

特異つり合い点をピンポイントするための局所的大域的非線形解法

Locally and Globally Convergent Nonlinear Schemes to
pinpoint the stability points

藤井文夫* , 内藤幹夫**

Fumio FUJII and Mikio Naitou

* Dr.-Ing., 岐阜大学助教授 工学部 (〒501-11 岐阜市柳戸)

** 愛知県

Incremental and iterative nonlinear schemes to pinpoint the stability points in nonlinear elasticity are described. The schemes are locally or globally convergent, so that the attempt to precisely compute limit points and bifurcation points may be initiated at an arbitrary regular equilibrium point or at any non-equilibrium point. The locally convergent scheme may be used in the usual arc-length control procedure. In the globally convergent schemes, the singular points may be arbitrarily far away from the initial starting point. Numerical examples are computed to test the computational theories.

Key Words: Singular Point, Snap-Through, Bifurcation, Stability, Nonlinear Solution

1. はじめに

離散構造系の有限変位問題の支配方程式

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}, p) = \mathbf{0} \quad (1)$$

は通常、節点変位 $\mathbf{u}$ (N自由度) と 荷重変数 p からなる (N+1) 個の変数の間に課せられたN本の拘束条件としてのつり合い関係を記述するものであり、式 (1) を満足する点 $(\mathbf{u}, p)$ の集合が、多次元空間 R^{N+1} におけるつり合い経路を定義する。このつり合い経路上にある正則つり合い点の逐次計算 (軌道追跡) に関する研究は、主に1970年代終盤から1980年代初頭にかけて精力的に行われ数多くの提案がなされており、すでに完結した感がある。その後1988年にExtended System^[6, 7]の発表を機に、特異つり合い点がからむ計算安定理論 (Computational Stability Theory) が、最近の話題のひとつとなってきた。

本研究では特異つり合い点を効率的に、しかも精度よくピンポイントするために、局所的または大域的収束性を有する3種類の非線形解法を提案する (表1)。ひとつは局所的収束性を持つ『特異点精算法 (仮称、図1)』である。あと2つの大域的非線形解法は、『迂回路法 (仮称)』と『ホモトピー法』で、それぞれ任意の正則つり合い点と任意の非つり合い点を出発して、設定した軌道をたどり目標点としての特異つり合い点に到達できる (図2)。表1では従来の弧長法との対比のなかで、これらの提案理論の特質を簡単にまとめた。

波線部分~~~~が提案理論である。

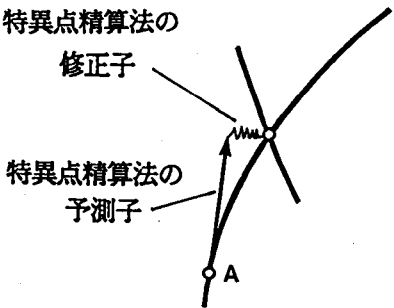


図1 特異点精算法

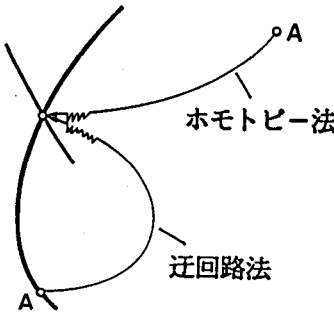


図2 迂回路法とホモトピー法

Extended System^[6, 7]はニュートン・ラフソン (NR) 法による特異点の反復解法であるため、局所的な収束性しか持たず、特異点の近傍に至ってはじめて機能する。本研究のスキームは局所的収束性と大域的収束性の両面を持つ特異点のピンポイント法であり、既存の弧長法に容易に組み込める点で、ま

表1 提案する特異点のピンポイント方法の特質 q : かく乱変数、 (λ_A, θ_A) : 出発点での固有ベア					
大域的収束性を有する非線形解法			局所的収束性を有する非線形解法		
数理論	出発点A	軌道方程式	軌道追跡法	特異点方程式	特異点の精算方法
弧長法	任意の つり合い点	$E(u, p) = 0$	予測子・ 修正子法 による 軌道追跡	$E(u, p) = 0$ $\lambda = 0$	特異点精算法 (NR反復法)
迂回路法		$E(u, p) - (q - q^2) \theta_A = 0$ $\lambda - (1 - q^2) \lambda_A = 0$			
ピンポイント法	任意の 非つり合い点	$E(u, p) - q \theta_A = 0$ $\lambda - q \lambda_A = 0$			

た全くの任意点より特異点の探索を開始できる点で優れている^[4]。

大域的な非線形解法の基本的発想は、出発点と目標点とを連続的に結ぶ軌道を解曲線としてもつ方程式系を作為的に組んで、軌道追跡法でこの軌道をたどり目標点に至ることである^[1, 2]。出発点と目標点とを連続的に結ぶ軌道をいかに定義するか、この数理的アイデアが鍵となる。軌道追跡の際に多用するのが式(1)の線形化方程式

$$K du - dp e = 0 \quad (2)$$

であり、ここで K は接線剛性行列、 e は p の基本荷重ベクトルである。

2. 固有値の予測

本研究では、 K の特定の固有ベア(固有値と対応する固有ベクトルを数学的には固有ベアと呼ぶ)を選び出し、この固有ベアが加わるとなる(固有ベアの固有値がゼロとなる)特異点の方向に向かって構造系の変形状態を誘導して行く。このとき、仮定した方向に変形を押し進めた場合、注目する固有値がどれだけ変化するかを、現在点において予測する必要がある。現在点の座標 (u, p) に微小増分 $(\Delta u, \Delta p)$ を与えた時、移動先 $(u + \Delta u, p + \Delta p)$ における注目する固有値の変動量 $\Delta \lambda$ は、

$$\Delta \lambda = \theta^T \Delta K \theta \quad (3)$$

を用いて一次のオーダーで予測できる^[3]。ここに ΔK は $(\Delta u, \Delta p)$ による K の変化分であり、現在点において注目する j 番目の固有ベア (λ, θ) は、 K の標準固有値問題

$$K \theta_j = \lambda_j \theta_j \quad (4)$$

$$|\theta_j| = 1 \quad (5)$$

を Rayleigh 商反復(3次収束)で解いて得られる。増分 $(\Delta u, \Delta p)$ の大きさが十分に小さく、しかも常に更新固有ベアを初期値として採用すれば、不本意に別の固有ベアに切り替わってしまうこともなく、固有ベアの計算量は LDL^T 分解による連立剛性方程式の解法のほぼ2~3回分に相当する。 K が u のみに依存する場合は、 ΔK は差分を用いて

$$\Delta K = (1/\varepsilon) \{ K(u + \varepsilon \Delta u) - K(u) \} \quad (6)$$

