \dot{d}_2 + \dot{d}_3) \quad (41)$$

$$\dot{\gamma}_{oct} = \frac{2}{3} \sqrt{(\dot{d}_2 - \dot{d}_3)^2 + (\dot{d}_3 - \dot{d}_1)^2 + (\dot{d}_1 - \dot{d}_2)^2} \quad (42)$$

図-3に応力ひずみ関係を示す。3軸伸張試験より3軸
圧縮試験の場合の方がせん断応力が大きいことなど、密
詰め砂などの実験と傾向的に合ったシミュレーション結
果となっている。せん断に関してひずみ制御であるので、
同図に示されているように、軟化部分も算定することが
できる。図-4にはダイレイタンシー曲線を示す。砂など
の実験結果によく見られる典型的なグラフとなっている。
最大勾配付近でせん断応力がピーク値となる等の傾向も
実際と良く合っている。図-5には主応力比主ひずみ関係
を示した。同一の主応力レベルにおける3軸圧縮・3軸
伸張に対するひずみの大小関係など典型的なものとなっ
ている。図-6には正8面体せん断面における応力比とひ
ずみ速度比の関係を示した。この関係はRoscoeら¹¹⁾の

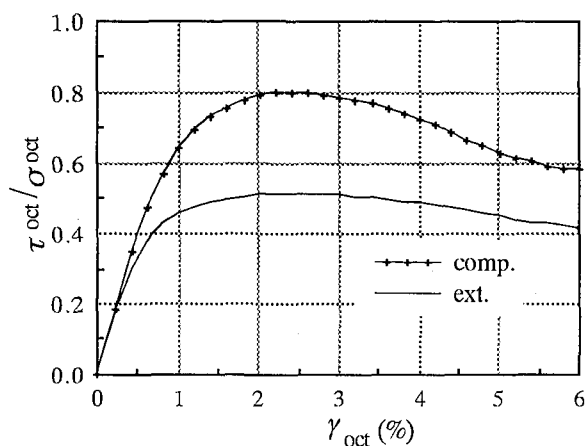


図3 応力ひずみ関係

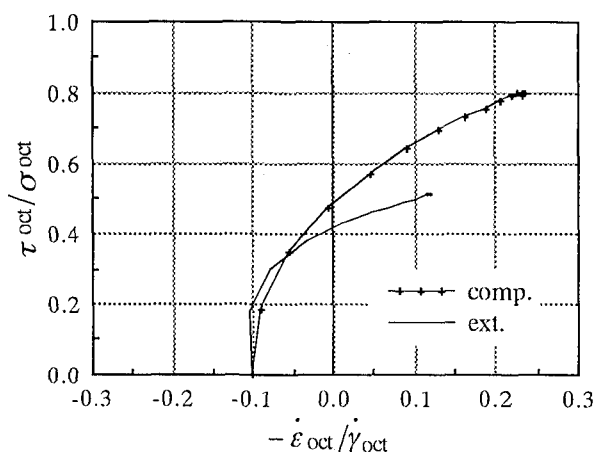


図6 応力比ひずみ速度比の関係

等方的な散逸関数を用いた場合はこのような3軸圧縮・伸張の差を表現することができない。⁹⁾

4. 考察

(1) 塑性論との比較

本論文で用いた構成則理論⁹⁾においては、散逸ひずみを式(5)のように、主・従に分解するが、これは、金属塑性論において、散逸ひずみを偏差ひずみと体積ひずみに分離して後者を零とおくことの一般化である。Rudnickiら²⁾は、地盤材料の変形局所化解析を行うために散逸変形の偏差部分については J_2 流動則を仮定し、体積ひずみ速度についてはせん断ひずみ速度との比を与えて構成則を導いた。この場合の体積ひずみは零ではないが、分解は本論文のような異方性は考慮されていない。

本理論と塑性論の相違点は流動則の誘導部分にある。塑性論においては、降伏関数または塑性ポテンシャルに基づいて流動則が決定される。本論文で用いた方法は、前章にも述べたように、塑性論における降伏関数に相当する関数は流動則が確定した後に定められる。この関数が定まった後、適応の条件より硬化・軟化則を導く過程は同様である。塑性論流動則の中、関連流動則は降伏関数と最大塑性仕事の原理により決定されるが、本理論においては他の散逸変形モードは生じないという散逸条件②、すなわち、式(11)の f (散逸関数の値と散逸仕事速度の差)の最小化の操作がこれに対応している。また、非関連流動則における塑性ポテンシャルに相当する関数は必要としない。

