

多重分岐のベンチモデルと分岐経路の探索方法について

Multiple Bifurcation Benchmodels and Branch-Switching

岡澤重信*

藤井文夫**

Shigenobu Okazawa and Fumio Fujii

* 名古屋大学大学院工学研究科 博士前期課程 (〒464-01 名古屋市千種区不老町)

** Dr.-Ing., 岐阜大学助教授 工学部 (〒501-11 岐阜市柳戸)

A globally convergent nonlinear scheme is used for branch-switching in elastic bifurcation. There are four different versions in the proposed path-switching procedures; line search, use of the first derivatives of the tangent stiffness matrix with or without curvature effect and tracing of the solution path. In computational stability theory, line search is highly recommended for practical use and the path-tracing is the most reliable. In multiple-bifurcation, the number of indefinite parameters is in the present study smaller than the number of the critical eigenvectors by one. All these switching strategies are tested on the simple/multiple bifurcation benchmodels.

Key Words: Elastic Multiple Bifurcation, Branch-Switching, Nonlinear Solution

1. まえがき

分岐力学における課題は、分岐座屈の発生する座標点を精確に捉えること(座屈解析)と、分岐後の挙動を予測すること(後座屈解析)の2点である。分岐構造(単純・多重/非対称・対称/安定・不安定)を解明することは後座屈解析に属する。Koiter, Sewell, Britvec, Thompson, Hunt らによって確立された『一般安定理論(General Stability Theory)』は、分岐点に「とどまり」(これを本論文では便宜上「staying型」と呼ぶ)、分岐点における支配方程式の高次項からの情報を用いて後座屈挙動を予測する立場をとる。しかし一方では非線形構造系の特異点を具体的にどう精確にピンポイントするかなど、実用的な数理解析については何ら触れられたことはなく、摂動法や分岐方程式のなかで登場する高次導関数の取扱いについても、汎用コードによる実用計算の立場からは非現実的な側面も見受けられる。

これに対して特異つり合い点を精算するためのExtended System (1988年) [10, 11] に代表され、一般安定理論とは異なる観点(非線形数理解論、汎用実用計算)に立脚した『計算安定理論(Computational Stability Theory)』においては、分岐点の位置を精算した後は、分岐経路への移行を試み、分岐経路に沿って実際に「移動する」ことにより(これを本論文では便宜上「moving型」と呼ぶ)、分岐構造を特定できるとする立場をとる。すなわち従来の一般安定理論における高次項からの情報を一切必要とせずとも、

◎経路追跡法(Path-Tracing) [6, 7, 8]

◎特異点のピンポイント法(Pinpointing) [6, 9, 10, 11]

◎経路切り替え(Path-Switching) [1, 2, 3, 4, 5, 6]

の3つの数理的ノウハウだけで、分岐構造が解明されることになる。これが計算安定理論の基本的立場[6]である。

本論文では筆者らがこれまで提案してきた経路切り替え方法[1~6]をまとめた後、多重分岐への拡張を考える。現時点ではすべての多重分岐経路を探索するためには、試行錯誤は止むを得ないのが実情ではあるが(単純分岐については試行錯誤的探索は不要)、無駄な反復計算を最小限に抑え、しかも分岐解の検出もれが起こらないよう探索の網を広げ、すべての分岐解を網羅することが試行錯誤的探索の際の利点となる。計算例題のなかでは、少自由度数で解析的に扱い得る分岐モデルを考えた。系のパラメータ設定により、初期不整・単純分岐・多重分岐の発生を制御できる。これらのベンチモデルについて、特に経路切り替え用の計算戦略の妥当性を検討した。微分演算(高次項計算)や非線形解の検証の一部に、数式処理ソフト(Maple)を用いて解析の手助けとした。

2. つり合い方程式

N個の自由度 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T$ を有し、単一荷重変数 p の比例荷重をうける構造系の平衡方程式を π として、

$$\pi = \pi(\mathbf{u}, p) \quad (1)$$

つり合い方程式は π の $\mathbf{u}$ に関する停留条件より

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}, p) = 0 \quad (2)$$

ここに

$$\mathbf{E} = (\partial \pi / \partial u_1, \partial \pi / \partial u_2, \dots, \partial \pi / \partial u_N)^T \quad (3)$$

式(2)を満足する点 $(\mathbf{u}, p)$ の集合が、 R^{N+1} におけるつり合い経路を定義する。このつり合い経路の名称を $\varepsilon(p)$ とし、その弧長を ε とする。その他の軌道の名称についても必要があれば、 $()$ のなかに実際に変動する荷重変数を示すことにする。式(2)の線形化は

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u}} \frac{d \mathbf{u}}{d \varepsilon} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial p} \frac{d p}{d \varepsilon} = 0 \quad (4)$$

$\left(\frac{d \mathbf{u}}{d \varepsilon}, \frac{d p}{d \varepsilon} \right)$ が、 $\varepsilon(p)$ の単位接線ベクトルであることから

$$\left(\frac{d \mathbf{u}}{d \varepsilon} \right)^T \left(\frac{d \mathbf{u}}{d \varepsilon} \right) + \left(\frac{d p}{d \varepsilon} \right)^2 = 1 \quad (5)$$

が成り立つ。式(4)の両辺をさらに ε で微分して、

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \left(\frac{d^2 \mathbf{u}}{d \varepsilon^2} \right) - \mathbf{e} \left(\frac{d^2 p}{d \varepsilon^2} \right) = \\ - \left[\frac{d \mathbf{K}}{d \mathbf{u}} \left(\frac{d \mathbf{u}}{d \varepsilon} \right) \right] \left(\frac{d \mathbf{u}}{d \varepsilon} \right) \\ - \left[\frac{d \mathbf{K}}{d p} \left(\frac{d p}{d \varepsilon} \right) \right] \left(\frac{d \mathbf{u}}{d \varepsilon} \right) \\ + \left[\frac{d \mathbf{e}}{d \mathbf{u}} \right] \left(\frac{d \mathbf{u}}{d \varepsilon} \right) \left(\frac{d p}{d \varepsilon} \right) \\ + \left(\frac{d \mathbf{e}}{d p} \right) \left(\frac{d p}{d \varepsilon} \right)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

ここに曲率ベクトル(曲率の大きさを持つ法線ベクトル)が接線ベクトルに直交することから、

$$\left(\frac{d \mathbf{u}}{d \varepsilon} \right)^T \left(\frac{d^2 \mathbf{u}}{d \varepsilon^2} \right) + \left(\frac{d p}{d \varepsilon} \right) \left(\frac{d^2 p}{d \varepsilon^2} \right) = 0 \quad (7)$$

より高次の項については省略する。以上が本論文で扱われる多重分岐モデルにおいて適用される一般的なつり合い方程式の概要である。

通常の有限要素法における定式化においては、式(2, 4, 5, 6)は簡略化され、それぞれつぎの式(8, 9, 10, 13)のようになる。

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}) - p \mathbf{e} = 0 \quad (8)$$