で評価し、問題にも依るが $\varepsilon |\Delta u|$ と $|u|$ との比が、例えば 1/1000 程度のオーダーとなるようにスケール ε (> 0) の値を決める。

増分節点変位 Δu が、3本のベクトル $(\Delta u_o, \Delta u_r, \Delta u_s)$ の線形結合

$$\Delta u = \Delta u_o + r \Delta u_r + s \Delta u_s \quad (7)$$

で与えられるとき (r, s は別途決める倍率)、この Δu による固有値の変化量は

$$\Delta \lambda = \Delta \lambda_o + r \Delta \lambda_r + s \Delta \lambda_s \quad (8)$$

で予測できる。ここに差分により

$$\Delta \lambda_o = \theta^T (1/\varepsilon_o) \{ K(u + \varepsilon_o \Delta u_o) - K(u) \} \theta \quad (9)$$

$$\Delta \lambda_r = \theta^T (1/\varepsilon_r) \{ K(u + \varepsilon_r \Delta u_r) - K(u) \} \theta \quad (10)$$

$$\Delta \lambda_s = \theta^T (1/\varepsilon_s) \{ K(u + \varepsilon_s \Delta u_s) - K(u) \} \theta \quad (11)$$

である。以下ではポイントとなる方程式を (ボックス) で囲み、その解説または誘導をボックスの外に示す。

3. 正則点弧長法(通常の弧長法)

[つり合い経路の軌道方程式]
 $E(u, p) = 0 \quad (1)$

比較参照のため、正則点弧長法(通常の弧長法)の標準的な算法を簡単にレビューしておく。つり合い経路の追跡法に関しては数多くの提案がなされているが、各種のパラメータの有効性について議論することはこの論文の目的ではないので以下ではきわめて初歩的なアルゴリズムを掲げるだけにとどめる。以下 Δ (> 0) はステップサイズである。

[正則点弧長法の予測子方程式]
 $K du - dp e = 0 \quad (2)$
 $du^T du + dp^2 = \Delta^2 \quad (12)$

正則点弧長法の予測子計算ではまず、荷重変数の単位増分 $dp = 1$ に対して

$$K d u_p = +e \quad (13)$$

を $d u_p$ について解き、式 (2) より

$$d u = d p d u_p \quad (14)$$

とする。式 (14) を式 (12) に代入して、 $d p$ について解くと、式 (15) のようになる。右辺の土で追跡方向を制御する。式 (15) の後、式 (14) により $d u$ が計算される。

〔正則点弧長法の予測子〕

$$d p = \pm \frac{\Delta}{\sqrt{d u_p^T d u_p + 1}} \quad (15)$$

$$d u = d p d u_p \quad (14)$$

この正則弧長法の予測子の先端点はつり合い経路から外れることになり、つぎの修正子計算によりつり合い経路に引き戻す必要がある。

〔正則点弧長法の修正子方程式〕

$$K \delta u - \delta p e = -E \quad (16)$$

$$d u^T \delta u + d p \delta p = 0 \quad (17)$$

修正子計算ではまず、残差ベクトル E に対して

$$K \delta u_0 = -E \quad (18)$$

および、 $\delta p = 1$ に対して

$$K \delta u_p = +e \quad (19)$$

をそれぞれ (δu_0 、 δu_p) について解き、

$$\delta u = \delta u_0 + \delta p \delta u_p \quad (20)$$

とする。式 (20) を式 (17) に代入して、 δp について解くと式 (21) のようになる。 δu は式 (20) から求まる。

〔正則点弧長法の修正子〕

$$\delta p = - \frac{d u^T \delta u_0}{d u^T \delta u_p + d p} \quad (21)$$

$$\delta u = \delta u_0 + \delta p \delta u_p \quad (20)$$

4. 特異点精算法 (図1)

〔特異点の方程式〕

$$E(u, p) = 0 \quad (1)$$

$$\lambda = 0 \quad (22)$$

つり合い経路上の特異点は、式 (1、22) によって特定される。ここで λ は接線剛性行列 K の固有値で、対応する固有ベクトル θ とともにその特異点で切力な固有ベクトルを成す。特異点精算法ではつり合い経路上に引き戻すのみならず、着地点が特異点となるよう反復計算を制御する必要がある。正則点弧長法との対応から、便宜上特異点精算法を 予測子・修正子の2つに分けて考える (本質的に両者は同じ)。

〔特異点精算法の予測子方程式〕

$$K d u - d p e = 0 \quad (2)$$

$$\lambda + d \lambda = 0 \quad (23)$$

現在いる正則つり合い点において、まず $d p = 1$ について

$$K d u_p = e \quad (24)$$

を $d u_p$ について解く。式 (2) より

$$d u = d p d u_p \quad (25)$$

である。この $d u$ を与えたときの $d \lambda$ は式 (8~11) から予測可能で、

$$d \lambda = d p d \lambda_p \quad (26)$$

となる。 $d \lambda_p$ は $d u_p$ による λ の変動量である。式 (26) を式 (23) に代入して、 $d p$ について解くと式 (27) となる。式 (25) から $d u$ を求める。

