

材料の強度変動の統計理論

STATISTICAL THEORY ON STRENGTH VARIATION OF MATERIALS

池田 清宏*・室田 一雄**・丸山 久一***・柳澤 栄司****

Kiyohiro IKEDA, Kazuo MUROTA, Kyuichi MARUYAMA, and Eiji YANAGISAWA

*正会員 Ph. D 東北大学助教授 工学部土木工学科 (〒980-77 仙台市青葉区)

**正会員 工博 京都大学教授 数理解析研究所 (〒606-01 京都市左京区)

***正会員 Ph. D 長岡技術科学大学教授 建設系 (〒940-21 長岡市)

****正会員 工博 東北大学教授 工学部土木工学科

This paper introduces a statistical theory on the variation of the strength of materials. The probability density functions of their strength (critical loads) subject to normally distributed initial imperfections are derived for various kinds of critical points based on the asymptotic bifurcation theory. In particular, double bifurcation points of a D_n -invariant system are dealt with by means of the group-theoretic bifurcation theory. In order to insure the validity and adequacy of the present theory, it is applied to stochastic data of the strength of materials, such as the shearing strength of sand and the compressive strength of concrete. A remark on the tensile strength of steel concludes this paper.

Key Words : bifurcation, group-theory, material strength, random initial imperfections, stochasticity, Weibull distribution

1. まえがき

初期不整は材料及び構造系の強度の本質的な不確定要因である。構造特性や材料特性を定めるパラメータの初期不整は確率変数であり、結果として得られる強度も必然的に確率変数となる。材料及び構造系は無限に多くのパラメータを持つために、個々のパラメータの初期不整の影響を調べて行くという方法論では、多大な労力を要することになる。このような本質的な困難を有するために、広範な研究^{1),2),3),4),5),6),7)}がなされてきたにもかかわらず、材料や構造系の強度の確率変動には未解明な部分が数多く残されている。

Koiter⁸⁾は、シェル等の構造系の座屈強度が初期不整の大きさの2/3乗に(初期不整が小さい場合に漸近的に)比例して低下することを明らかにした。この漸近則はその後Thompson・Hunt⁹⁾により体系化された。著者等は、単一の初期不整変数に対するこれらの漸近理論を有限次元へと一般化し^{10),11)}、種々の初期不整が正規分布に従う場合の強度発現の仕組の理論を提案し^{12),13),14)}、シェル等の構造例に適用しその妥当性を検証してきた¹⁵⁾。この理論により、座屈荷重(強度)の確率密度関数が先験的に求まることは、確率論的な議論を行うに際し非常に有利である。しかしこの関数形は座屈荷重を支配する特異点により異なるので、特異点の種類に応じた個別の議論が必要になる。

この論文では文献^{11),14),16)}を再構成することにより、(1)単純分岐点と(2)二面体群 D_n に同変な系の群論的2重分岐点に対する詳細な確率論的な検討を行う。円柱

供試体のように対称性を持つ系は対称性の喪失を伴う対称性破壊分岐現象をおこすことが知られており、その仕組は群論的分岐理論により解明されている¹⁾。二面体群 D_n は、本論文で適用例として取上げる円柱供試体の周方向の対称性を表す群であるので、この群に同変な系を調べることに物理的な必然性がある。この群に同変な系の分岐構造に関しては数多くの研究^{22),20),21),16)}がなされており、完成の域に達している。

著者等は近年砂やコンクリートの円柱供試体の強度発現機構に分岐が大きく関与していることを漸近理論をもとに明らかにしている^{23),24)}。本論文では、これをさらに進めて、砂とコンクリートの強度変動を強度変動理論により記述し、理論の妥当性を示すこととする。最後に鋼材の引張り強さの変動にも言及する。

2. 分岐理論

この節では確率変動する初期不整を持つ材料や構造系の強度変動の漸近的分岐理論^{11),14)}を紹介する²⁾。ある非線形の釣合方程式

$$H(\lambda, u, v) = 0 \quad (1)$$

を考える。ここに λ は荷重パラメータを、 u は N 次元の節点変位(位置)ベクトルを、 v は p 次元の初期不整ベクトルを、 H は十分滑らかな非線形関数をそれぞれ表

¹ 群論や群論的分岐理論の詳細については入門書^{17),18)}や教科書^{19),20),21)}を参照されたい。

² この論文で用いた理論の部分(第2-4章)は著者等の論文^{11),13),14),16)}を和訳し・再構成したものである。

す。この系の接線剛性行列 (Jacobian) を

$$J = J(\lambda, u, v) = (J_{ij}) = \left(\frac{\partial H_i}{\partial u_j} \right)$$

とする。式の誘導を簡略にするために、行列 J は対称であること (すなわちポテンシャル系であること) を仮定する。

ある一定の初期不整ベクトル v に対して、式 (1) の解 (λ, u) は釣合径路を形成する。主径路上の最初の特異点を $(\lambda_c, u_c) = (\lambda_c(v), u_c(v))$ とし、特に完全系の主径路上の特異点を $(\lambda_c^0, u_c^0, v^0)$ と表す (下付き添字 $(\cdot)_c$ は特異点に関する値であることを、上付き添字 $(\cdot)^0$ は完全系に関する値であることをそれぞれ表す)。接線剛性行列はこれらの点で特異となり、特異性条件式

$$\det[J(\lambda_c, u_c, v)] = 0 \quad (2)$$

を満足する。

特異点が M 重特異点である場合には J^0 の M 個の固有ベクトル ξ_i ($i = 1, \dots, M$) を

$$\xi_i^T \xi_j = \delta_{ij}, \quad \xi_i^T J^0 = 0^T, \quad i, j = 1, \dots, M$$

を満足するように選べる (ここに δ_{ij} は Kronecker のデルタである。固有ベクトルが張る空間への射影行列を

$$P = \sum_{i=1}^M \xi_i \xi_i^T \quad (3)$$

と定義する。

荷重パラメータと変位ベクトル u を

$$\lambda_c = \lambda_c^0 + \tilde{\lambda}_c, \quad u = u_c^0 + \sum_{j=1}^N w_j \xi_j \quad (4)$$

と、それぞれ完全系の特異点の値からの増分値として表す。 $\tilde{\lambda}_c$ は座屈荷重 (特異点の荷重) の増分値を、 w_j ($j = 1, \dots, N$) は固有ベクトル方向の増分変位を表す。また初期不整ベクトル v も

$$v = v^0 + \varepsilon d \quad (5)$$

と完全系の値からの増分値として表す。ここに初期不整ベクトル v の増分は、初期不整の大きさを表すスカラー $\varepsilon (> 0)$ とパターンを表すベクトル

$$d = (d_1, \dots, d_p)^T$$

とに分解した。初期不整ベクトル v がランダムに与えられたときの、座屈荷重の変動量に興味がある。そこで初期不整の大きさ ε が小さく、モード d が平均 0、多変数の正規分布 $N(0, W^{-1})$ に従うと仮定する。 W^{-1} はある正定値の共分散行列を表す。