$\mathbf{R}(\mathbf{u})$ は系の抵抗力(内力)であり、荷重ベクトル $\mathbf{e}$ は一定ベクトルとなる。式(4, 5)は、それぞれ

$$\mathbf{K} d \mathbf{u} - d p \mathbf{e} = 0 \quad (9)$$

$$d \mathbf{u}^T d \mathbf{u} + d p^2 = 1 \quad (10)$$

で与えられ、 $\mathbf{K}$ は接線剛性行列で節点変位 $\mathbf{u}$ のみに依存し、荷重変数 p は関与してこない。

$$\mathbf{K} = + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}} \quad (11)$$

$$\mathbf{e} = - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial p} \quad (12)$$

式(6)も簡略化されて、

$$\mathbf{K} \left(\frac{d^2 \mathbf{u}}{d \varepsilon^2} \right) - \mathbf{e} \left(\frac{d^2 p}{d \varepsilon^2} \right) =$$

$$- \left[\frac{d \mathbf{K}}{d \mathbf{u}} \left(\frac{d \mathbf{u}}{d \varepsilon} \right) \right] \left(\frac{d \mathbf{u}}{d \varepsilon} \right) \quad (13)$$

となる。式(6, 13)の右辺にある $\frac{d \mathbf{K}}{d \mathbf{u}}$ ($\mathbf{K}$ の節点自由度に関する微分で、3次元配列となる)および

$\frac{d \mathbf{K}}{d \mathbf{u}} \left(\frac{d \mathbf{u}}{d \varepsilon} \right)$ の評価が曲率項を計算する際の材料となる。

3. 固有値と固有ベクトル

任意の正則つり合い点において、荷重増分 $d p$ を規定した際の剛性方程式は

$$\mathbf{K} d \mathbf{u} = d p \mathbf{e} \quad (14)$$

であり、このとき

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\theta}_j = \lambda_j \boldsymbol{\theta}_j \quad (j=1, 2, 3, \dots, N) \quad (15)$$

$$|\boldsymbol{\theta}_j| = 1 \quad (16)$$

なる $\mathbf{K}$ の固有値 λ_j ($\boldsymbol{\theta}_j$)を用いて、

$$\mathbf{K} = \sum_{j=1}^N \lambda_j \boldsymbol{\theta}_j \boldsymbol{\theta}_j^T \quad (17)$$

$$\mathbf{K}^{-1} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j} \boldsymbol{\theta}_j \boldsymbol{\theta}_j^T \quad (18)$$

$$d \mathbf{u} = \sum_{j=1}^N \frac{(d p \mathbf{e}^T \boldsymbol{\theta}_j)}{\lambda_j} \boldsymbol{\theta}_j \quad (19)$$

$$d p \mathbf{e} = \sum_{j=1}^N (\lambda_j \boldsymbol{\theta}_j^T d \mathbf{u}) \boldsymbol{\theta}_j \quad (20)$$

$$(\boldsymbol{\theta}_j^T d p \mathbf{e}) = \lambda_j (\boldsymbol{\theta}_j^T d \mathbf{u}) \quad (21)$$

が正則つり合い点において成立する。例えば $\lambda_1=0$ の単純分岐点において、式(14)では主経路に沿う

$d \mathbf{u}_I$ と、分岐経路に沿う $d \mathbf{u}_{II}$ の2本の異なる解ベクトルが可能である。このうち式(19)の右辺の第1項($j=1$)については $\lambda_1=0$ より、 $d \mathbf{u}_I$ と $d \mathbf{u}_{II}$ とが有限長さであるためには、

$$\mathbf{e}^T \boldsymbol{\theta}_1 = 0 \quad (22)$$

でなければならない。したがって、

$$d \mathbf{u}_I = C_I \boldsymbol{\theta}_1 + \sum_{j=2}^N \frac{d p \mathbf{e}^T \boldsymbol{\theta}_j}{\lambda_j} \boldsymbol{\theta}_j \quad (23)$$

$$d \mathbf{u}_{II} = C_{II} \boldsymbol{\theta}_1 + \sum_{j=2}^N \frac{d p \mathbf{e}^T \boldsymbol{\theta}_j}{\lambda_j} \boldsymbol{\theta}_j \quad (24)$$

ここで (C_I, C_{II}) は、相異なる不定量で、 $d \mathbf{u}_I$ と $d \mathbf{u}_{II}$ との違いはせいぜい $C_I \boldsymbol{\theta}_1$ と $C_{II} \boldsymbol{\theta}_1$ の差であることがわかる。これ以降、 $\boldsymbol{\theta}_1$ の添え字 $\cdot I \cdot$ を略し、今後 $\boldsymbol{\theta}$ とは単純分岐点における特別な固有ベクトルとする。対称分岐の時、 $d \mathbf{u}_{II}$ については式(24)の右辺において $d p=0$ であることから、

$$d \mathbf{u}_{II} = C_{II} \boldsymbol{\theta} \quad (25)$$

非対称分岐については、式(23, 24)の右辺の総和記号部分を消去すると、

$$d \mathbf{u}_{II} = \sigma \boldsymbol{\theta} + d \mathbf{u}_I \quad (26)$$

ここで $\sigma = (C_{II} - C_I)$ である。 $\mathbf{d} \mathbf{u}_I$ は厳格には計量不能であるが、主経路上の分岐点近傍にある正則つり合い点Aにおいて、単位荷重増分 $d p = 1$ に対する増分変位 δ を用いて、

$$\mathbf{d} \mathbf{u}_I \doteq d p \delta \quad (27)$$

と近似できる。ただし

$$\mathbf{K}_A \delta = \mathbf{e} \quad (28)$$

したがって分岐荷重より $d p$ だけずれた荷重レベルにある分岐経路上のつり合い点を分岐点Bからみると、その相対変位座標は、

$$\mathbf{d} \mathbf{u}_{II} = \sigma \theta + \tau \delta \quad (29)$$

で予測でき、 $(\mathbf{d} \mathbf{u}_{II}, \tau)$ が分岐方向予測子となる。ここで後の展開のために $d p = \tau$ と置き換えた。決定すべきパラメータは (σ, τ) の二個である。

4. 一般安定理論 (General Stability Theory)

式(29)より、分岐点近傍の任意のつり合い点 $(\mathbf{u}, p)$ は、

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_B + \sigma \theta + \tau \delta \quad (30)$$

$$p = p_B + \tau \quad (31)$$

となり、これを式(1)に代入すると、 π は (σ, τ) の関数となり、 π の σ に関する停留条件から

$$\frac{\partial \pi}{\partial \sigma} = 0 \quad (32)$$

となる。これは変形を θ の方向に限ったとき、 θ 方向にある π の停留点を直線探索するときの停止条件で、式(2)よりはやや緩やかなつり合い条件であり、

$$\text{式(32)の左辺} = \theta^T \mathbf{E} \quad (33)$$

である。 $\mathbf{E}$ を (σ, τ) でテイラー展開すると式(32)は、

$$\begin{aligned} 0 = & +A_{00} + A_{10}\sigma + A_{01}\tau + \\ & +A_{20}\sigma^2 + A_{11}\sigma\tau + A_{02}\tau^2 + \\ & +A_{30}\sigma^3 + A_{21}\sigma^2\tau + A_{12}\sigma\tau^2 + A_{03}\tau^3 \\ & + (\text{高次項}) \end{aligned} \quad (34)$$