〔特異点精算法の予測子〕

$$d p = - \frac{\lambda}{d \lambda_p} \quad (27)$$

$$d u = d p d u_p \quad (25)$$

この予測子の先端点は特異点の近傍まで来ているが、つり合い経路からは外れており、しかも目標の特異点はまだ精確にはどポイントできていない。

〔特異点精算法の修正子方程式〕

$$K \delta u - \delta p e = -E \quad (16)$$

$$\lambda + \delta \lambda = 0 \quad (28)$$

目標とする特異点の近傍にある任意の非つり合い点において

$$K \delta u_0 = -E \quad (29)$$

および、 $\delta p = 1$ に対して

$$K \delta u_p = +e \quad (30)$$

をそれぞれ (δu_0 、 δu_p) について解き、式 (16) より

$$\delta u = \delta u_0 + \delta p \delta u_p \quad (31)$$

とする。対応して固有値の変動量 $\delta \lambda$ もつぎのように計算される。

$$\delta \lambda = \delta \lambda_0 + \delta p \delta \lambda_p \quad (32)$$

($\delta \lambda_0$ 、 $\delta \lambda_p$) は、それぞれ (δu_0 、 δu_p) による固有値の変動量である。式 (32) を式 (28) に代入して、 δp について解き、 δu についてもまとめると、式 (33、31) のようである。

〔特異点精算法の修正子〕

$$\delta p = - \frac{\lambda + \delta \lambda_0}{\delta \lambda_p} \quad (33)$$

$$\delta u = \delta u_0 + \delta p \delta u_p \quad (31)$$

特異点精算法の修正子計算において、 E 、 δu_0 、および $\delta \lambda_0$ がゼロとなり、 $\delta \rightarrow d$ としたとき、特異点精算法の予測子計算と一致し両者は本質的に同一である。局所的収束性しかない特異点精算法は特異点付近で初めて有効に機能するもので、通常は信頼性のある解の初期値を与える序盤用の大域的線形解法と併用して応用されるべきものであり、特異点の付近までは大域的収束性

のある正則点弧長法、またはつぎの迂回路法、あるいはホトピー法で誘導してくる。

5. 迂回路法 (図2)

—[迂回路法の軌道方程式]—

$$\mathbf{E} - (q - q^2) \mathbf{f} = \mathbf{O} \quad (34)$$

$$\lambda - (1 - q^2) \lambda_A = 0 \quad (35)$$

出発点Aを正則つり合い点にとる場合は特異点に至る軌道を、式(34、35)で定義する。ここで $\mathbf{f}$ は基本的には任意ベクトルであり(後述)、変数は $(\mathbf{u}, p, q)$ の $(N+2)$ 個である。出発点A $(\mathbf{u}_A, p_A)$ において $q=0$ で、 $q=1$ で特異点に至る。実際の迂回路追跡における予測子/修正子計算はつぎのようである。以下 $\Delta (>0)$ はステップサイズである。

—[迂回路法の予測子方程式]—

$$\mathbf{K} d\mathbf{u} - dp\mathbf{e} - dq(1-2q)\mathbf{f} = \mathbf{O} \quad (36)$$

$$d\lambda + 2q\lambda_A dq = 0 \quad (37)$$

$$d\mathbf{u}^T d\mathbf{u} + dp^2 + dq^2 = \Delta^2 \quad (38)$$

予測子計算ではまず $dp=1$ 、 $dq=1$ に対してそれぞれ、

$$\mathbf{K} d\mathbf{u}_p = +\mathbf{e} \quad (39)$$

$$\mathbf{K} d\mathbf{u}_q = +(1-2q)\mathbf{f} \quad (40)$$

を $(d\mathbf{u}_p, d\mathbf{u}_q)$ について解く。式(36)から

$$d\mathbf{u} = dp d\mathbf{u}_p + dq d\mathbf{u}_q \quad (41)$$

この変位増分に対する固有値の変化も、式(8~11)より、

$$d\lambda = dp d\lambda_p + dq d\lambda_q \quad (42)$$

となる。これを式(37)に代入して式(44)を得る。式(44、41)を式(38)に代入して dp について解くと、式(43)のようになる。ただし式(43)の右辺において $\pm$ は軌道の追跡方向を表し、 Λ は

$$\Lambda = - \frac{d\lambda_p}{d\lambda_q + 2q\lambda_A} \quad (45)$$

で定義した。

—[迂回路法の修正子方程式]—

$$\mathbf{K} \delta \mathbf{u} - \delta p \mathbf{e} - \delta q(1-2q)\mathbf{f} = -\{\mathbf{E} - (q - q^2)\mathbf{f}\} \quad (46)$$

$$\delta \lambda + 2q\lambda_A \delta q = -\{\lambda - (1-q^2)\lambda_A\} \quad (47)$$

$$d\mathbf{u}^T \delta \mathbf{u} + dp \delta p + dq \delta q = 0 \quad (48)$$

修正子計算ではまず、

$$\mathbf{K} \delta \mathbf{u}_0 = -\{\mathbf{E} - (q - q^2)\mathbf{f}\} \quad (49)$$

$$\mathbf{K} \delta \mathbf{u}_p = +\mathbf{e} \quad (50)$$

$$\mathbf{K} \delta \mathbf{u}_q = +(1-2q)\mathbf{f} \quad (51)$$

をそれぞれ $(\delta \mathbf{u}_0, \delta \mathbf{u}_p, \delta \mathbf{u}_q)$ について解く。式(46)から

$$\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}_0 + \delta p \delta \mathbf{u}_p + \delta q \delta \mathbf{u}_q \quad (52)$$

対応して固有値についても、式(8~11)より、

$$\delta \lambda = \delta \lambda_0 + \delta p \delta \lambda_p + \delta q \delta \lambda_q \quad (53)$$

式(53、52)を、それぞれ(47、48)に代入して式(54、55)を得る。

$$\delta \lambda_p \delta p + (\delta \lambda_q + 2q\lambda_A) \delta q = -\{\lambda - (1-q^2)\lambda_A + \delta \lambda_0\} \quad (54)$$

$$(d\mathbf{u}^T \delta \mathbf{u}_p + dp) \delta p + (d\mathbf{u}^T \delta \mathbf{u}_q + dq) \delta q = -d\mathbf{u}^T \delta \mathbf{u}_0 \quad (55)$$

式(54、55)を $(\delta p, \delta q)$ について連立で解いて、式(56、57)を得る。

6. ホトピー法 (図2)