非線形釣合式 (1) から、特異点でも特異とならない $N - M$ 個の固有ベクトルに対応する変数を消去することにより、式 (4) と (5) で定義した増分量に対する M 個の釣合式

$$h(\tilde{\lambda}, w, \varepsilon) = 0 \quad (\text{あるいは } \tilde{h}(\tilde{\lambda}, w, v) = 0) \quad (6)$$

が求まる ($w = (w_1, \dots, w_M)$)。この式は、特に完全系 $v = v^0$ に対しては「分岐方程式」と呼ばれるもので

ある。このように分岐方程式を誘導する手法は工学の分野では「Elimination of passive coordinates⁹⁾」、数学の分野では「Lyapounov-Schmidt 展開^{25), 20), 21)}」と呼ばれる重要な手法である。縮約した式 (6) に対する特異性条件式は

$$\det \left(\frac{\partial h}{\partial w} \right) = 0 \quad (7)$$

となる。このように本理論はある特異点とその分岐モードに着目するという立場を取るの、特異点や分岐モードが変動するような場合には適用できないことには注意を要する。

2.1 漸近理論

初期不整の漸近理論^{8), 9), 10), 11)}により明らかにされたように、初期不整の介在による完全系の座屈荷重の変動量 $\tilde{\lambda}_c$ は初期不整の大きさ ε が十分小さい場合には、縮約した式 (6) とこの式の特異性条件式 (7) を連立して解くことにより

$$\tilde{\lambda}_c = \lambda_c - \lambda_c^0 \sim C(d) \varepsilon^p \quad (8)$$

と表される (この式の誘導の詳細については文献^{9), 10)}を参照されたい)。この式中の指数 p と係数 $C(d)$ は特異点の種類に応じて変るので、変動量 $\tilde{\lambda}_c$ の特性も特異点毎に異なることとなる。

2.2 群対称性

非線形釣合式 (1) が群同変性を持つ、すなわち、ある群 G に対して

$$T(g)H(\lambda, u, v) = H(\lambda, T(g)u, S(g)v), \quad \forall g \in G \quad (9)$$

が成り立つ場合を考える。ここに $T(g)$ は N 次元の変位 u に対する、群 G の $N \times N$ のユニタリ表現行列であり、 $S(g)$ は p 次元の初期不整 v に対する、 $p \times p$ のユニタリ表現行列である。表現行列とは群 G の元 g が引き起こす座標変換を、対応するベクトル空間に対して書き表したものである。群同変性の式 (9) は、系の対称条件を初期不整を含める形で一般化したものである。この条件は単なる数学的条件ではなく、系の客観性を表す物理的に意味がある条件である。例えばこの式は、もし (λ, u, v) が非線形方程式 $H = 0$ の解であれば、この解を表現行列により座標変換した $(\lambda, T(g)u, S(g)v)$ も解となることを表しており、解の多価性すなわち分岐の条件となっている。この条件は非保存形に対して一般的に成立つが、特にポテンシャル系に対しては、群 G の元 g が引き起こす座標変換に対するポテンシャル U の不変条件

$$U(\lambda, T(g)u, S(g)v) = U(\lambda, u, v), \quad \forall g \in G$$

($H \equiv (\partial U / \partial u)^T$) と等価である。

本論文では自明解 (最も対称性が高い解) からの分岐に着目するので、特異点における変位ベクトル u_c^0 と

表-1 各種の単純特異点の確率諸量

特異点の種類	極大点	非対称分岐点	対称不安定分岐点
$f_{\zeta}(\zeta)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2}\right)$	$\frac{4 \zeta }{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\zeta^4}{2}\right)$	$\frac{3 \zeta ^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{ \zeta ^3}{2}\right)$
$R_{\zeta}(\zeta)$	$1 - \Phi(\zeta)$	$1 - 2\Phi(-\zeta^2)$	$1 - 2\Phi(- \zeta ^{3/2})$
ζ の範囲	$-\infty < \zeta < \infty$	$-\infty < \zeta < 0$	$-\infty < \zeta < 0$
$E[\zeta]$	0	$\frac{-2^{3/4}}{\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = -0.822$	$\frac{-2^{5/6}}{\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) = -0.802$
$\text{Var}[\zeta]$	1^2	$(0.349)^2$	$(0.432)^2$

初期不整ベクトル v^0 がともに G 不変であることを仮定する。

釣合式の群同変性(9)はLyapounov-Schmidt展開により縮約した式(6)にも遺伝し^(11),25),

$$\tilde{T}(g)\tilde{h}(\tilde{\lambda}, w, v) = \tilde{h}(\tilde{\lambda}, \tilde{T}(g)w, S(g)v), \quad \forall g \in G \quad (10)$$

という同変条件式が成り立つ。ここに $\tilde{T}$ は J^0 の M 次元の核での表現行列である。

式(9)を初期不整変数ベクトル v に関して偏微分すると初期不整に対する対称条件式

$$T(g)B = BS(g), \quad \forall g \in G \quad (11)$$

が求まる。式中

$$B = (B_{ij}) = \left(\left. \frac{\partial H_i}{\partial v_j} \right|_{(\lambda, u, v) = (\lambda_c^0, u_c^0, v^0)} \right) \quad i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, p \quad (12)$$

は初期不整の影響を表す初期不整感度行列である。

初期不整ベクトル εd が正規分布 $N(0, \varepsilon^2 W^{-1})$ に従うことに関連し、共分散行列 W^{-1} の群対称性

$$S(g)WS(g)^T = W, \quad \forall g \in G \quad (13)$$

を仮定する。この条件も単なる数学的条件ではなく、系の客観性を表す物理的に意味がある条件である。

3. 単純特異点 ($M = 1$)

単純分岐点 ($M = 1$) に対しては式(8)中の指数 ρ と係数 $C(d)$ は

$$\begin{cases} \rho = 1, & C(d) = -C_0 a, & \text{極大点} \\ \rho = 1/2, & C(d) = -C_0 |a|^{1/2}, & \text{非対称分岐点} \\ \rho = 2/3, & C(d) = -C_0 \cdot a^{2/3}, & \text{対称不安定分岐点} \end{cases}$$

と与えられる。ここに C_0 は正の定数であり、係数 $C(d)$ は初期不整モードベクトル d の関数として

$$a \equiv \xi^T B d = \sum_{i=1}^p c_i d_i \quad (14)$$

と表される ($\xi = \xi_1$)。ここに

$$(c_1, \dots, c_p)^T = B^T \xi$$

である。

式(14)の変数 a は平均0の正規分布する変数 $c_i d_i$ ($i = 1, \dots, p$)の和であるので、平均0のある分散

$$\tilde{\sigma}^2 = \xi^T B W^{-1} B^T \xi \quad (15)$$

の正規分布 $N(0, \tilde{\sigma}^2)$ に従う。正規化した変数

$$\tilde{a} = \frac{a}{\tilde{\sigma}}$$

の確率密度関数は標準正規分布 $N(0, 1)$

$$f_{\tilde{a}}(\tilde{a}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\tilde{a}^2}{2}\right) \quad (16)$$