ここに各係数 $(A_{00} \sim A_{03})$ はつぎのようである。ただし式(35~44)において、下付文字 $\cdot_u$ と $\cdot_p$ はその変数に関する微分演算を表す。例えば $\mathbf{K}_u$ は $\mathbf{K}$ の $\mathbf{u}$ に関する微分で3次元配列となる。同様に $\mathbf{K}_{uu}$ は4次元配列である。複雑な表現部分では2次元配列(行列)と一次元配列(ベクトル)の部分それぞれ $[]$ と $\{ \}$ で囲んだ。各式のなかで $(=)$ の部分は通常の有限要素法の場合に成立する表現式である。

$$A_{00} = \theta^T \mathbf{E} = 0 \quad (35)$$

$$A_{10} = \theta^T \mathbf{K} \theta = 0 \quad (36)$$

$$A_{01} = \theta^T \{ \mathbf{K} \delta - \mathbf{e} \} = 0 \quad (37)$$

$$A_{20} = (1/2) \theta^T [\mathbf{K}_{uu} \theta] \theta \quad (38)$$

$$\begin{aligned} A_{11} = & \theta^T \{ [\mathbf{K}_{u\theta}] \delta - [\mathbf{e}_{u\theta}] \theta \} \\ = & \theta^T \{ [\mathbf{K}_{u\theta}] \delta \} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} A_{02} = & (1/2) \theta^T \{ [\mathbf{K}_{u\delta}] \delta + [\mathbf{K}_{p\delta}] \delta \\ & - [\mathbf{e}_{u\delta}] \delta \} \end{aligned}$$

$$= (1/2) \theta^T \{ [\mathbf{K}_{u\delta}] \delta \} \quad (40)$$

$$A_{30} = (1/6) \theta^T \{ [\mathbf{K}_{uu\theta\theta}] \theta \} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} A_{21} = & (1/2) \theta^T \{ [\mathbf{K}_{uu\theta\theta}] \delta \\ & - [\mathbf{e}_{uu\theta}] \theta \} \\ = & (1/2) \theta^T \{ [\mathbf{K}_{uu\theta\theta}] \delta \} \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} A_{12} = & (1/2) \theta^T \{ [\mathbf{K}_{uu\theta\delta}] \delta \\ & + [\mathbf{K}_{pu\theta}] \delta - [\mathbf{e}_{uu\theta}] \delta \} \\ = & (1/2) \theta^T \{ [\mathbf{K}_{uu\theta\delta}] \delta \} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} A_{03} = & (1/6) \theta^T \{ [\mathbf{K}_{uu\delta\delta}] \delta \\ & + 2 [\mathbf{K}_{pu\delta}] \delta + [\mathbf{K}_{pp}] \delta \\ & - [\mathbf{e}_{uu\delta}] \delta \} \\ = & (1/6) \theta^T \{ [\mathbf{K}_{uu\delta\delta}] \delta \} \end{aligned} \quad (44)$$

規定された微小の荷重変動量 τ に対して、

$$\text{式(34)の右辺で } \tau^2 \text{ と } \tau^3 \text{ を含む項} \doteq 0 \quad (45)$$

であるから 7 個の係数 $(A_{20} \sim A_{03})$ のうち、特に $(A_{20}, A_{11}, A_{30}, A_{21})$ の4個は分岐構造を解明する上で特に重要なパラメータである。

例えば非対称分岐点では主経路を含めて2個の実根が存在するため、

$$A_{20} \neq 0 \quad (46)$$

で、式(34)における支配的な項と根はそれぞれ

$$0 = A_{20} \sigma^2 + A_{11} \sigma \tau \quad (47)$$

$$\sigma = 0, \text{ および } - (A_{11} \tau / A_{20}) \quad (48)$$

となる。

対称分岐の場合、 $\tau = 0$ のとき $\sigma = 0$ の3重根が発生することから

$$A_{20} = 0 \text{ (対称分岐)} \quad (49)$$

また τ の正負により実根が一個のみ(主経路の $\sigma = 0$) の場合と、3 個の場合(主経路の $\sigma = 0$ と、他の2根は分岐経路の根で絶対値が同じで符号が逆)がある。したがって

$$0 = A_{11} \sigma \tau + A_{30} \sigma^3 \quad (50)$$

が支配的な項となり、3根は

$$\sigma = 0, \pm \sqrt{- (A_{11} \tau / A_{30})} \quad (51)$$

である。根号のなかの正負の如何によって、

$$A_{11} / A_{30} < 0 \quad (52)$$

のとき、 $\tau > 0$ 側に実根がある(対称安定分岐)。逆に

$$A_{11} / A_{30} > 0 \quad (53)$$

のとき、 $\tau < 0$ 側に実根が出る(対称不安定分岐)。

このように従来の分岐理論は、分岐点における高次項 $(A_{20}, A_{11}, A_{30}, A_{21})$ の情報から後座屈挙動を予測するわけであるが、注意すべき点は分岐点の精算に怠慢であると、高次項になるほどその精度が悪化することである。

これに対して計算安定理論においては、分岐点にとどまることなく、分岐経路に切り替えた後はこれを実際にたどることにより、後座屈挙動を解明しようとする立場をとる。分岐経路への切り替えを確実に行えさえすれば、高次項を必要とせずとも後座屈解析が可能である。

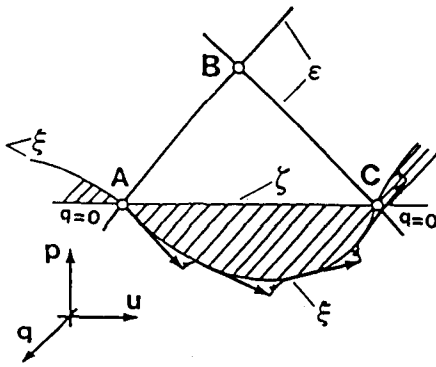


図1 軌道 $\xi(q)$ の定義

5. 計算安定理論 (Computational Stability Theory)

著者提案の分岐経路の探索方法 [1~6] の概要をまず単純分岐について解説し、その後多重分岐への応用を考える。分岐経路の探索とは、荷重ベクトル p_B から多少ずれた

$$p_A = p_B + \tau \quad (54)$$

に固定する場合、主経路上のつり合い点A以外に分岐点近傍で

$$E(u, p_A) = 0 \quad (55)$$

を満足するつり合い解 $C(u, p_A)$ を求めることに他ならない (図1)。これは数理的には非線形解法の問題に帰着され、NR法のような局所的収束性を有する解法のみでは追従できないため、式 (55) を大域的な非線形解法で解くことを考える。現在の点A (u_A, p_A) と分岐経路上の目標点C (u, p_A) とを結ぶ軌道 $\xi(q)$ を、つぎの式で定義する。

$$F(u, q) = 0 \quad (56)$$

ただし

$$F(u, q) = E(u, p_A) - q f \quad (57)$$

q はかく乱用の荷重変数で、 q の荷重ベクトル f は基本的には任意ベクトルであるが、点Aにおける固有ベクトル θ_A (これが分岐点Bにおいて切力となる) を採用する点の特徴である。

$$f = \theta_A \quad (58)$$

軌道 $\xi(q)$ に沿って q が変化し、 $q=0$ となる度に軌道 $\xi(q)$ はつり合い経路と交差する (図1)。 $\xi(q)$ を変位空間 R^n に直投影した曲線を ζ として、 ζ の出発点Aにおける接線ベクトルの方向を η とする。これらの曲線に関する微分幾何学的な特性をあらかじめ求めておく。式