—[ホトピー法の軌道方程式]—

$$\mathbf{E} - q\mathbf{E}_A = \mathbf{O} \quad (58)$$

$$\lambda - q\lambda_A = 0 \quad (59)$$

出発点Aを非つり合い点にとる場合は、目標の特異点に至る軌道を、式(58、59)で定義する。ここで $\mathbf{E}_A$ は出発点Aにおけるつり合い力で、

$$\mathbf{E}_A = \mathbf{E}(\mathbf{u}_A, p_A) \quad (60)$$

である。自由変数は $(\mathbf{u}, p, q)$ の $(N+2)$ 個で、出点A $(\mathbf{u}_A, p_A)$ で $q=1$ で、 $q=0$ のとき特異点に至る。 $\Delta (>0)$ をステップサイズとして、ホトピー法の軌道追跡の実際はつぎのようである。

—[迂回路法の予測子]—

$$dp = \pm \frac{\Delta}{\sqrt{d\mathbf{u}_p^T d\mathbf{u}_p + 1 + 2\Lambda d\mathbf{u}_p^T d\mathbf{u}_q + \Lambda^2 (d\mathbf{u}_q^T d\mathbf{u}_q + 1)}} \quad (43)$$

$$dq = - \frac{d\lambda_p}{d\lambda_q + 2q\lambda_A} dp = + \Lambda dp \quad (44)$$

$$d\mathbf{u} = dp d\mathbf{u}_p + dq d\mathbf{u}_q \quad (41)$$

[迂回路法の修正子]

$$\delta p = \frac{-\{\lambda - (1-q^2)\lambda_A + \delta\lambda_o\}(\mathbf{d}\mathbf{u}^T \delta \mathbf{u}_q + dq) + (\delta\lambda_q + 2q\lambda_A)\mathbf{d}\mathbf{u}^T \delta \mathbf{u}_o}{\delta\lambda_p(\mathbf{d}\mathbf{u}^T \delta \mathbf{u}_q + dq) - (\delta\lambda_q + 2q\lambda_A)(\mathbf{d}\mathbf{u}^T \delta \mathbf{u}_p + dp)} \quad (56)$$

$$\delta q = \frac{-\delta\lambda_p \mathbf{d}\mathbf{u}^T \delta \mathbf{u}_o + \{\lambda - (1-q^2)\lambda_A + \delta\lambda_o\}(\mathbf{d}\mathbf{u}^T \delta \mathbf{u}_p + dp)}{\delta\lambda_p(\mathbf{d}\mathbf{u}^T \delta \mathbf{u}_q + dq) - (\delta\lambda_q + 2q\lambda_A)(\mathbf{d}\mathbf{u}^T \delta \mathbf{u}_p + dp)} \quad (57)$$

$$\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}_o + \delta p \delta \mathbf{u}_p + \delta q \delta \mathbf{u}_q \quad (52)$$

[ホモトピー法の予測子方程式]

$$\mathbf{K} \mathbf{d}\mathbf{u} - dp \mathbf{e} - dq \mathbf{E}_A = \mathbf{0} \quad (61)$$

$$d\lambda - dq \lambda_A = 0 \quad (62)$$

$$\mathbf{d}\mathbf{u}^T \mathbf{d}\mathbf{u} + dp^2 + dq^2 = \Delta^2 \quad (63)$$

まず予測子計算では、

$$\mathbf{K} \mathbf{d}\mathbf{u}_p = +\mathbf{e} \quad (dp=1) \quad (64)$$

$$\mathbf{K} \mathbf{d}\mathbf{u}_q = +\mathbf{E}_A \quad (dq=1) \quad (65)$$

を $(\mathbf{d}\mathbf{u}_p, \mathbf{d}\mathbf{u}_q)$ について解く。式(61)より

$$\mathbf{d}\mathbf{u} = dp \mathbf{d}\mathbf{u}_p + dq \mathbf{d}\mathbf{u}_q \quad (66)$$

この変位増分に対応する固有値の増分 $d\lambda$ は

$$d\lambda = dp d\lambda_p + dq d\lambda_q \quad (67)$$

これを式(62)に代入して式(69)を得る。さらに

式(69)を用いて式(66)から dq を消去し、その結果を式(63)に代入して dp について解いたのが式

(68)である。ただし式(68)の右辺において $\pm$ は軌道の追跡方向を表し、 Γ は

$$\Gamma = - \frac{d\lambda_p}{d\lambda_q - \lambda_A} \quad (70)$$

で定義した。

[ホモトピー法の修正子方程式]

$$\mathbf{K} \delta \mathbf{u} - \delta p \mathbf{e} - \delta q \mathbf{E}_A = -(\mathbf{E} - q \mathbf{E}_A) \quad (71)$$

$$\delta \lambda - \delta q \lambda_A = -(\lambda - q \lambda_A) \quad (72)$$

$$\mathbf{d}\mathbf{u}^T \delta \mathbf{u} + dp \delta p + dq \delta q = 0 \quad (73)$$

修正子計算では、

$$\mathbf{K} \delta \mathbf{u}_o = -\{\mathbf{E} - q \mathbf{E}_A\} \quad (74)$$

$$\mathbf{K} \delta \mathbf{u}_p = +\mathbf{e} \quad (75)$$

$$\mathbf{K} \delta \mathbf{u}_q = +\mathbf{E}_A \quad (76)$$

をそれぞれ $(\delta \mathbf{u}_o, \delta \mathbf{u}_p, \delta \mathbf{u}_q)$ について解く。式(71)から

$$\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}_o + \delta p \delta \mathbf{u}_p + \delta q \delta \mathbf{u}_q \quad (77)$$

対応して固有値についても、式(8~11)より

$$\delta \lambda = \delta \lambda_o + \delta p \delta \lambda_p + \delta q \delta \lambda_q \quad (78)$$