となる。

正規化した座屈荷重の増分量 ζ を各特異点毎に

$$\zeta = \frac{\tilde{\lambda}_c}{C_0 \sigma^\rho} = \begin{cases} -\tilde{a}, & \text{極大点 } (\rho = 1) \\ -|\tilde{a}|^{1/2}, & \text{非対称分岐点 } (\rho = 1/2) \\ -\tilde{a}^{2/3}, & \text{対称分岐点 } (\rho = 2/3) \end{cases}$$

と定義する。ここに式(15)より

$$\sigma = \tilde{\sigma} \varepsilon = (\xi^T B W^{-1} B^T \xi)^{1/2} \varepsilon$$

である。正規化した座屈荷重の増分量 ζ の確率密度関数は式(16)を

$$f_{\zeta}(\zeta) = \begin{cases} f_{\tilde{a}}(\tilde{a}) d\tilde{a}/d\zeta, & -\infty < \zeta < \infty \\ & \text{極大点} \\ 2f_{\tilde{a}}(\tilde{a}) d\tilde{a}/d\zeta, & -\infty < \zeta < 0 \\ & \text{非対称分岐点} \\ 2f_{\tilde{a}}(\tilde{a}) d\tilde{a}/d\zeta, & -\infty < \zeta < 0 \\ & \text{対称不安定分岐点} \end{cases} \quad (17)$$

により変数変換することにより求まる。累積分布関数 $F_{\zeta}(\zeta)$ は

$$F_{\zeta}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\zeta} f_{\zeta}(\zeta) d\zeta \quad (18)$$

により、信頼性関数 $R_{\zeta}(\zeta)$ は

$$R_{\zeta}(\zeta) = 1 - F_{\zeta}(\zeta) \quad (19)$$

によりそれぞれ求まる。式(17), (18), (19)から確率密度関数 $f_{\zeta}(\zeta)$, 信頼性関数 $R_{\zeta}(\zeta)$, 期待値 $E[\zeta]$, 分散 $\text{Var}[\zeta]$ を種々の特異点に対して求め表-1に示した。ここに表中 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数を,

$$\Phi(\zeta) = \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2}\right) d\zeta$$

は誤差関数をそれぞれ表す。

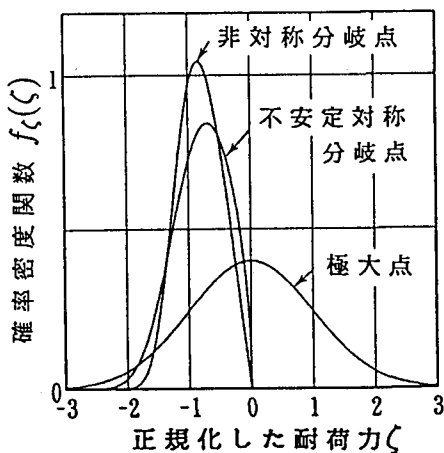


図-1 種々の単純特異点の確率密度関数

3種類の単純特異点に対する確率密度関数 $f_z(\zeta)$ を図-1にプロットする。図中 $\zeta = 0$ は完全系の座屈荷重 $\lambda = \lambda_c^0$ に対応する。このように正規化した座屈荷重 ζ に対しては確率密度関数 $f_z(\zeta)$ は系によらないことは興味深い。

座屈荷重 λ_c の確率密度関数は

$$f_{\lambda_c}(\lambda_c) = \begin{cases} g_1(\lambda_c), & -\infty < \lambda_c < \infty \\ & \text{極大点} \\ 2g_{1/2}(\lambda_c), & -\infty < \lambda_c < \lambda_c^0 \\ & \text{非対称分岐点} \\ 2g_{2/3}(\lambda_c), & -\infty < \lambda_c < \lambda_c^0 \\ & \text{対称不安定分岐点} \end{cases} \quad (20)$$

と求まる。ここに

$$g_\rho(\lambda_c) = \frac{|\lambda_c - \lambda_c^0|^{1/\rho-1}}{\sqrt{2\pi\rho}(C_0\sigma^\rho)^{1/\rho}} \exp\left(\frac{-1}{2} \left| \frac{\lambda_c - \lambda_c^0}{C_0\sigma^\rho} \right|^{2/\rho}\right)$$

である。座屈荷重の平均値 $E[\lambda_c]$ と分散 $\text{Var}[\lambda_c]$ はそれぞれ

$$E[\lambda_c] = \lambda_c^0 + E[\zeta]C_0\sigma^\rho, \quad \text{Var}[\lambda_c] = \text{Var}[\zeta](C_0\sigma^\rho)^2 \quad (21)$$

と表され、また表-1から座屈荷重 λ_c の信頼性関数は

$$R_{\lambda_c}(\lambda_c) =$$

$$\begin{cases} 1 - \Phi\left(\frac{\lambda_c - \lambda_c^0}{C_0\sigma}\right), & -\infty < \lambda_c < \infty \\ & \text{極大点} \\ 1 - 2\Phi\left(-\left(\frac{\lambda_c - \lambda_c^0}{C_0\sigma^{1/2}}\right)^2\right), & -\infty < \lambda_c < \lambda_c^0 \\ & \text{非対称分岐点} \\ 1 - 2\Phi\left(-\left|\frac{\lambda_c - \lambda_c^0}{C_0\sigma^{2/3}}\right|^{3/2}\right), & -\infty < \lambda_c < \lambda_c^0 \\ & \text{対称不安定分岐点} \end{cases}$$