本論文における散逸関数は破壊力学におけるエネルギー解放率と類似点がある。それは、散逸関数が特定のモードの変形が単位量進むために必要なエネルギーという意味合いを有する点である。したがって、散逸関数には材料内部のエネルギー散逸機構を反映させることも可能であろう。散逸条件①または式(11)は、散逸仕事速度が、散逸関数により定まるエネルギーレベルに等しい、すな

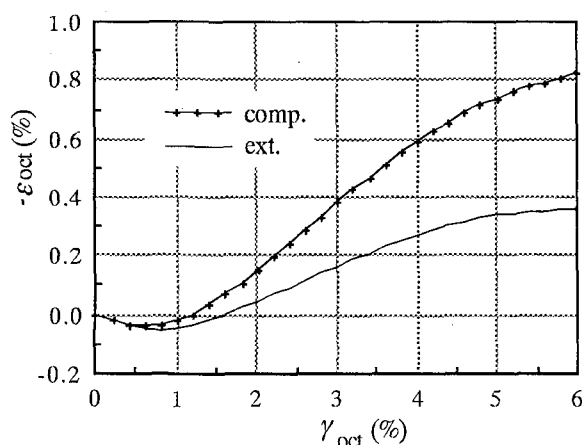


図4 ダイレイタンスー曲線

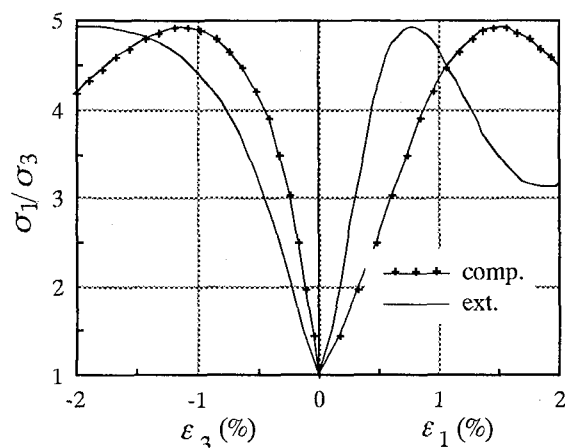


図5 主歪応力比関係

わち、外部仕事は内部の散逸エネルギーに等しいというエネルギーに関する平衡条件を表わしている。このように、本理論はマイクロメカニクスなどと連携することも可能であるように思われる。

硬化・軟化則を導入するに当たって、塑性論においては降伏関数に硬化パラメータを導入して、適応の条件を適用することになる。本論文の方法は式(10)の散逸関数または式(5)の拘束関数を変形パラメータの関数として硬化・軟化則を求めることになる。本文で示した粒状体への応用例においては、拘束関数のみを変形パラメータの関数として、硬化・軟化則を導入した。拘束関数についても、散逸関数と同様にマイクロメカニクスにより定められることが望まれるが、巨視的な実験結果に合うように定めることも必要になるであろう。このことは、弾性体においてある方向のひずみとこれに直交する方向のひずみの間の比、すなわちポアソン比を決定することに類似している。

(2) 誘導異方性について

式(17)は、偏差応力と偏差散逸ひずみ速度の方向が一致するという金属塑性論におけるつぎの Prandtl-Reuss の流動則に拡張したものとなっている。

$$d\epsilon^p = (\sigma - \sigma' : I) d\lambda \quad (43)$$

ここに、 $d\epsilon^p$ は塑性ひずみ増分、 I は単位テンソル、 $d\lambda$ は比例定数である。式(17)の l を

$$l = l_0 \equiv I / \sqrt{3} \quad (44)$$

とおけば、主散逸ひずみ部分に関する限り、式(17)と式(42)は等価となる。

一般に、式(17)は応力および散逸ひずみの l 方向成分を除いた成分 σ' および d' の方向が一致することを表わしている。これを主応力空間で示せば、図-7 となる。すなわち、主応力空間において、応力 σ および散逸ひずみ速度 d の l 一定面に投影したベクトル σ' および d' は同一直線上に描くことができる。 d は d' と l 方向成分 d'' の和であるので、これの l_0 一定面すなわち π 平面上へ投影したベクトル d'_0 は、一般に、 σ を π 平面上へ投影したベクトル σ'_0 とは同一直線上に描くことができない。