式(78、77)をそれぞれ式(72、73)に代入してつぎの式(79、80)を得る。

$$\delta \lambda_p \delta p + (\delta \lambda_q - \lambda_A) \delta q = -\delta \lambda_o - (\lambda - q \lambda_A) \quad (79)$$

$$(\mathbf{d}\mathbf{u}^T \delta \mathbf{u}_p + dp) \delta p + (\mathbf{d}\mathbf{u}^T \delta \mathbf{u}_q + dq) \delta q = -\mathbf{d}\mathbf{u}^T \delta \mathbf{u} \quad (80)$$

式(79、80)を $(\delta p, \delta q)$ について連立で解いて、式(81、82)を得る。

[ホモトピー法の予測子]

$$dp = \pm \frac{\Delta}{\sqrt{\mathbf{d}\mathbf{u}_p^T \mathbf{d}\mathbf{u}_p + 1 + 2\Gamma \mathbf{d}\mathbf{u}_p^T \mathbf{d}\mathbf{u}_q + \Gamma^2 (\mathbf{d}\mathbf{u}_q^T \mathbf{d}\mathbf{u}_q + 1)}} \quad (68)$$

$$dq = - \frac{d\lambda_p}{d\lambda_q - \lambda_A} dp = + \Gamma dp \quad (69)$$

$$\mathbf{d}\mathbf{u} = dp \mathbf{d}\mathbf{u}_p + dq \mathbf{d}\mathbf{u}_q \quad (66)$$

$$\delta p = \frac{-\{\delta \lambda_o + (\lambda - q \lambda_A)\} (d u^T \delta u_q + d q) + (\delta \lambda_q - \lambda_A) d u^T \delta u_o}{\delta \lambda_p (d u^T \delta u_q + d q) - (\delta \lambda_q - \lambda_A) (d u^T \delta u_p + d p)} \quad (81)$$

$$\delta q = \frac{-\delta \lambda_p d u^T \delta u_o + \{\delta \lambda_o + (\lambda - q \lambda_A)\} (d u^T \delta u_p + d p)}{\delta \lambda_p (d u^T \delta u_q + d q) - (\delta \lambda_q - \lambda_A) (d u^T \delta u_p + d p)} \quad (82)$$

$$\delta u = \delta u_o + \delta p \delta u_p + \delta q \delta u_q \quad (77)$$

7. 数値計算上の要点

以上、正則点弧長法、特異点精算法、迂回経路法、およびホモトピー法について計算ステップをまとめてみた。特異点精算法以外のすべては、曲線追跡法を共通としており、予測子・修正子計算の計算手順は相互に酷似している。このためわずかの修正だけで既存の汎用コードへの組み込み可能である。

正則点弧長法でつり合い経路を追跡するかたわら、特異つり合い点の接近が感知された場合、あるいは特異つり合い点を通過したことが観測された場合、特異点精算法に切り替えて特異点を精算する。より具体的には、例えば式(27)で計算される dp が、式(15)で計算される dp より小さくなった時とか、あるいは K の LDL^T 分解において、対角行列 D の負のビットの個数に変化がみられた時などが、特異点精算法への切り替えのタイミングである。しかしこの手順で到達できるのは、現在のつり合い点を含むつり合い経路の枝上に出現する特異点のみであることは自明である。

迂回路法におけるベクトル f については、例えば

$$f = e \quad (83)$$

とすると、迂回路はつり合い経路に一致し、つり合い経路をたどって特異点に至る。この時、迂回路法は正則点弧長法と特異点精算法とを併用して特異点をピンポイントすることと機能的にはまったく等価である。

現在点を含むつり合い経路の枝とは接続されていない遊離経路上の特異つり合い点を目指す場合、さらには高次の固有ベクトルが軌道となるような特異点を探索する場合（そのような特異つり合い解が数学的に存在すると仮定して）、あるいは目標の特異点が現在点の付近にあるにもかかわらず、そこに至るまでのつり合い経路の道のりが長くなる場合、目標の特異点での変形に近い（と思われる）変形を出発点において発生させ、より短い道のりでその特異点に達するためにも、

$$f = \theta_A \quad (84)$$

として出発点における固有ベクトル θ_A を選ぶ方が得策である。ホモトピー法の最大の利点は、任意の非つり合い点を出発点として選べることである。

提案する数値理論のすべてにおいて、目標とする特異点を注目する固有ベクトルとの関係から特定できる。すなわちある固有ベクトルを出発点で指定すれば、目標とする特異つり合い解は必然的に決まる。注目する固有ベクトルが軌道追跡の過程で仮に大きく変貌しても（実際には稀であるが、仮に起こったとしても）目標点でのその固有ベクトルの形状を出発点において予測することは必要ない。そのような特異解が存在する限り目標点に到達できる。目標点に至るまでかなりの道のりとなることもあるが、注目する固有ベクトルが途中すり変わらないよう注意深く固有値計算と軌道追跡を実行すれば、ねらった特異点に到達できる。

表2 提案理論の用途

特異点探査の開始点（出発点）の条件		使用する非線形解法（の組合わせ）
特異点の近傍にある	つり合い点	特異点精算法（予測子&修正子計算）
	非つり合い点	特異点精算法（修正子計算のみ）
特異点から	つり合い点	弧長法 + 特異点精算法
		迂回路法 + 特異点精算法
任意の遠方にある	非つり合い点	ホモトピー法 + 特異点精算法

Rayleigh商反復法は3次収束であるが、収束目標を制御できない。このため注目する固有ベクトルとは異なる固有ベクトルが途中から不本意に計算されて、当初の目標とは異なる特異点に至る可能性があることは否めない。しかしこれは迂回路やヒューリスティック法を追跡する際のステップサイズを十分小さくとり、Rayleigh商反復法の初期値としての固有ベクトルを常に更新することにより回避できる。

迂回路法とヒューリスティック法の軌道追跡中にパスの分岐点に遭遇した場合には、経路を切り替えることもできるが、それよりは別のパスを新たに設定して（出発点と注目する固有ベクトルの変更）、別のパスを導入したほうが工学的には賢明である。