と求まる。

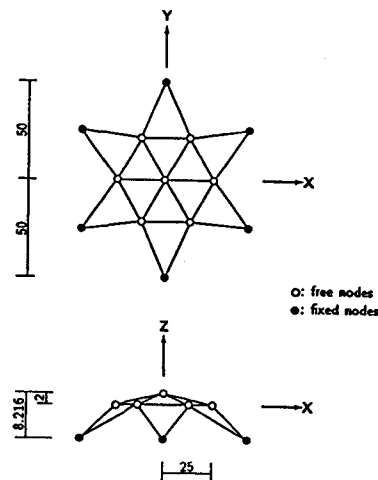


図-2 D_6 不変なドームの例

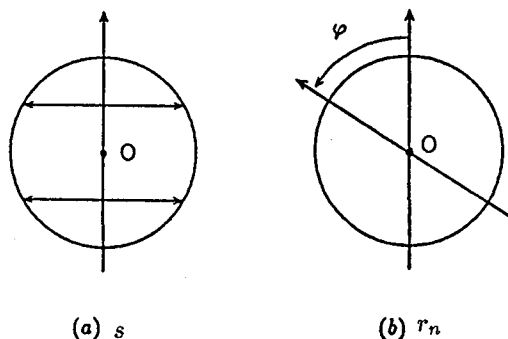


図-3 群 D_n の元 s と r_n による幾何学的変換

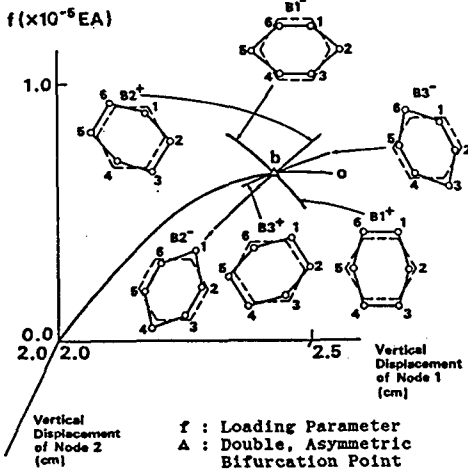
4. 群論的2重分岐点

群 G として、種々の正多角形状ドームやシェル構造の対称群である、二面体群 D_n を用いる。図-2に D_6 不変ドームの一例を示す。この論文では、この群により円柱供試体の周方向の対称性を表すこととする³。この群は

$$D_n = \langle s, r_n \rangle \quad (22)$$

と定義される。ここに $\langle \cdot \rangle$ は群の生成元を表し、 s は XZ 平面に関する鏡映変換 $Y \rightarrow -Y$ を、 r_n は Z 軸回りの反時計回りの $2\pi/n$ の回転をそれぞれ表す。図-3にこれらの変換の作用を示す。 D_n 不変な系はこの2つの変換 s と r_n の他に、この2つの変換の積として生成される変換 r_n^j と sr_n^j ($j = 0, \dots, n-1$) に対しても不変であり、角度 $2\pi j/n$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$) の回転不変性と XY 平面に垂直な n 個の平面に対する鏡映に関する不変性を持つ。

³ 文献²⁶⁾で明らかにしたように、砂や粘土の円柱供試体の変形の初期の分岐に対しては軸方向の対称性を含めた詳細な議論が必要である。



Solution paths of the hexagonal dome

図-4 D_6 不変なドームの釣合径路

群 D_n 同変系の分岐径路上の解の対称性は D_n の部分群により表される。 D_n の部分群は正 m 角形状の対称性を表す m 次の二面体群 D_m と Z 軸に関する $2\pi m/n$ の回転に対する回転対称性を表す巡回群 C_m (m は n の約数) である。

完全系の特異点 (λ_c^0, u_c^0) では特異性条件式 (2) が成り立ち、 $(J^0)^T$ の核 $\ker((J^0)^T)$ は、固有ベクトル ξ_i ($i = 1, \dots, M$) により張られる。 D_n 同変系の特異点は一般には単純特異点 ($M = 1$) か、いわゆる群論的 2 重分岐点 ($M = 2$) である。 $\ker(J^0)$ に属する固有ベクトルの対称性により下記のように特異点を分類できる。

$$\Sigma(\xi_1) = \begin{cases} D_n, & \text{極大点} \\ D_{n/2}, D_{n/2}^2, C_n, & \text{単純対称分岐点} \end{cases}$$

$$\Sigma(\xi_1, \xi_2) = C_m, \quad 2 \text{ 重分岐点}$$

ここに m は n の約数 ($n/m \geq 3$) を、 $\Sigma(\cdot)$ は括弧内の固有ベクトルの対称群を表し、

$$D_{n/2}^2 = \langle r_n^2, sr_n \rangle, \quad C_m = \langle r_n/m \rangle$$

である。ただし 2 重分岐点から分岐する解は D_m 不変であり、固有ベクトル ξ_1 と ξ_2 の対称群 C_m よりも高い対称性を持っていることには注意を要する¹⁶⁾。この分岐点では正 n 角形状のモードから正 m 角形状のモードへと移行し、周方向の対称性の低下 (パターンの粗大化) が起こる。 n/m は 2 重分岐点を特徴付ける重要な指標である。

図-2 の D_6 不変ドームの中央点に Z 方向荷重 0.5λ と正 6 角形状節点に λ を加えた場合の分岐解析結果を図-4 に示す。図中に正 6 角形状節点の変形モードを付記する。 D_6 不変な主径路上の 2 重分岐点 B から D_2 不変な径路が分岐しており、指標の値は $n/m = 6/2 = 3$ である。円柱供試体では非常に大きな n から、比較的小

さな m に対する分岐が発生しており、指標 n/m の値は大きいことが予想される。

4.1 漸近則の誘導

2 重分岐点の縮約した方程式 (6) を解くにあたり、

$$z = w_1 + iw_2, \quad \bar{z} = w_1 - iw_2$$

という複素変数を導入し、

$$F(\tilde{\lambda}, z, \bar{z}, \varepsilon) = h_1(\tilde{\lambda}, w_1, w_2, \varepsilon) + ih_2(\tilde{\lambda}, w_1, w_2, \varepsilon) \quad (23)$$

と置く。ここに $h = (h_1, h_2)^T$ とする。すると式 (6) は

$$F(\tilde{\lambda}, z, \bar{z}, \varepsilon) = \overline{F(\tilde{\lambda}, z, \bar{z}, \varepsilon)} = 0 \quad (24)$$

となり、特異性条件式 (7) は

$$\left| \frac{\partial F}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \right|^2 = 0 \quad (25)$$

となる。

関数 F を $(z, \bar{z})$ の級数

$$F(\tilde{\lambda}, z, \bar{z}, \varepsilon) = \sum_{p=0} \sum_{q=0} \sum_{j=0} \sum_{k=0} A_{pqjk} z^p \bar{z}^q \tilde{\lambda}^j \varepsilon^k \quad (26)$$

に展開する。点 $(\tilde{\lambda}, z, \bar{z}, \varepsilon) = (0, 0, 0, 0)$ は完全系の特異点 $(\lambda_c^0, u_c^0, v^0)$ に対応するので、

$$A_{0000} = A_{1000} = A_{0100} = 0 \quad (27)$$

が成り立つ。

完全系の D_n 同変性は、式 (22) の群 D_n の生成元 s と r_n に関する同変条件 (10) より、

$$\overline{F(\tilde{\lambda}, z, \bar{z}, 0)} = F(\tilde{\lambda}, \bar{z}, z, 0) \quad (28)$$

$$\omega F(\tilde{\lambda}, z, \bar{z}, 0) = F(\tilde{\lambda}, \omega z, \omega \bar{z}, 0) \quad (29)$$

と表される。ここに $\omega = \exp(i2\pi m/n)$ である。式 (28) と (29) に式 (26) を代入すると

$$A_{pqj0}, \quad p, q = 0, 1, 2, \dots, \text{は実数} \quad (30)$$

$$A_{pqj0} = 0, \quad p - q - 1 \neq kn/m, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (31)$$