(56) の線形化は

$$K \frac{d u}{d \xi} - f \frac{d q}{d \xi} = 0 \quad (59)$$

$\left(\frac{d u}{d \xi}, \frac{d q}{d \xi} \right)$ が、 $\xi(q)$ の単位接線ベクトルであるため

$$\left(\frac{d u}{d \xi} \right)^T \left(\frac{d u}{d \xi} \right) + \left(\frac{d q}{d \xi} \right)^2 = 1 \quad (60)$$

式 (59, 60) を $\left\{ \frac{d u}{d \xi}, \frac{d q}{d \xi} \right\}$ について解く。

次に $\xi(q)$ の曲率については、 K は一般に (u, p) に依存すること (q には依存しないこと)、 f は一定ベクトルであることを考慮し、さらにすでに計算された $\xi(q)$ の単位接線ベクトルを右辺に用いて

$$K \left(\frac{d^2 u}{d \xi^2} \right) - f \left(\frac{d^2 q}{d \xi^2} \right) = - \left[\frac{d K}{d u} \left(\frac{d u}{d \xi} \right) \right] \left(\frac{d u}{d \xi} \right) \quad (61)$$

および

$$\left(\frac{d u}{d \xi} \right)^T \left(\frac{d^2 u}{d \xi^2} \right) + \left(\frac{d q}{d \xi} \right) \left(\frac{d^2 q}{d \xi^2} \right) = 0 \quad (62)$$

を $\left\{ \frac{d^2 u}{d \xi^2}, \frac{d^2 q}{d \xi^2} \right\}$ について解く。以上が $\xi(q)$ の微分幾何である。さらに $\xi(q)$ に沿う変位成分の変化をそのまま R^n の変位空間に落としてできるのが曲線 ζ であるから、

$$d \zeta^2 + d q^2 = d \xi^2 \quad (63)$$

したがって

$$\left(\frac{d \zeta}{d \xi} \right) = \sqrt{1 + \left(\frac{d q}{d \xi} \right)^2} \quad (64)$$

さらに連鎖微分から

$$\left(\frac{d q}{d \zeta} \right) = \left(\frac{d q}{d \xi} \right) \left(\frac{d \xi}{d \zeta} \right) \quad (65)$$

式 (64, 65) から $\left(\frac{d q}{d \zeta} \right)$ 、および $\left(\frac{d \xi}{d \zeta} \right)$ について解くと、

$$\left(\frac{d q}{d \zeta} \right) = \pm \sqrt{\frac{\left(\frac{d q}{d \xi} \right)^2}{1 - \left(\frac{d q}{d \xi} \right)^2}} \quad (66)$$

$$\left(\frac{d \xi}{d \zeta} \right) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{d q}{d \xi} \right)^2}} \quad (67)$$

したがって ζ の単位接線ベクトルと曲率ベクトルは、 $\xi(q)$ に関する単位接線ベクトルと曲率ベクトルとを用いてそれぞれつぎのようになる。

$$\left(\frac{d u}{d \zeta} \right) = \frac{\left(\frac{d u}{d \xi} \right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{d q}{d \xi} \right)^2}} \quad (68)$$

$$\left(\frac{d^2 u}{d \zeta^2} \right) = \frac{1}{1 - \left(\frac{d q}{d \xi} \right)^2} \left(\frac{d^2 u}{d \xi^2} \right) + \frac{\left(\frac{d q}{d \xi} \right) \left(\frac{d^2 q}{d \xi^2} \right)}{\left\{ 1 - \left(\frac{d q}{d \xi} \right)^2 \right\}^2} \left(\frac{d u}{d \xi} \right) \quad (69)$$

$\xi(q)$ 、 ζ 、および η を点Aより分岐経路上の目標点Cに導くためのガイドラインとして、出発点Aにとどまって点Cの位置を予測するか、点Aを離脱してガイドラインの方向に移動しながら、何らかの停止条件を用いて点Cへの最接近点C'を探索するかのいずれかによって、つぎの4種類の手段が可能である。

5. 1 点Aにとどまり ξ 方向にある π の停留点を予測する方法 [6]

変位空間で定義された軌道 ξ にそって 変位 $\mathbf{u}$ を2次項まで展開する。

$\mathbf{u}(\xi) = \mathbf{u}_A + \xi \mathbf{t}_A + (1/2) \xi^2 \kappa_A$ (70)
ここに ξ を弧長とする。 ($\mathbf{t}_A$, κ_A) はそれぞれ、軌道 ξ の点Aにおける 単位接線ベクトルと 曲率ベクトルで、式 (68, 69) を用いて評価できる。式 (70) の変位場を π に代入して、

$$\frac{d\pi}{d\xi} = 0 \quad (71)$$

の条件より、

$$\xi \left\{ \lambda_A + \frac{1}{2} \xi \left(\theta_A^T \left[\frac{d\mathbf{K}}{d\mathbf{u}} \right]_A \theta_A \right) \theta_A + 3 \theta_A^T [\mathbf{K}_A] \kappa_A \right\} = 0 \quad (72)$$

ξ に沿う π の停留点のうち、出発点 $\xi = 0$ 以外のものは

$$\xi_{C'} = -2 \frac{\lambda_A}{\Lambda} \quad (73)$$

ただし

$$\Lambda = + \theta_A^T \left[\frac{d\mathbf{K}}{d\mathbf{u}} \right]_A \theta_A + 3 \theta_A^T [\mathbf{K}_A] \kappa_A \quad (74)$$

で与えられる。この弧長を 式 (70) に代入して 分岐解Cの近似値 C' が求まる。

5. 2 点Aにとどまり η 方向にある π の停留点を予測する方法

式 (70) における κ_A の評価が困難である場合は、曲率の効果を見捨て、

$$\mathbf{u}(\eta) = \mathbf{u}_A + \eta \mathbf{t}_A \quad (75)$$

$$\eta_{C'} = -2 \frac{\lambda_A}{\left(\theta_A^T \left[\frac{d\mathbf{K}}{d\mathbf{u}} \right]_A \theta_A \right) \theta_A} \quad (76)$$