迂回路法（あるいはヒューリスティック法）においては、軌道上の点で q の値の変化を常時監視すること、一度 $q = 1$ （あるいは $q = 0$ ）の点を通過したら、式（16, 17）を用いて特異点を精算する。正則点弧長法との組み合わせの中で特異点を精算した場合、精算後必要に応じてつり合い経路の追跡を再開すること必要となる。軌道追跡の再開に際しては、精算した特異点がBPかLPであるかを判別して、BPなら精算に切り替える直前の最後の予測子を、LPなら精算した特異点での切替可能な固有ベクトルを、精算後の最初の予測子として採用する。このためにも解析者の経験が解析のなかに反映できるよう、インターラクティブな作業が可能な計算システムを設計することが肝心である。表2では各非線形解法の用途を、特異点の探査を開始する点（出発点）との関連で示した。

8. 例題

ベンチマークとして、図3にある2自由度のTwo-Bar Trussを取り上げる。2個の並進変位（ U, V ）と荷重 P を、それぞれトラスの高さ h と部材断面剛性（ $E A \sin^3 \alpha$ ）で除して無次元化すると、つり合い方程式は、無次元化表現で、

$$E_1(u, v, p) = (1-u)(1-r^2) - p = 0 \tag{85}$$

$$E_2(u, v, p) = v(r^2 - 0.5) = 0 \tag{86}$$

$$\text{ただし、} \quad r^2 = (1-u)^2 + v^2 \tag{87}$$

接線剛性行列 K は、

$$K = \begin{bmatrix} 2(1-u)^2 + r^2 - 1, & -2v(1-u) \\ -2v(1-u), & r^2 - 0.5 + 2v^2 \end{bmatrix} \tag{88}$$

で、原点における K の固有値は $(\lambda_1, \lambda_2) = (+0.5, +2.0)$ である。まず通常の弧長法で正則つり合い点を計算した。このつり合い経路を図4に示す。正則つり合い点を計算すると同時に、特異点付近で特異点精算法に随時切り替えて、特異点を精確に評価した結果が表3である。分岐点（BP1, BP2）・荷重極限点（LP1, LP2）ともにそれぞれ2個出現し、計4個の特異点を検出した。表3では対応する固有ベクトルも示した。

つぎに原点でただちに特異点精算法に切り替えても、数回の反復計算でBP1とLP1にも到達できた。表4は

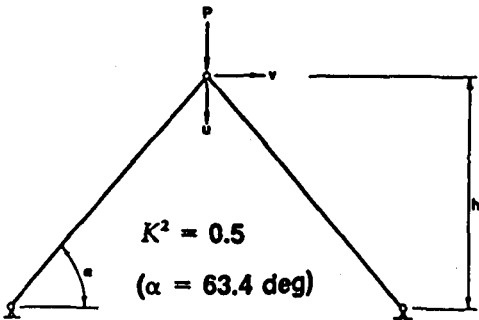


図3 ベンチテスト用モデル

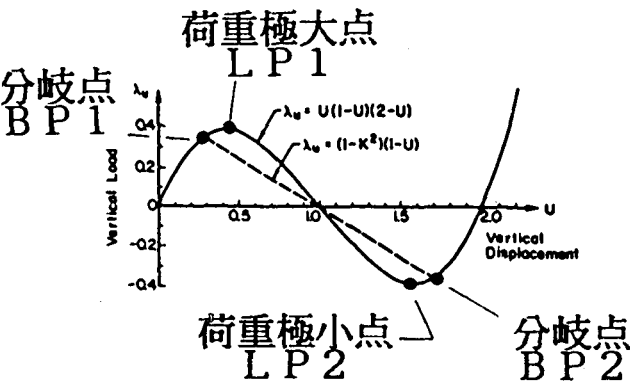


図4 つり合い経路

表3 特異点の座標と固有ベクトル				
点	BP1	LP1	LP2	BP2
u	+0.292893	+0.422649	+1.577350	+1.707106
v	0	0	0	0
p	+0.353553	+0.384900	-0.384900	-0.353553
λ_1	+0.0	-0.166666	-0.166666	0.0
θ_1	0	0	0	0
	1	1	1	1
λ_2	+0.5	0.0	0.0	+0.5
θ_2	1	1	1	1
	0	0	0	0

原点からLP1を目指したときの反復計算の収束状況を示す。注目する固有ベクトルが不本意に切り替わることがないように注意を払えば、BP1を飛び越えて目標点のLP1まで極めて安定に収束していく。反復5回で固有値を $1.E-10$ のオーダーにまで落としたが、実質的には反復3回で収束している。原点を出発点とした場合、原点からより

表4 特異点精算法において原点を出発点して、 l_2 に注目する。							
LP1を精算する際のNR法の収束状況							
点	原点	非つり合い点					LP1
	出発点	反復1回	反復2回	反復3回	反復4回	反復5回	目標点
u	0	+0.41666	+0.42261	+0.42264	+0.42264	+0.42264	+0.42264
v	0	0	0	0	0	0	0
p	0	+0.39814	+0.38496	+0.38490	+0.38490	+0.38490	+0.38490
l_2	+2.0	+3.33D-01	+2.08D-02	+1.05D-04	-1.07D-09	-3.95D-14	0
θ_2	-1	+1	-1	+1	-1	-1	+1
	+9.77D-22	-7.92D-22	+5.02D-22	-5.54D-23	+3.50D-26	-2.27D-34	0

表5 迂回路法において $\mathbf{F} = (0, 1)$ と設定し、原点を出発して、 l_1 に注目する。								
BP1とBP2を通過する軌道を追跡。BP2に到達。								
点	原点	非つり合い点					特異点	BP2
	出発点	<3, 3>	<6, 3>	<10, 3>	<12, 3>	<15, 3>	精算法	目標点
u	0	+0.17226	+0.28561	+1.0727	+1.5731	+1.7368	+1.7071	+1.707106
v	0	+0.50280	-0.20289	-0.87773	-0.60486	+0.2482	+3.23D-03	0
p	0	+0.05135	+0.32039	-0.016316	-0.17519	-0.29138	-0.35354	-0.353553
q	0	+0.06726	+1.0103	+1.2014	+1.1062	+0.97333	1	1
l_1	+0.5	+2.738D-1	-1.039D-2	-2.216D-1	-1.118D-1	+2.628D-2	-5.975D-6	0
θ_1	+1.84D-13	-6.269D-1	-4.454D-1	-9.980D-1	+8.315D-1	+4.824D-1	-1.415D-2	0
	-1	-7.790D-1	+8.952D-1	-6.253D-2	+5.554D-1	-8.759D-1	+9.998D-1	1