であることが分る。条件式 (27), (30), (31) を用いて式 (26) の F を簡略化し、複素変数 $(z, \bar{z})$ を式 (24) と (25) から消去することにより、 $\tilde{\lambda}$ と ε の関係式が求まることになる。

例えば、 $n/m \geq 5$ の場合には式 (26) の主要項は

$$F = -A_{1010} \tilde{\lambda} z - A_{2100} z^2 \bar{z} + A_{0001} \varepsilon$$

と簡略化され、式 (24) と (25) の主要項はそれぞれ

$$-A_{1010} \tilde{\lambda} z - A_{2100} z^2 \bar{z} + A_{0001} \varepsilon = 0$$

$$-A_{1010} \tilde{\lambda} \bar{z} - A_{2100} z \bar{z}^2 + \overline{A_{0001}} \varepsilon = 0$$

$$A_{1010}^2 \tilde{\lambda}^2 + 4A_{1010} A_{2100} \tilde{\lambda} z \bar{z} + 3A_{2100}^2 z^2 \bar{z}^2 = 0$$

となる。この 3 個の式から z と $\bar{z}$ を消去することにより、 $\tilde{\lambda}_c$ と ε との間の漸近則

$$\tilde{\lambda}_c \sim \frac{-3A_{2100}^{1/3}}{4^{1/3} A_{1010}} |A_{0001}|^{2/3} \varepsilon^{2/3}$$

が求まる。

同様にして各種の指標 n/m の値に対する漸近式 (8) が求まる。ただし式中の指数 ρ と係数 $C(\mathbf{d})$ は

$$\begin{cases} \rho = 2/3, & C(\mathbf{d}) = -C_0 \cdot a^{2/3}, & n/m \geq 5, \text{ 不安定} \\ \rho = 2/3, & C(\mathbf{d}) = C_0 \cdot a^{2/3}, & n/m \geq 5, \text{ 安定} \\ \rho = 1/2, & C(\mathbf{d}) = -\tau(PB\mathbf{d}/\|PB\mathbf{d}\|)C_0 \cdot a^{1/2}, & n/m = 3 \\ \rho = 2/3, & C(\mathbf{d}) = -\tilde{\tau}(PB\mathbf{d}/\|PB\mathbf{d}\|)C_0 \cdot a^{2/3}, & n/m = 4 \end{cases} \quad (32)$$

と指標 n/m の値により異なる。ここに C_0 は正の定数を表し、 $\tau > 0$ と $\tilde{\tau}$ は $PB\mathbf{d}/\|PB\mathbf{d}\|$ の非線形関数であり、 $\|\cdot\|$ は Euclid ノルムを表し、

$$\begin{aligned} a^2 &= |A_{0001}|^2 = \|PB\mathbf{d}\|^2 \\ \text{Re}(A_{0001}) &= \frac{\partial h_1}{\partial \varepsilon} \Big|_{(\tilde{\lambda}, w, \varepsilon) = (0, 0, 0)} = \xi_1^T B\mathbf{d} \\ \text{Im}(A_{0001}) &= \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{(\tilde{\lambda}, w, \varepsilon) = (0, 0, 0)} = \xi_2^T B\mathbf{d} \end{aligned}$$

である。 P は式 (3) の射影行列であり、この場合には

$$P = \xi_1 \xi_1^T + \xi_2 \xi_2^T$$

である。

4.2 確率密度関数の誘導

漸近式 (32) の右辺の変数 a^2 は系に群同変性 (9) があり、共分散行列 W^{-1} にも群対称性 (13) がある場合には、非常にきれいな形になる。

不整感度行列と共分散行列の対称条件式 (11) と (13) より、初期不整感度行列 B と分散共分散行列 W^{-1} を同時にブロック対角化する変換行列 Φ が存在し、

$$\begin{aligned} & \xi_1^T B W^{-1} B^T \xi_1 \\ &= \xi_1^T B \Phi \cdot \Phi^T W^{-1} \Phi \cdot (\xi_1^T B \Phi)^T \\ &= (\beta^T \mathbf{0}^T \mathbf{0}^T) \begin{pmatrix} W_0^\nu & 0 & 0 \\ 0 & W_0^\nu & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \beta \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ &= \beta^T (W_0^\nu)^{-1} \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \xi_2^T B W^{-1} B^T \xi_2 \\ &= (\mathbf{0}^T \beta^T \mathbf{0}^T) \begin{pmatrix} W_0^\nu & 0 & 0 \\ 0 & W_0^\nu & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \beta \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ &= \beta^T (W_0^\nu)^{-1} \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \xi_1^T B W^{-1} B^T \xi_2 \\ &= (\beta^T \mathbf{0}^T \mathbf{0}^T) \begin{pmatrix} W_0^\nu & 0 & 0 \\ 0 & W_0^\nu & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \beta \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(式中 β はあるベクトルを表す) が成立つ。この式をまとめると固有ベクトル ξ_1 と ξ_2 との間の直交関係式

$$\xi_i^T B W^{-1} B^T \xi_j = \tilde{\sigma}^2 \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2 \quad (33)$$

(δ_{ij} はクロネッカーのデルタを表す) が求まる。正定値の共分散行列 W を

$$W = V^T V$$

と分解し、

$$\tilde{\mathbf{d}} = V\mathbf{d}$$

という座標変換を行うと、新しい変数 $\tilde{\mathbf{d}}$ は標準正規分布 $N(0, I_p)$ に従い、

$$\begin{aligned} a^2 &= |\xi_1^T B\mathbf{d}|^2 + |\xi_2^T B\mathbf{d}|^2 \\ &= |\xi_1^T B V^{-1} \tilde{\mathbf{d}}|^2 + |\xi_2^T B V^{-1} \tilde{\mathbf{d}}|^2 \\ &= |\xi_1^T B V^{-1}|^2 \cdot |\eta_1^T \tilde{\mathbf{d}}|^2 + |\xi_2^T B V^{-1}|^2 \cdot |\eta_2^T \tilde{\mathbf{d}}|^2 \\ &= \tilde{\sigma}^2 (|\eta_1^T \tilde{\mathbf{d}}|^2 + |\eta_2^T \tilde{\mathbf{d}}|^2) \end{aligned} \quad (34)$$