と簡略化してもよい。

5. 3 η 方向に進み π の停留点を直線探索する方法

ξ の単位接線ベクトル $\mathbf{t}_A$ の方向 η に沿って真っ直ぐ進み式 (75) の変位方向に

$$\frac{d\pi}{d\eta} = 0 \quad (77)$$

を満たす π の停留点を直線探索する。式 (77) は

$$\mathbf{E}^T \mathbf{t}_A = 0 \quad (78)$$

となり、不つり合い力 $\mathbf{E}$ と探索方向 $\mathbf{t}_A$ との直交条件が探索の停止条件となる。

5. 4 $\xi(q)$ に沿って進み $q = 0$ のつり合い点に到達する方法

分岐点近傍で ξ の曲率が大きく目標点Cの付近に π の停留点が探索できない時、 $\xi(q)$ を軌道追跡法でたどって目標点Cに至ることもできる。 $\xi(q)$ に沿う q の値の変化を監視し、 q の符号が反転したら ($q=0$ の点を通じたなら) ただちにNR法に切り替えて、C点を精算する。詳細は [1, 2] による。

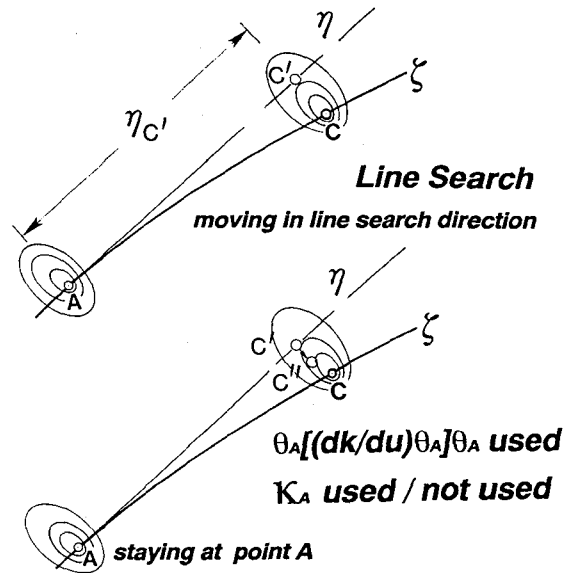


図2 分岐経路付近にある π の停留点の探索

6. 多重分岐

$\xi(q)$ を定義するベクトル $\mathbf{f}$ は、単純分岐については式 (58) で特定した。多重分岐においては分岐方向の決定に複数本の固有ベクトルが介在してくる。本研究では $\xi(q)$ の伸びる『方向』、すなわち各固有ベクトルの重みの相対比が重要であって、『方向』が決まれば目標点付近までの『距離』は合理的に評価できる。したがってベクトル $\mathbf{f}$ をつぎのように設定することにより、従来の不定量パラメータの個数を一個減らすことができる。

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ の多重分岐点のとき、

$$\mathbf{f} = \cos \alpha \theta_1 + \sin \alpha \theta_2 \quad (79)$$

α は (θ_1, θ_2) の張る空間における単位円上の点を特定する極座標の角度である。

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ のとき

$$\mathbf{f} = \cos \alpha \cos \beta \theta_1 + \sin \alpha \cos \beta \theta_2 + \sin \beta \theta_3 \quad (80)$$

(α, β) はそれぞれ $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ の張る空間における単位球面上の点を特定する経度と緯度である。以上多重分岐における不定量 (α, β) を $(\Delta \alpha, \Delta \beta)$ の増分で変化させながら、検出もれのないよう全円周、全球面に渡ってくまなく探索の網を広げる。なお単純分岐については不定パラメータの問題は全く存在しない。

7. 各経路切り替え方法の特質

以上5種類の経路切り替え方法について、その数値計算上の特質を考察する。記述した順で、

①一般安定理論：分岐方程式 (34) の根を求めて、式 (30, 31) で分岐解を予測する。

②出発点Aにとどまり、式 (73, 70) を用いる。曲率項を考慮する。

- ③出発点Aにとどまり、式(76、75)を用いる。曲率項を考慮しない。
- ④直線探索：moving型で式(78)を停止条件とする。
- ⑤ $\xi(q)$ の追跡：予測子・修正子法による軌道 $\xi(q)$ を追跡する。

とすると、従来の①に対して、④と⑤が本研究の計算安定理論で提案する分岐解の探索方法である。②と③はバショウな提案で、④と⑤の副産物である。

まず①では分岐構造の対称・非対称を判別するのに、係数の A_{20} を必要とする。すなわち K の u に関する一階微分(3次元配列)、したがって π の u に関する3階微分を必要とする。さらに安定・不安定の判別には、 A_{30} までをも必要とし、 A_{30} の評価には π の u に関する4階微分が必要となる。(A_{20} , A_{11} , A_{30} , A_{21}) はすべて分岐点Bで評価されるべき高次項であり、分岐点の精算に怠慢であったり、解析微分の代わりに差分近似を用いた場合、数値的誤差による支配項の特定が困難となる。特に係数 A_{20} は近似誤差に敏感であることが経験的に知られている。②と③も①と同様、 K の u に関する一階微分(3次元配列)を要求するが、①と異なる点は分岐点Bではなく、正則つり合い点Aにおいてこれを評価することである。②と③ではより高次の微分項を必要としない代わりに、対称・非対称・安定・不安定の判別には、分岐荷重をはさむ上下の荷重レベルで②と③の手続きを繰り返さねばならない。これまでの著者らの経験では、曲率項の考慮(②)は計算労力の割りに精度向上が期待できず、もし実務計算で使用するのであれば③を推奨する。④と⑤では、線形化方程式の範囲内での探索が可能であるが、直線探索・軌道追跡の際のステップサイズが問題となる。経験的には主経路に沿う出発点Aと分岐点Bとの間の距離(これは容易に算定できる)の(1/5)~(1/10)程度が妥当である。④と⑤では②と③と同様、分岐荷重をはさむ上下の荷重レベルで、しかも探索を開始する方向(進む向き)は、それぞれ $\pm\eta$ と $\pm\xi$ の両方向について探索を行って初めて対称・非対称・安定・不安定の分岐構造が判別できる。これは一本の分岐経路について高々4回の試行であるが(早ければ2回で済む)、高次項をとるか、4回分の試行をとるかは、計算安定理論の立場としては明らかである。

計算安定理論は、より一般的な安定問題に対処できる。例えば⑤は非線形解法の観点に立脚するもので、 $\delta\eta$ が存在しない非保存系の安定問題にも適用可能であり、多元連立非線形方程式の解曲線の枝わかれ現象(純粋に数学としての分岐問題)にも応用できる。これも計算安定理論の強みのひとつである。

8. 分岐モデル

Britvec Frame(単純非対称分岐)、ひし形フレーム(初期不整、単純/多重分岐、遊離経路)、逆L型フレーム(多重分岐

)、それに池田モデル^[13](群論的多重分岐)の4モデルを取り上げる。

8.1 Britvec Frame(単純非対称分岐)

図3のような正三角形のフレームの支配方程式を、部材回転角(ϕ_1, ϕ_2)と無次元化支点反力 h を自由度とする特殊な混合法^[3]で定式化すると式(81~83)のようになる。

$$\begin{cases} +9\phi_1 - 6\phi_2 + h \sin(\phi_1 + \frac{2}{3}\pi) \\ -0.5p \cos(\phi_1 + \frac{2}{3}\pi) = 0 & (81) \\ -6\phi_1 + 12\phi_2 + 0.5h \sin\phi_2 = 0 & (82) \\ -\cos(\phi_1 + \frac{2}{3}\pi) - 0.5\cos\phi_2 = 0 & (83) \end{cases}$$