したがって、誘導異方性を伴う構成則の π 平面上の成分を用いた表現は複雑である。図-2 のシミュラティール則からのずれは、応力と散逸ひずみ速度を π 平面上へ投影したために生じたものである。 l は応力の変化とともに変化するが、 π 平面 (l_0 一定面) の代わりに、常に l 一定面を考えることにより、誘導異方性が生じて、この面に基づく拡張されたシミュラティール則が成り立つことになる。

(3) 粒状体の応力ダイレイタンスー関係について

式(11)より、粒状体力学で一つの基本式とされるいわゆる応力ダイレイタンスー関係が得られる。散逸関数を

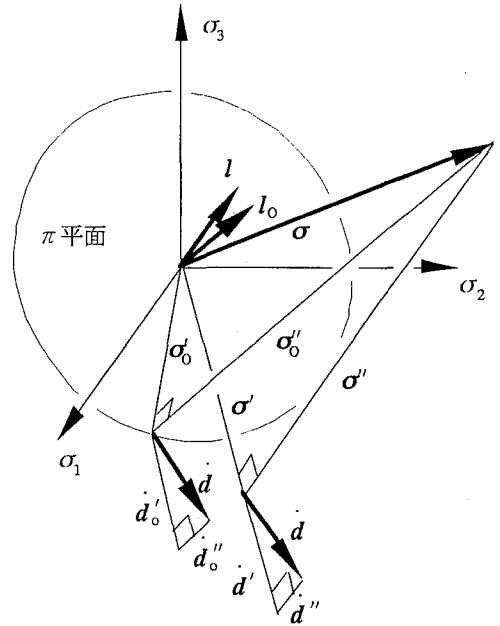


図-7 ひずみ速度ベクトルの π 平面への投影

式(28)のように仮定した場合、正 8 面体せん断面上のパラメータを用いて表現した応力ダイレイタンスー関係は図-6 のようになるが、同図においては 3 軸圧縮と 3 軸伸張とで異なる関係となっている。ただし、同図のひずみ速度には弾性ひずみも加えられており、とくに圧縮側 (同図の左側) では弾性ひずみの影響が大きい。⁹⁾

これに対して、式(11)より、応力と散逸ひずみ速度を n 、 l による主・従成分に分解して求めた一般化した応力比ひずみ速度比間の関係は

$$\frac{\sigma : n}{\sigma : l} = M - (1 + K) \frac{d : l}{d : n} \quad (45)$$

と表わされ、载荷方向に依存しないユニークな関係となる。このような関係式を利用することで構成則における材料定数の数を少なくすることが可能となる。

このように、本理論における応力ダイレイタンスー関係は散逸エネルギーに関する平衡条件式(11)そのものである。また、一般化したダイレイタンスーとして、偏差ひずみに対応する等方的な通常のダイレイタンスーではなく、 n 、 l による主・従成分に分解して求めた式(5)の d'' を用いることにより、式(45)のようなユニークな関係式が得られる。

なお、応用例において l の具体的な成分は式(26)で与えたが、これは SMP 理論^{1,2)} を参考として設けた。SMP 理論においても式(45)と類似の関係式が用いられている。しかし、式(45)の $\sigma : l$ は、SMP 理論と同様に、SMP 上の垂直応力となっているが、 $\sigma : n$ は SMP 上のせん断応力ではない。同様に、 $d : n$ も SMP 上の散逸せん断ひずみ速度ではない。⁹⁾

(4) 軟化について

適応の条件式(21)は硬化・軟化を問わず成立するので、

表-2 硬化および軟化過程における諸量の符号

変形段階	D	$m : \dot{\sigma}$	$\dot{\alpha}$
硬化過程	正	正	正
ピーク時	零	零	不定
軟化過程	負	負	正

求めた構成則を硬化段階のみに適用を制限する理由はない。事実、前章の例に示したように、軟化を含む要素試験シミュレーションを行うことができる。

ここで諸量の符号の変化について考える。まず、式(6)によって主散逸ひずみ速度に基づいて定められる変形パラメータの速度 $\dot{\alpha}$ の正值性が前提となる。これは、散逸仕事は正值であり続けるために必要である。よって、式(22)より、 $m : \dot{\sigma}$ と D とは、表-2のように、同符号である必要がある。3. の例で、粒状体が常に拘束圧の作用下にあり $\sigma : I$ は正であることから、式(32)より、