が成り立つ。ここに式 (34) より

$$\eta_i = \frac{\xi_i^T B V^{-1}}{|\xi_i^T B V^{-1}|}, \quad i = 1, 2$$

は $\mathbf{d}$ と独立な p 次元の正規直交ベクトルである。式 (34) の変数 $\eta_i^T \tilde{\mathbf{d}} = \sum_{j=1}^p (\eta_i)_j \tilde{d}_j$ は平均ゼロ、分散 1 の標準正規分布に従い独立である。ゆえに式 (34) から

$$x = \left(\frac{a}{\tilde{\sigma}}\right)^2 \quad (35)$$

は標準正規分布する 2 つの独立な変数 $\eta_1^T \tilde{\mathbf{d}}$ と $\eta_2^T \tilde{\mathbf{d}}$ の 2 乗和であるので、自由度 2 の χ^2 分布 (すなわち指数分布) に従い、その確率密度関数は

$$f_x(x) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \quad (36)$$

となる。式 (35) の x を用いて、式 (8) の座屈荷重を

$$\zeta = \frac{\tilde{\lambda}_c}{C_0 \sigma^\rho} = \begin{cases} -x^{1/3}, & n/m \geq 5 \text{ かつ 不安定} \\ x^{1/3}, & n/m \geq 5 \text{ かつ 安定} \\ -\tau x^{1/4}, & n/m = 3 \\ -\tilde{\tau} x^{1/3}, & n/m = 4 \end{cases} \quad (37)$$

と正規化できる ($\sigma = \tilde{\sigma}$)。 ζ の確率密度関数 $f_\zeta(\zeta)$ は確率密度関数の変数変換の式

$$f_\zeta(\zeta) = \frac{dx}{d\zeta} f_x(x)$$

により求まる。 ζ の確率密度関数 $f_\zeta(\zeta)$ 等の具体形を指標の値毎に下記にまとめる。

(1) ケース 1: $n/m \geq 5$ (不安定)

指標 $n/m \geq 5$ の不安定分岐点に対しては、式 (37) により式 (36) を変数変換することにより、 ζ の確率密度関数 $f_\zeta(\zeta)$ 等が下記のように求まる。

$$f_\zeta(\zeta) = \frac{3\zeta^2}{2} \exp\left(\frac{-|\zeta|^3}{2}\right), \quad -\infty < \zeta < 0 \quad (38)$$

$$R_\zeta(\zeta) = 1 - \exp\left(\frac{-|\zeta|^3}{2}\right), \quad -\infty < \zeta < 0$$

$$E[\zeta] = -1.13, \quad \text{Var}[\zeta] = (0.409)^2$$

すなわち ζ は Weibull 分布に従う。

座屈荷重 λ_c に関する確率諸量は以下のように求まる。

$$f_{\lambda_c}(\lambda_c) = \frac{3(\lambda_c - \lambda_c^0)^2}{2C_0^3\sigma^2} \exp\left(\frac{-|\lambda_c - \lambda_c^0|^3}{2C_0^3\sigma^2}\right) \quad (39)$$

$$R_{\lambda_c}(\lambda_c) = 1 - \exp\left(\frac{-|\lambda_c - \lambda_c^0|^3}{2C_0^3\sigma^2}\right) \quad (40)$$

$$-\infty < \lambda_c < \lambda_c^0$$

$$\begin{aligned} E[\lambda_c] &= \lambda_c^0 - 1.13C_0\sigma^{2/3} \\ \text{Var}[\lambda_c] &= (0.409C_0\sigma^{2/3})^2 \end{aligned} \quad (41)$$

(2) ケース 2: $n/m = 3$

式 (37) より, $n/m = 3$ の場合の ζ は

$$\zeta = -b\tau(\psi)$$

と 2 つの確率的に独立な変数の積として表される。変数 $b \equiv (a/\tilde{\sigma})^{1/2} = x^{1/4}$ の確率密度関数は式 (36) より

$$\begin{aligned} f_b(b) &= \frac{dx}{db} f_x(x) \\ &= 4b^{3/2} \exp\left(\frac{-x}{2}\right) \\ &= 2b^3 \exp\left(\frac{-b^4}{2}\right), \quad 0 < b < \infty \end{aligned} \quad (42)$$

と表される。一方, $\tau(\psi) > 0$ は

$$g(\tau) \equiv \frac{27}{256}\tau^6 - \frac{9}{8}\tau^2 - \frac{1}{\tau^2} = 2 \cos(3\psi)$$

$$\psi = \arg(\xi_1^T B d + i\xi_2^T B d)$$

を満足するので, その確率密度関数は

$$f_\tau(\tau) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{g'(\tau)}{\sqrt{1 - g(\tau)^2/4}}, \quad 2/\sqrt{3} < \tau < 2 \quad (43)$$

と求まる。

正規化した座屈荷重 $f_\zeta(\zeta)$ の確率密度関数は式 (42) と (43) を用いて,

$$f_\zeta(\zeta) = \int_{2/\sqrt{3}}^2 f_b\left(\frac{|\zeta|}{\tau}\right) \frac{f_\tau(\tau)}{\tau} d\tau, \quad -\infty < \zeta < 0$$

と表される。この式を数値積分することにより,

$$E[\zeta] = 1.91, \quad \text{Var}[\zeta] = (0.590)^2$$

$$E[\lambda_c] = \lambda_c^0 - 1.91C_0\sigma^{1/2}, \quad \text{Var}[\lambda_c] = (0.590C_0\sigma^{1/2})^2$$

と確率諸量が求まる。

(3) ケース 3: $n/m = 4$

式 (37) より, $n/m = 4$ の場合の ζ は

$$\zeta = -\tilde{\tau}(\psi)x^{1/3}$$

となる。 $n/m = 3$ の場合と異なり, $\tilde{\tau}(\psi)$ は対象とする系毎に異なるために, 確率密度関数は構造例毎に異なることとなり, 数値解析により求めることとなる¹⁴⁾。

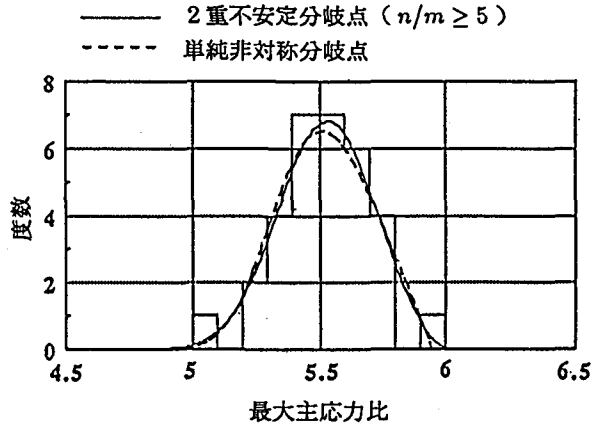


図-5 砂の圧縮強度の確率変動

5. 適用例

この章では砂とコンクリートの円柱供試体の強度変動に対し本理論を適用する。実験データに対応する理論曲線を求めるにあたり, 円柱供試体が周方向の対称性を喪失し, 分岐前の周方向の波数 n と分岐後の波数 m との比 n/m は大きいことが予想されるので, 指標 $n/m \geq 5$ の 2 重不安定分岐点により最大強度が支配されていると仮定する。このことは円柱供試体の断面が円形から楕円状に変形する等の分岐モードを想定することに相当し, 物理的にも必然性があるものである。本理論の妥当性の本格的な検証については, 漸近則に基づいた議論を行った文献^{23), 24)}を参照されたし。