表6 ホモトピー法において、任意の非つり合い点を出発して、 l_1 に注目する。								
BP1に到達。								
点	原点	非つり合い点					特異点	BP1
	出発点	<1, 2>	<2, 2>	<3, 2>	<4, 3>	<5, 4>	精算法	目標点
u	+0.35	+0.32861	+0.31066	+0.29687	+0.28999	+0.26748	+0.29288	+0.292893
v	+0.40	+0.34853	+0.29082	+0.22178	+0.12039	-0.14151	-3.229D-3	0
p	-0.40	-0.22493	-0.05008	+0.12434	+0.29621	+0.48776	+0.35354	+0.353553
q	+1.0	+0.76281	+0.52661	+0.29280	+0.06788	-0.24274	0	0
l_1	-0.10515	-8.020D-2	-5.535D-2	-3.072D-2	-7.133D-3	+2.556D-2	-7.588D-6	0
θ_1	+6.985D-1	+6.453D-1	-5.784D-1	-4.847D-1	+3.050D-1	+3.264D-1	+1.402D-2	0
	+7.155D-1	+7.638D-1	-8.157D-1	-8.746D-1	+9.523D-1	-9.452D-1	-9.999D-1	+1

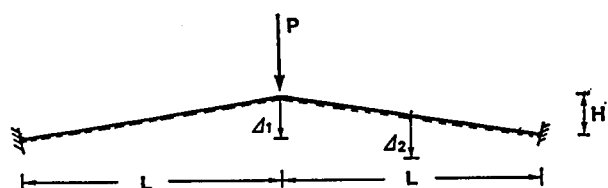
遠方にあるLP2とBP2には局所的な特異点精算法では到達できなかった。

迂回路法においては原点を出発点として、注目する固有ベクトルと、ベクトル $\mathbf{F}$ を種々変えて目標とする特異点に着弾できた。表5はその一例で、 $\mathbf{F} = (0, 1)$ と設定し、原点より最遠方にあるBP2を狙ったものである。第2行における表示 $\langle j, k \rangle$ は、増分ステップ番号 j 、必要とした反復回数 k を示す。途中 $\langle 6, 3 \rangle$ でBP1を通過しているが ($q > 1.0$)、BP1を精算せず更に軌道を追跡してBP2まで到達した。つり合い経路自身は (u, p) 平面に収まるが ($v = 0$)、迂回路は (u, p) 平面を外れ ($v \neq 0$) 目標点に至る。

ホモトピー法においても種々の異なる出発点に対して、これらの特異点に到達できた。同じ出発点でも固有ベクトルの選択によってピンポイントしたい特異点が制御できる。表6は、一例として点A (u, v, p) = (+0.35, +0.40, -0.40)を出発して、BP1に到達した際の過程である。固有ベクトルは滑らかに変化している。

表6においても、 $\langle j, k \rangle$ は軌道追跡過程のステップ数 (予測子の計算回数) j と、反復回数 (修正子の計算回数) k を示す。

もうひとつの例は図5にある Toggle Frame で、この例題の特徴は、図6のように典型的な Snap-Through を示す主つり合い経路の他に、 N -7 本の対称不安



20 elements
 $E=100$ $A=84.16$ $I=265.74$
 $L=328.56$ $H=38.6$

図5 Toggle Frame

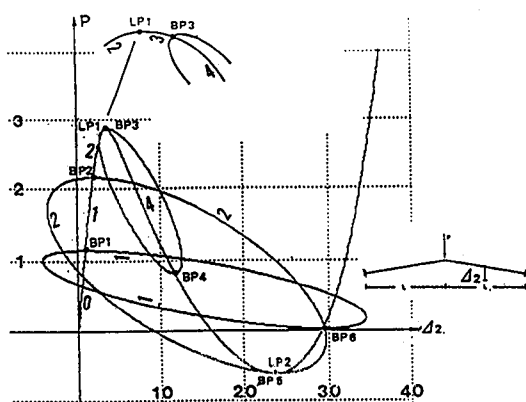


図6 Toggle Frame のつり合い経路

$(\lambda_1=-0.045185)$: critical at BP1

$(\lambda_2=-0.028182)$: critical at BP2

$(\lambda_3=+0.002573)$: critical at LP1

$(\lambda_4=+0.003537)$: critical at BP3

Eigenvectors at $P=2.87369$

図7 LP1直前での固有ベクトル

表7 Toggle Frame の 特異点精算時の反復状況			
分岐点 BP1 (図6 参照)			
状態量	代表変位 Δ_2	荷重変数 p	固有値 λ
出発点	0.7285517052	0.9666001492	+0.002986191
反復1回	0.8795328910	1.1524385965	-0.000007454
反復2回	0.8795492249	1.1493277719	+0.000000024
分岐点 BP2 (図6 参照)			
状態量	代表変位 Δ_2	荷重変数 p	固有値 λ
出発点	1.6968935350	2.0201570623	+0.002930638
反復1回	1.8599851514	2.1717103685	-0.000053364
反復2回	0.8583150323	2.1651596930	+0.000000259
荷重極大点 LP1 (図6 参照)			
状態量	代表変位 Δ_2	荷重変数 p	固有値 λ
出発点	3.1790097105	2.8593949627	+0.005907848
反復1回	2.9512581619	2.8278397513	+0.012819028
反復2回	3.3323969549	2.9195729614	+0.003091652
反復3回	3.4374000624	2.8822857906	+0.000370285
反復4回	3.4461026320	2.8777090352	+0.000139576
反復5回	3.4534492364	2.8776995816	+0.000007586
分岐点 BP3 (図6 参照)			
状態量	代表変位 Δ_2	荷重変数 p	固有値 λ
出発点	3.4651964629	2.8776591904	+0.000736777
反復1回	3.5028453787	2.8774714551	+0.000082449
反復2回	3.5067837960	2.8770833741	+0.000010369
反復3回	3.5073298179	2.8770670072	+0.000001046
反復4回	3.5073852673	2.8770656693	+0.000000103