ここで p と h は、荷重 P と支点反力 H をそれぞれ(EI/L^2)で除した無次元量である。

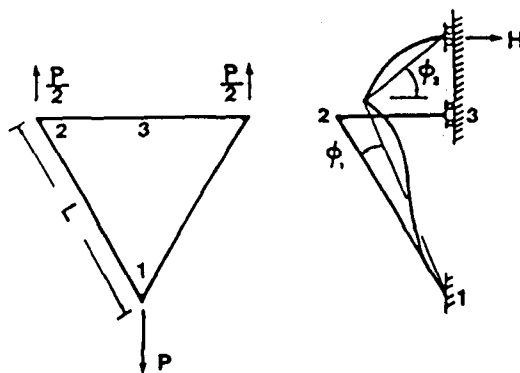


図3 Britvec Frame(単純非対称分岐)

この系の主経路に沿っては座屈点までは、変形が発生せず、従って主経路は荷重軸に一致する。分岐座屈点($p_{cr}=48\sqrt{3}$)を求め、分岐荷重の上と下の荷重レベルにおいて分岐解の予測子を、一般安定理論における式(48)、それに本研究の4種類の分岐経路探索法を適用して評価した結果をまとめたのが、表1(分岐荷重の上の荷重レベル)と表2(分岐荷重の下の方の荷重レベル)である。表1では経路切り替え方向に合わせて、左側にある出発点から、右側にある分岐解に向けて左→右と見る。表2では逆に右→左に向けて見る。出発点、経路切り替えに要した固有ベクトル、全部で5種類の探索方法による分岐解の予測子、それに精算された分岐解についてそれぞれ、混合法における変数(ϕ_1, ϕ_2, h)の値をまとめた。

最初の3種類の方法(一般安定理論、 κ_A used, κ_A NOT used)では分岐点にとどまり、高次項の情報から分岐解を予測する。残りの2種類の方法(直線探索、 $\xi(q)$ 追跡)では、分岐点を離脱し分岐解のある方向に移動し、移動先の点における情報をもとに分岐解の位置を探索する。これらの予測点より分岐解Cへは、すべ

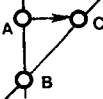
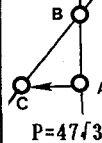
表1 分岐荷重の上方で分岐経路を探索 Bifurcation Point $P_{cr}=48\sqrt{3}$								
出発点 A		荷重 レベル 経路 切替え	一 般 安 定 理 論	$dK/d\mathbf{u}$ used		直 線 探 査	$\xi(q)$ 追 跡	到達した 分岐経路 上の点C
$\mathbf{u}$	θ_A			NOT used	used			
$\phi_1 = 0$ $\phi_2 = 0$ $h = -24.5$	$-.4227E^{-2}$ $+.1028$ $+.9947$	$P=49\sqrt{3}$ 	$-.1970E^{-2}$ $+.4799E^{-1}$ $-.2406E^{+2}$	$-.1967E^{-2}$ $+.4797E^{-1}$ $-.2404E^{+2}$	$-.6638E^{-3}$ $+.6051E^{-1}$ $-.2404E^{+2}$	$-.1945E^{-2}$ $+.4738E^{-1}$ $-.2404E^{+2}$	$-.5529E^{-3}$ $+.4391E^{-1}$ $-.2416E^{+2}$	$-.5540E^{-3}$ $+.4381E^{-1}$ $-.2416E^{+2}$

表2 分岐荷重の下方で分岐経路を探索 Bifurcation Point $P_{cr}=48\sqrt{3}$								
到達した 分岐経路 上の点C	$\xi(q)$ 追 跡	直 線 探 査	$dK/d\mathbf{u}$ used		一 般 安 定 理 論	荷重 レベル 経路 切替え	出発点 A	
			used	NOT used			θ_A	$\mathbf{u}$
$-.8613E^{-3}$ $-.5464E^{-1}$ $-.2382E^{+2}$	$-.8600E^{-3}$ $-.5472E^{-1}$ $-.2382E^{+2}$	$-.2045E^{-2}$ $-.5071E^{-1}$ $-.2372E^{+2}$	$-.6961E^{-3}$ $-.3758E^{-1}$ $-.2372E^{+2}$	$-.1981E^{-2}$ $-.4914E^{-1}$ $-.2371E^{+2}$	$-.1981E^{-2}$ $-.4913E^{-1}$ $-.2371E^{+2}$	 $P=47\sqrt{3}$	$+.9090E^{-2}$ $+.2254$ $+.9742$	$\phi_1 = 0$ $\phi_2 = 0$ $h = -23.5$

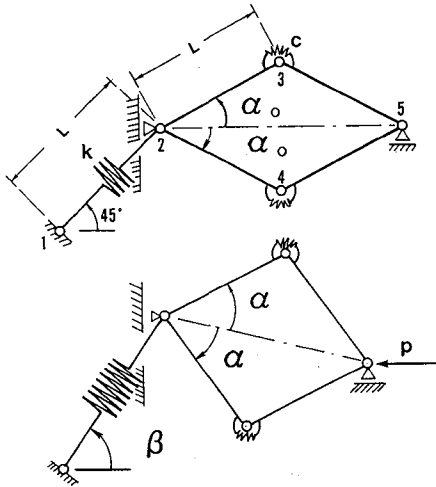


図4 剛体・バネのひし形フレーム

$$\begin{aligned}
 \pi(\alpha, \beta, p) = & +4(\alpha - \alpha_0)^2 + \\
 & + \left(\frac{1}{2}\right) k \{ (\cos \beta_0 / \cos \beta) - 1 \}^2 \\
 & - 2 p \cos \alpha_0 \\
 & + p \{ 4 \cos^2 \alpha - (\cos \beta_0 \tan \beta - \sin \beta_0)^2 \}^{1/2} \\
 & (84)
 \end{aligned}$$

このモデルでは初期不整 α_0 を種々に変えて、単純分岐・多重分岐の発生するようにモデルを操作することが可能である。以下

$\alpha_0 = 0$ の完全系について、

$\beta_0 = 45^\circ$ の場合

を考える。さらに構造シミュラスより、伸縮バネ剛性 K と回転バネ剛性 C の比が $k (=KL^2/C) = 4.0$ のとき、 $p_{cr} = 4.0$ において接線剛性行列のランクが 0 となる多重分岐が発生する。この多重分岐モデルについて、分岐経路を直線探索で探索した結果、表 3 のように対称安定分岐・対称不安定分岐・非対称分岐の計 3 本の分岐経路が検出された。

この探索過程では、分岐点近傍を通過している遊離経路を偶然にも発見した。分岐点近傍での探索の対象となるつり合い解は、かならずしも分岐点から派生している経路上のものである必要はなく、その付近にある解がすべて検出の対象となるためである。

て NR 反復法で問題なく到達できた。総合的に見て、計算労力が比較的少なくて済む点で直線探索が、そして精度（信頼性）の点で、 $\xi(q)$ 追跡が優れている。