5.1 砂の三軸圧縮試験

豊浦標準砂の三軸圧縮試験を同一の状態でも繰り返すことにより, 圧縮強度のデータバンク (32 ケース) を求めた²³⁾。供試体の直径は 7cm, 高さは 15cm である。間隙比を 0.67 から 0.69 の範囲におさまるように管理し, 固定端の排水条件で 1kgf/cm^2 (98.1kN/m^2) の拘束圧をかけながら試験繰り返しを行った。

図-5に砂の圧縮強度 (応力比 R の最大値) のヒストグラムを示す。応力比 R の最大値 R_c の標本平均と分散

$$E[R_c] = 5.523, \quad \text{Var}[R_c] = 0.032$$

を式 (41) に代入することにより,

$$R_c^0 = \lambda_c^0 = 6.02, \quad C_0\sigma^{2/3} = 0.437$$

と確率密度関数のパラメータが求まる。このパラメータの値を式 (39) に代入することにより, R_c の確率密度関数の理論曲線を求め図-5にプロットした。この曲線はヒストグラムと比較的よく一致しており, 本理論の妥当性の一端を示している。

表-2 配合条件

	Sample 1	Sample 2	Sample 3	Sample 4
水セメント比 (%)	62		52	62
粗骨材 (mm)	25			15

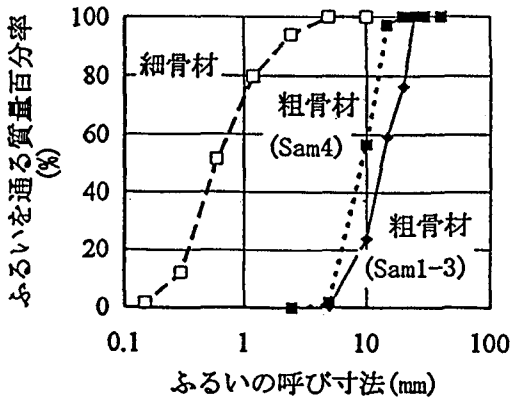


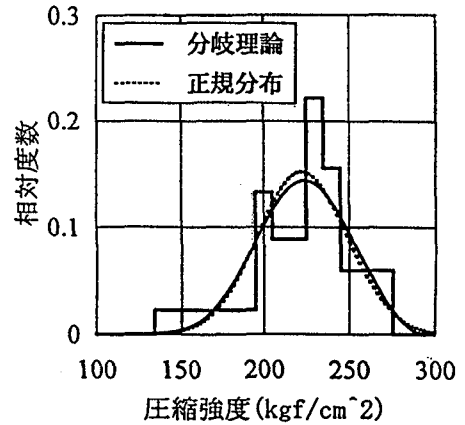
図-6 骨材の粒度分布曲線

5.2 コンクリートの圧縮試験

同一バッチから作成したコンクリートの円柱供試体の圧縮強度試験をできる限り同一の状態で行うことにより、圧縮強度のデータバンクを求めた。圧縮強度を得るにあたり、同一の分岐モードに着目するという本理論の適用限界上から、破壊モードが同一である場合の結果のみを抽出して統計処理をすることとする。ここでは破壊モードの分類は、応力ひずみ曲線と供試体の破壊状況から判断した。目標強度を 240kgf/cm^2 とし、配合条件としては、実用性を有し、ひび割れの確認を簡単に行えることを考慮し、表-2に示すものを用いた。また図-6に骨材の粒度分布曲線を示す。試験はJIS A 1108「圧縮強度試験」に基づいておこなった。またひずみは3個の変位計の読みの平均値として求めた。なお、試験は材令28日以上とし、同一バッチからは40本以上の供試体を得た。

試験により得たヒストグラムと本理論による (a) 指数 $n/m \geq 5$ の2重不安定分岐点と (b) 単純不安定分岐点の確率密度関数との比較を図-7に示す。また水セメント比や骨材の粒度分布を変化させた結果を図-8と図-9に示す（これらの場合には、指数 $n/m \geq 5$ の2重不安定分岐点の確率密度関数を理論値とし用いた）。適合性を調べるために、表-3に示すようにKS検定を行ったが、いずれの場合も2重不安定分岐点の場合が最も適合性が高く本理論の妥当性を示している。ただし、コンクリートの圧縮強度の記述によく用いられている正規分布との差は比較的小さく、最終的な結論を下すにはさらなるデータの集積が必要である。

(a) 2重不安定分岐点 ($n/m \geq 5$)



(b) 単純非対称分岐点

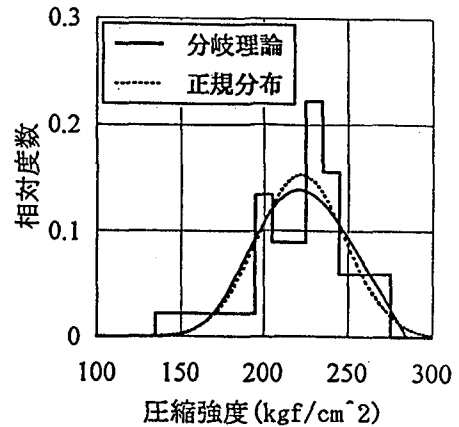


図-7 実験データと理論の比較 (Sample 1)

表-3 KS 検定結果

	Sample 1	Sample 2	Sample 3	Sample 4
2重不安定分岐点	0.075	0.105	0.070	0.053
単純非対称分岐点	0.084	0.116	0.072	0.060
正規分布	0.085	0.113	0.074	0.051
有意水準5%	0.20	0.20	0.20	0.20

6. 鋼材の引張強さに関する考察

鋼材の引張強さに関する研究は幅広く行われており、引張強さの分布関数としては3母数のWeibull分布

$$R(x) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{x - \gamma}{\alpha} \right)^m \right], \quad x > \gamma \quad (44)$$

がよく用いられている^{6),7)}。ここに m, α, γ はそれぞれ形状母数、尺度母数、位置母数である。

の解明は今後の課題である。

7. 結論

本論文では分岐という視点に基づく材料の強度発現の理論を提案した。破壊力学による強度分布（Weibull分布）はある下限値を持つ分布であるのに対し、分岐理論による分布はある上限値を持つ分布であり、全く性質が異なっている。物理現象としては材料の強さは上限も下限も持つものであることから、破壊力学と分岐という複眼的な視野を持った研究が望まれる。本論文で提案した理論は分岐モードが同一である場合にしか適用できないものであるため、分岐モードに着目した材料実験データの蓄積が今後の著者等の課題である。

8. 謝辞

この研究を行うにあたり土木学会鋼構造委員会鋼構造新技術小委員会には多岐に渉る御協力を、砂の強度試験に対し前田記念工学振興財団の、コンクリートの試験に対し科学研究費 06805038 の助成を、城岸整功氏、石田仁氏、八尾浩樹氏には実験上の御協力をいただきましたことを心から感謝致します。