D の符号の変化は $\frac{\partial C}{\partial \alpha}$ の符号の変化に依存している。

すなわち、軟化が生じるか否かは式(30)の関数形によって定まる。つぎに、式(31)より m は $\frac{\partial C}{\partial \alpha}$ の符号の変化には追従しないので、 $m : \dot{\sigma}$ が符号を変えるためには、少なくとも $\dot{\sigma}$ の成分の一部が符号を変える必要がある。このことから、図-3の応力ひずみ曲線にあるような応力のピーク値が現われることになる。

応力がピークとなる状態では、式(22)の分母分子がともに零となり、変形パラメータの速度 $\dot{\alpha}$ の値は不定となる。このとき、要素シミュレーションが変位制御であれば、 $\dot{\alpha}$ は式(6)によって求めることができる。しかし、一般には、不安定になるので、実際の応用に当たっては注意を要する。

5. あとがき

本文においては、著者の提案した摩擦性材料の構成則を誘導異方性ならびに軟化を含む粒状体の構成式に有効に応用できることを示した。また、提案した構成則理論に関して種々の考察を行った。とくに、理論上ダイレイタンスを非等方的テンソルとして定義し、これを従散逸ひずみとする散逸ひずみの主・従分解が有用であることを示した。また、主散逸ひずみ部分の流動則は金属塑性論における Prandtl-Reuss の条件の拡張であり、異方性を合理的に表現することが可能なことを示した。

本文において用いた構成則理論は今後さらに発展させる必要がある。以下に、今後の主な課題を列挙する。

①散逸関数に基づくエネルギー原理としての理論構成、上下界定理、安定性の考察、②有限変形としての定式化、変形局所化解析のための構成式の誘導、③増分非線形性のとり扱い、式(14)を仮定しない場合の流動則の一般的誘導方法、④散逸変形モードが複合している場合や散逸変形モードが変化する場合のとり扱い、⑤異方性を表現するためのより一般的なパラメータの導入など。

今後、マイクロメカニクスや破壊力学などと連携させて研究を進めたいと考えている。

参考文献

- 1) Spencer, A.J.M.: A theory of the kinematics of ideal soils under plane strain conditions, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.12, pp.337-351, 1964.
- 2) Rudnicki, J.W. and Rice, J.R.: Conditions for localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.23, pp.371-394, 1975.
- 3) Mehrabadi, M.M. and Cowin, S.C.: Initial planar deformation of dilatant granular materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.26, pp.269-284, 1978.
- 4) 金谷健一：粒状体の速度場の理論-関連流動則と特性曲面-, 土質工学論文報告集, Vol.19, No.4, pp.103-112, 1979.
- 5) Nemat-Nasser, S. and Balendran, B.: Micromechanics of flow and failure modes of particulate media over a wide range of strain rates, *Advances in Micromechanics of Granular Materials*, Shen, H.H., Satake, M., Mehrabadi, M., Chang, C.S. and Campbell, C.S. eds., Elsevier, Amsterdam, pp.21-30, 1992.
- 6) Chandler, H.W.: A plasticity theory without Drucker's postulate suitable for granular materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.33, pp.215-226, 1985.
- 7) 岸野佑次：散逸関数に基づく粒状体の流れ則の誘導, 土木学会論文集, No.394/III-9, pp.115-122, 1988.
- 8) Satake, M.: Expression of three-dimensional deviatoric tensor through complex number ω , *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol.37, pp.329-337, 1989.
- 9) 岸野佑次：摩擦性材料の構成則の定式化, 土木学会論文集, No.511/III-30, (掲載予定), 1995.
- 10) 中井照夫, 松岡 元：3主応力下の土のせん断挙動に関する統一的解釈, 土木学会論文報告集, No.303, pp.65-77, 1980.
- 11) Roscoe, K.H., Schofield, A.N. and Thurairajah, A.: Yielding of clays in states wetter than critical, *Geotechnique*, No.13, pp.211-240, 1963.
- 12) Matsuoka, H. and Nakai, T.: Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses, *Proc. of JSCE*, No. 232, pp.59-70, 1974.
- 13) Kachanov, L.M.: Foundations of the theory of plasticity, North-Holland, Amsterdam, 1971.

(1994年9月14日受付)