定分岐経路が派生し、計8個の特異点が主経路上に出現する点である。系全体を20本のはり要素で離散化し、まず通常の正則点弧長法で主経路を追跡した。

LP1の直前にあるつり合い点 ($p=2.87369$) における最初の4本の固有ベクトルを図7に示す。分岐点において「クリティカルな固有ベクトルと荷重ベクトルは直交する。BP2において「クリティカルであった」2本目のベクトルが、荷重ベクトルとは直交しないことは一目瞭然であるが(集中荷重の作用点の鉛直変位が非ゼロ)、これは固有ベクトルを計算した点が、BP2ではなく、BP2をすでに通過したつり合い点であるからである。

主経路を追跡するかたわら、特異点を通過する度に、その特異点において「クリティカルであった固有ベクトルを選択し、特異点精算法に切り替えてその位置を精算した。

7の4個の特異点(BP1, BP2, LP1, BP3)について、

至るまでの反復状況をまとめたのが表7である。特異点精算を開始する出発点はすべて目標とする特異点の付近にある正則つり合い点である。固有値 λ の大きさに収束の度合いが測れるが、実用の範囲内の反復回数でいずれも収束している。荷重極大点LPについては、収束解付近で反復解が微細に振動する不安定な現象が見られたが、その振幅は無視できる程小さく機能的には何ら問題はない。この荷重極大点を通過直後に出現するBP3についても、微細振動こそは見られなかったものの収束はやはり多少遅い。同じ例題を別のより要素と数式処理ソフトを用いて比較計算してみたが、やはり似たような傾向が見受けられた。この原因を特定するに当たって、まず考慮しなければならないことは、収束の判定条件と差分近似の精度との関係である。プログラミング技法的には、 λ - μ の一番内側にある Rayleigh商反復法で固有 λ の収束判定(計算されてくる固有 λ の精度の規定)を行い、この固有値解析の外側の λ - μ で接線剛性行列の方向微分を差分近似する。さらに一番外側でNR反復法で目標点に到達したか否かの収束判定を必要とする。現在の λ - μ において、より内側にある λ - μ 内の計算精度以上に厳しい近似精度を課しては意味がなく、相互にバランスした計算パラメタの設定を行わないとスムーズに収束しない場合がある。つぎに考えられることは、特異点を中心として K が数理的に擬特異となる範囲の“広さ”である。つり合い経路の形状からも容易に想像できるように、この K が擬特異となる領域は一般に、きつこう配のつり合い経路上の分岐点よりも、勾配の全くない荷重極大点において広くなる。このため反復点が擬特異の領域に入り込む可能性がより強いのは荷重極大点においてである。擬特異領域に入ると特異点を目前にして、式(29, 30)の解法の際に数理的誤差が介入しやすくなり、収束がやや悪化する(機能的には問題がない)。原因をより明確に特定するには今後、提案する数理解析を汎用コードに組み込み、ワークステーションを用いてより大きな多自由度系にも応用し、広範囲な数理解析を行っていく必要がある。

精算した分岐点から各分岐経路への経路切り替えは、筆者らが提案する手続き^[2]で問題なく行った。一旦分岐経路に移行できれば、あとは通常の正則点弧長法でつり合い経路の枝を追跡するだけでよい。計算安定理論では、軌道追跡法、特異点ピンポイント法、経路切り替え法の3つのノウハウが不可欠となる。

9. まとめ

特異点をピンポイントするための局所的小および大域的非線形解法を提案した。探索を開始する点が、特異点の付近、または遠方にあるかどうかによって、そしてそれがつり合い点、または非つり合い点であるかどうかによってこれらの用途が異なってくる。計算した例題の範囲内では

、何らの数理的問題もなく十分に機能することが確認された。提案する大域的非線形解法は曲線追跡法を基礎としているため、従来の弧長法を包括する汎用性の高い計算戦略であり、わずかの修正だけで既存の汎用コードに容易に組み込め点の特徴である。

単純分岐では注目すべき固有 λ は唯一決まるが、多重分岐点では複数のクリティカルな固有ベクトルの任意の線形結合もまたクリティカルな固有ベクトルとなるため、注目すべき固有 λ の組が一意的に決まらない。このため多重分岐点のピンポイントが今後の研究課題である。

現在これらの数理理論を計算力学用の汎用コード(kosmec)にインポート中で、ワークステーションを用いてより大きな多自由度系に応用することの検討も必要である。これまで開発した大域的非線形解法^[1, 2]も含めて、その支配方程式が統一的な表現となるよう整理し、目標点までの道筋を適宜インターラクティブに指定して解析を進めることのできるようなシステムが可能となる。

参考文献

- [1] 藤井文夫、内藤幹夫、”大域的収束性を有する非線形つり合い方程式の解法”日本応用数理学会平成5年度年会、1993年9月、龍谷大学理工学部にて、
- [2] 藤井文夫、内藤幹夫、”任意点よりつり合い経路に到達できる大域的非線形解法”、構造工学論文集、Vol. 40A(1994年3月、395-406)
- [3] F.シャトラフ著、”行列の固有値”、伊理正夫・伊藤由美訳、Springer-Verlag、東京、1993年
- [4] 藤井文夫、”特異つり合い点のピンポイント法について”、日本応用数理学会平成6年度年会、1994年9月、
- [5] Fujii, F., ”Bifurcation and Path-Switching in Nonlinear Elasticity”, Invited lecture, WCCM 3rd, August 1-5, 1994, Makuhari
- [6] Wriggers, p., Wagner, W. and Miehe, C. ”A quadratically convergent procedure for the calculation of stability points in finite element analysis”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 70(1988), 329-347
- [7] Wriggers, p. and Simo, J.C., ”A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points”, Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol. 30, 155-176, 1990

(1994年9月14日受付)