参考文献

- 1) Weibull, W.: A statistical theory on the strength of materials: The Royal Swedish Institute for Engineering Research, Proceedings, NR 151, 1939.
- 2) Bolotin, V.V.: Statistical methods in the nonlinear theory of elastic shells, *Izvestija Akademii Nauk SSSR. Otdelenie Tekhnicheskikh Nauk* 3 (English translation, NASA TTF-85, 1962, 1-16), 1958.
- 3) 西村昭：ミルシート値とチェックテスト値との関係について, JSSC, Vol. 5, No. 38, pp. 3-26, 1969.
- 4) 西村昭：鋼材の機械的性質のばらつきについて, JSSC, Vol. 5, No. 48, pp. 68-74, 1969.
- 5) Elishakoff, I.: Probabilistic methods in the theory of structures, John Wiley, 1983.
- 6) 酒井達雄, 鈴木幹彦：炭素鋼 S 3 5 C の各種機械的性質の分布特性と各強度特性値間の相関性について, 日本機械学会論文集 (A 編), 54 巻, 506 号, pp. 1925-1930.
- 7) 材料強度の統計的性質, 材料強度確率モデル研究会編, 養賢堂, 1992.
- 8) Koiter, W.T.: On the stability of elastic equilibrium, Ph. D, Dissertation. Delft, Holland (English translation: NASA Tech. Trans. F10: 833, 1967), 1945.
- 9) Thompson, J.M.T. and Hunt, G.W.: *A General Theory of Elastic Stability*, John Wiley and Sons, 1973.
- 10) Ikeda, K. and Murota, K.: Critical initial imperfection of structures, *Int. J. Solids Structures*, Vol.26, No.8, pp.865-886, 1990.
- 11) Murota, K and Ikeda, K.: Critical imperfection of symmetric structures, *SIAM Journal on Appl. Math.*, Vol.51, No.5, pp.1222-1254, 1991.
- 12) Ikeda, K. and Murota, K.: Random initial imperfections of structures, *Int. J. Solids Structures*, Vol.28, No.8, pp.1003-1021, 1991.

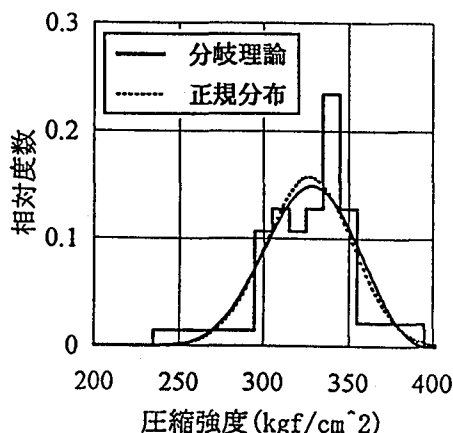


図-8 実験データと理論の比較 (Sample 3)

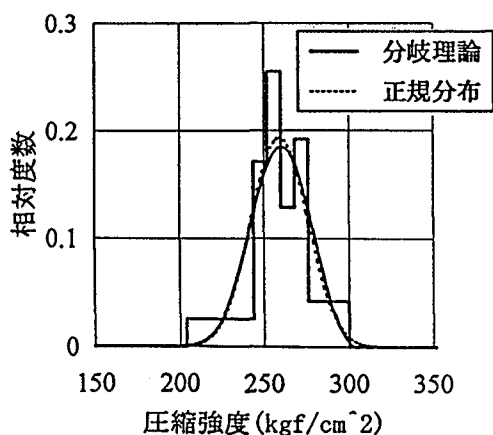


図-9 実験データと理論の比較 (Sample 4)

式 (44) が本理論で指数 $n/m \geq 5$ の 2 重不安定分岐点に対して求めた信頼性関数 (40) と一致していることは注目に値する。これはこの分岐点では正規化した座屈荷重の符号を変えた変数 $-\zeta$ が Weibull 分布に従うことによるものである。本理論によると、形状母数 m の値は 3 であり、尺度母数 α は初期不整の分散を表パラメータ $C_0\sigma^2/3$ であり、位置母数 γ は完全系の分岐点の荷重の値 λ_0^0 であることが分る。このように分布系を与える母数に物理的な解釈を与え得ることは、本理論の重要な利点である。式 (44) は破壊力学的な根拠により説明されているが、分岐理論によっても同種の式に到達できることは興味深い。

ただし、破壊力学による分布 (44) はある下限値 γ を持つ分布であり、本 (分岐) 理論による分布はある上限値 λ_0^0 を持つ分布であることに注意を要する。また金属の分岐の初期に現れる縞上の滑り線は群論的 4 重分岐点に起因するものであり²⁶⁾、その強度変動の仕組

- 13) Murota, K. and Ikeda, K.: On random imperfection for structures of regular-polygonal symmetry, *SIAM J. Appl. Math.*, Vol.52, No.6, pp.1780-1803, 1992.
- 14) Ikeda, K. and Murota, K.: Statistics of normally distributed initial imperfections, *Int. J. Solids Structures*, Vol.30, No.18, pp.2445-2467, 1993.
- 15) Ikeda, K., Murota, K., and Elishakoff, I.: Reliability of structures subject to normally distributed initial imperfections, Preprint.
- 16) Ikeda, K., Murota, K., and Fujii, H.: Bifurcation hierarchy of symmetric structures, *Int. J. Solids Structures*, Vol.27, No.12, pp.1551-1573, 1991.
- 17) 犬井鉄郎, 田辺行人, 小野寺嘉孝: 応用群論-群表現と物理学-, 裳華房.
- 18) 山口昌哉: 非線型の現象と解析, 入門 | 現代の数学 [1], 1979.
- 19) Baumslag, B. and Chandler, B.: Theory and problems of group theory, Outline Series in Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1968.
- 20) Golubitsky, M. and Schaeffer, D.G.: Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Vol. 1, Springer, Berlin, 1985.
- 21) Golubitsky, M., Stewart, I., and Schaeffer, D.G.: Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Vol. 2, Springer, Berlin, 1988.
- 22) Fujii, H. and Yamaguti, M.: Structure of singularities and its numerical realization in nonlinear elasticity, *J. Math. Kyoto Univ.*, 20, pp.498-590, 1980.
- 23) Ikeda, K. and Murota, K.: Bifurcation as sources of uncertainties in soil shearing behavior, Preprint.
- 24) Ikeda, K. and Maruyama, K.: Compressive strength variation of concrete specimens due to imperfection sensitivity, Preprint.
- 25) Sattinger, D.H.: *Group Theoretic Methods in Bifurcation Theory*, Lecture Notes in Mathematics 762. Springer, Berlin, 1979.
- 26) Ikeda, K., Murota, K., and Nakano, M.: Echelon modes in uniform materials, *Int. J. Solids Structures*, Vol.31, No.19, pp.2709-2733, 1994.

(1994 年 9 月 14 日 受付)