8.2 ひし形フレーム（初期不整、単純／多重分岐、遊離経路）

図 4 にある剛体・弾性バネのひし形フレームについて、 (α, β) を自由度、 (α_0, β_0) をその初期値（ α_0 は初期不整）として、任意の変形時の無次元化 π を求めると、つぎようになる。

表3 ひし形フレームにおける多重分岐解				
α	-0.383958	+0.383958	0	(分岐点近傍で 探索できず)
β	+0.785398	+0.785398	0.8021154	
p	+4.1			
経路	対称安定分岐経路		非対称分岐経路	遊離経路
α	-0.723547	+0.723547	0	0
β	+1.098541	+1.098541	0.7687738	+1.277649
p	+3.9			
経路	対称不安定分岐経路		非対称分岐経路	遊離経路

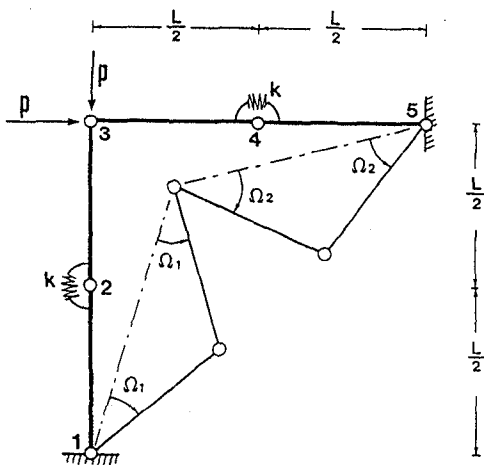


図5 逆L形フレーム

8.3 逆L型フレーム

図5にある剛体・弾性材の逆L型フレームについて、分岐座屈直後の初期後座屈領域を考える。自由度 (Ω_1, Ω_2) の高次項を無視し π を近似的に評価するとつぎのような無次元化表示となる。

$$\pi(\Omega_1, \Omega_2, p) = +2(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)$$

$$-p \left\{ \left(\frac{1}{2} \right) (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{4} \right) \frac{\Omega_1^4}{2 - \Omega_2^2} + \left(\frac{1}{4} \right) \frac{\Omega_2^4}{2 - \Omega_1^2} \right\} \quad (85)$$

π は (Ω_1, Ω_2) の偶関数となり、(Ω_1, Ω_2) の絶対値が同じければ、その正負に関わらず後座屈領域における耐荷力は同じである。座屈点 $p_{cr} = 4.0$ における接線剛性行列のランクは2となる。 $p = 3.7$ および 4.2 の荷重レベルで2本の固有値固有ベクトルの張る部分空間において、経シヤルマップをプロットしたのが図6である。分岐荷重 ($p_{cr} = 4.0$) の下側では主経路以外に8個の分岐解 (4本の対称不安定分岐経路) が確認できる。

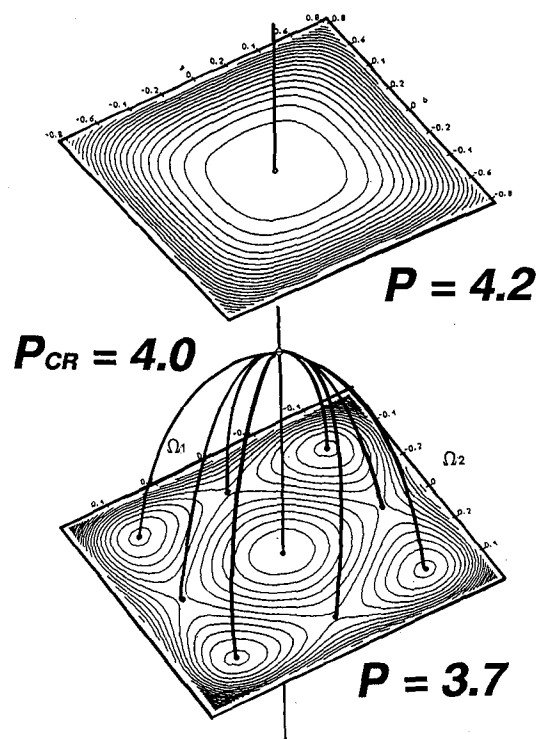


図6 π の等高線

対称性から経シヤルマップの1/4領域のみを取り出し、 $\Delta \alpha = 15^\circ$ 刻みで全部で7方向について直線探索と $\xi(q)$ 追跡による分岐解の探索を試みた結果が図7である。直線探索と $\xi(q)$ 追跡ともに、すべての分岐解を検出もれなく探索できた。同じ α の値でも、すなわち出発点における ξ の接線方向は同じでも、直線探索と $\xi(q)$ 追跡とでは、到達する分岐解は異なってくる場合がある (例えば $\alpha = 30^\circ$ と 60°)。これは直線探索は変位空間を直進するのに対して、 $\xi(q)$ 追跡では現在点における経シヤル曲面の凹凸を感知しながら目処点に至るためである。

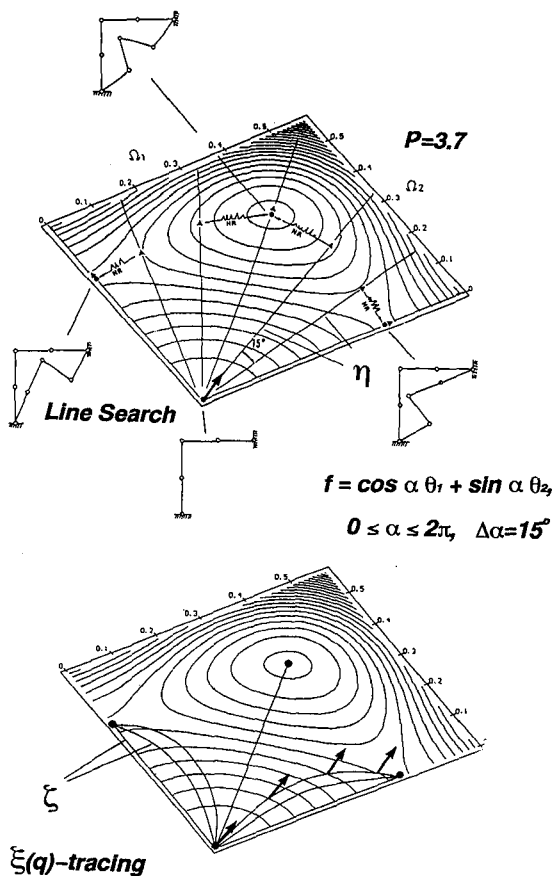


図7 ¼ 領域における直線探索とξ(q)追跡

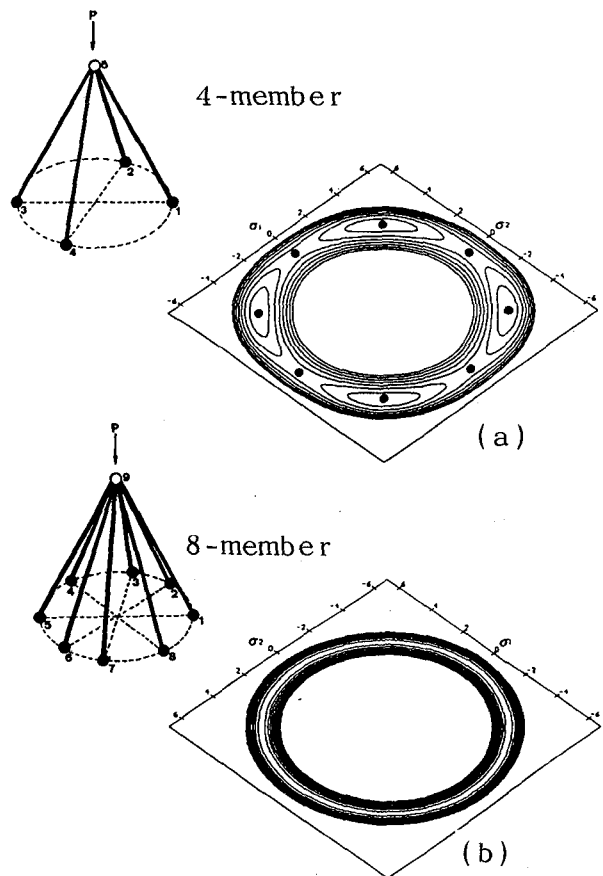


図8 池田モデル

8. 4 池田モデル^[13] (群論的多重分岐)

軸対称にユ-型に部材を組んだ3自由度の空間トラスの頂点に鉛直荷重を載荷する(図8)。これは系の対称性から、部材本数が増加するとランク1のままで分岐経路の本数が急増する群論的多重分岐モデルである。池田により展開された群論的分岐理論^[13, 14, 15]とは別個に、本研究の(対称性を考慮しない)探索方法の適用を試みた。

4本部材(図8(a))と8本部材(図8(b))の場合について、分岐荷重の下でπ曲面の加トをまず試みた。4本モデルのπ曲面は、8個の分岐解の存在を明確に示し、直線探索とNR法とによって問題なくこれらの分岐経路への移行ができた。部材本数が増すにつれ分岐解が主経路の回りの円周上に密に出現し、円周方向に沿うπ曲面の凹凸は消滅し、解の分離度が急激に悪化する。このため8本モデルについては、各直線探索方向にπの停留点を検出できたものの、NR法による反復計算の段階で収束せず、分岐解の精算は不可能であった。

このため、解の近接度に負けぬ位のきめ細かさで探索の網目を設定する(より小さなΔα、Δβと、より小さな直線探索ステップΔηを選択する)ことにより、最初のいくつかの分岐解を見つけ、その後この探索済の解を支配

方程式から排除して(そうなるよう方程式を数学的に書き換えて、既知の解を"間引き-deflate out-"して、解の分離度の向上を図る)、残りのすべての解を求める効率的な計算戦略の検討が今後必要である。このように分岐解が異常発生する例は現実には極めて稀であるが、このモデルはモデルの単純さとこれに反する解挙動の複雑さの故に、新しい数理論の機能性を試す良い試金石である。

9. まとめ

従来の『一般安定理論』と『計算安定理論』を概観した。両者の基本的立場の違い(mathematical/computational, staying型/moving型)からも明らかなように、分岐経路の探索方法は計算安定理論において、一般安定理論における高次項による分岐構造の解明と同等の重要性をもってくる。弾性単純分岐問題は計算安定理論においても、特異点のビポイント、分岐経路の探索方法ともにすでに完全に決着している。

今後の分岐問題における課題は、Odenのまとめた報告書^[12]にもあるように多重分岐問題である。多重分岐に対する経路切り替え方法のまとめとしてつぎの点を挙げておく。

- ①線形項までを使用した探査が可能である。
- ②分岐点の精確な位置に関する直接的な情報を必要としない。すなわち分岐点を精確にピンポイントすることに多少怠慢であっても構わない。
- ③全ての多重分岐経路を検出もれなく探査するためには、現状では試行錯誤は止むを得ない。存在する分岐解のすべてを、いかに効率的に網羅できるかが重要である。
- ④通常の分岐方向予測子のなかに抱き込まれる不定量の個数を、和固有値の個数より一箇少なくすることができる。

多重分岐に関しては今後、計算安定理論と群論的分岐理論の特質を融合した統合的で汎用性の高い数理分岐理論の構築が望まれる。

参考文献

- [1] Fujii, F. and Asada, K., "Branch-switching in simple spatial bifurcation models", SEIKEN-IASS Symposium on Nonlinear Analysis and Design for Shell and Spatial Structures, Oct. 20-22, 1993, Tokyo
- [2] Fujii, F. and Kitagawa, T., "Branching predictor in bifurcation of 2D elastic frames", 『Computational Mechanics』, Balkema, edited by S. Valliappan, Vol. 2, 733-738, 1993
- [3] Fujii, F., "Scheme for Elasticas with Snap-back and Looping", EM, ASCE, Vol. 115, No. 10, 2166-2181, 1989
- [4] Fujii, F. and Choong, K.K., "Branch-Switching in Bifurcation of Structures", EM, ASCE, Vol. 118, No. 8, 1578-1596, 1992
- [5] Choong, K.K., Fujii, F. and Kitagawa, T., "Access to bifurcated and isolated equilibrium branches of structures", in 『Computational Mechanics』, Balkema, Rotterdam, 463-468, 1991
- [6] Fujii, F. "Bifurcation and Path-Switching in Nonlinear Elasticity", Invited lecture, WCCM 3rd, August 1-5, 1994, Makuhari
- [7] 藤井文夫、内藤幹夫、"大域的収束性を有する非線形つり合い方程式の解法"、日本応用数理学会 93年度年会、93年9月、大津市 龍谷大学にて
- [8] 藤井文夫、内藤幹夫、"任意点よりつり合い経路に到達できる大域的非線形解法"、構造工学論文集 Vol. 40A (1994年3月)、395-406
- [9] 藤井文夫、"特異つり合い点のピンポイント法について"、日本応用数理学会 平成6年度年会、1994年9月、
- [10] Wriggers, p., Wagner, W. and Mische, C.
A quadratically convergent procedure for the calculation of stability points in finite element analysis, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 70(1988), 329-347
- [11] Wriggers, P. and Simo, J.C., "A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points, Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol. 30, 155-176, 1990
- [12] U.S. National Committee on Theoretical and Applied Mechanics, Research Directions in Computational Mechanics, Manufacturing Studies Board, Commission on Engineering and Technical Systems, National Research Council, National Academy Press, Washington, D.C., 1991
- [13] Ikeda, K., Nishino, F., Hartono, W., Torii, K., "Bifurcation Behavior of an axisymmetric elastic space truss", Structural Eng./Earthquake Eng., Vol. 15, No. 1, 209-212, 1988, JSCE
- [14] Ikeda, K., Murota, K. and Fujii, H., Bifurcation Hierarchy of symmetric Structures, Int. J. of Solids and Structures, Vol. 27, No. 12, 1551-1573, 1991
- [15] Ikeda, K., Providencia, P. and Hunt, G.W.
Multiple-equilibria for unlinked and weakly-linked cellular structural forms, Int. J. of Solids and Structures, Vol. 30, No. 3, 371-384, 1993

(1994年9月14日受付)