

Updated Lagrangian 手法に基づく柔ケーブルの非線形解析

Nonlinear Analysis of Flexible Cables Based on Updated Lagrangian Formulation

謝 旭* 伊藤 学** 山口 宏樹**

Xu XIE, Manabu ITO and Hiroki YAMAGUCHI

*工修 埼玉大学大学院博士後期課程 生物環境科学専攻(〒338 埼玉県浦和市下大久保255)

**工博 埼玉大学教授 工学部建設工学科(同 上)

A finite element is developed in the present study for geometrically nonlinear analysis of flexible cables. The finite element analysis with the proposed cable element is based on the updated Lagrangian formulation, in which an incremental form of element equation of flexible cable is derived by using vector theory and the principle of virtual work. Some numerical examples were tested in order to compare the proposed analytical method with the existing ones. The results clearly indicated the effectiveness of the present formulation and analytical procedure.

Keywords : cable structure, finite element method, updated Lagrangian formulation

1 はじめに

近年, 吊形式橋梁は急速に長大化する傾向にある。特に斜張橋のスパンはわずか10年あまりの間に, 400m位から900mほどに達し¹⁾, 1000mを超える斜張橋も間近いとされている。このような吊形式橋梁の支間長大化に伴い, その安全性評価の重要性が増しており, 設計計算に有限変位解析法を適用する必要性が高まっている。

一方, ケーブルの非線形挙動については多くの研究者に注目され, 解析面において, 高度の幾何学的非線形性を取り扱えるアプローチが提案された³⁾⁻⁸⁾。従来のケーブルの幾何学的非線形解析については, その取り扱い方として, 次のような四つの方法が考えられている。

- a) Ernstによる修正弾性係数法
- b) 折れ線状リンク構造としての直線要素を用いる有限要素法
- c) 特定分布荷重に釣り合うケーブル形状の解析解を利用して, ケーブル端での釣り合い条件から曲線要素の接線剛性方程式を誘導する解法

d) 曲線要素を用いる有限要素法

a)のErnstによる修正弾性係数法は一本のケーブルを一つの要素として, 弾性係数の修正によって非線形性の影響を考慮する方法である。しかし, 既に多くの研究者に指摘されているように, その理論的な問題と精度的な問題で, 長大スパンのケーブル構造の非線形解析には適用できない。

b)のケーブルに中間節点を設け, 荷重を節点荷重へ置換し, 折れ線状の多部材として解析する方法は, 複雑な構造形状と様々な外荷重を取り扱えるものの, 任意の荷重を受け, 大きなサグを有するケーブルに対しては多くの中間節点を設けることが必要となる。しかし, 近年の長大斜張橋では, 構造の力学性能上の優位性から, マルチケーブル系が採用されることが多く, このような斜張橋の架設系解析に際して, 自由度数の増大が無視できない問題になっている。

解法c)については, 水平方向に等分布荷重を受ける仮定に基づいた放物線要素と, ケーブルに沿って等分布荷重を受ける仮定に基づいたカタナリー要素の二つが挙げられる²⁾⁻⁴⁾。これらの要素は特定荷重が作用する

場合には高精度の解を与えるが、汎用性にやや欠ける面がある。吊構造物のスパン長大化と形状複雑化に伴って、ケーブルに自重以外の荷重（例えば風荷重や地震荷重など）を考えなければならない場合があること、複合非線形まで解析すべき場合も生じ得ることなど、既存の解法ではそこまで拡張することが困難である。

有限要素法では様々な構造形状と荷重条件を容易に取り扱えることが既に多くの応用事例に認められている。上述のように、曲線ケーブルを折れ線状の多部材として計算する手法は膨大な自由度数をもたらすから、実際の計算にはかなりな不便さを伴う。これに対して、要素の自由度を減少するために、幾つかのケーブル非線形要素が提案されている^{5)~7)}。

構造の幾何学的非線形問題を有限要素法により解析するには、変位の取り扱いによって、Total Lagrangian Formulation と Updated Lagrangian Formulation の二つの方法が採用される。柔ケーブルの場合、外力による形状の変化が著しいので、Total Lagrangian Formulation に基づいて有限要素を定式化する場合には高次の非線形項まで考慮しなければならない。

文献5)~7)では、3 節点アイソパラメトリック要素を用いて、Total Lagrangian Formulation に基づいたケーブル構造の大変形解析法が提案されているが、解の精度と収束性を改善するためには、ケーブル要素を細かく分け、曲線多部材として取り扱うことが必要となる。またケーブルの非線形性が強い場合には、計算の自由度数が大幅に増える恐れがある。文献6)ではこの点を改善するものとして、階段状の応力場の仮定に基づく解法が提案されている。しかし、応力の変化が大きい場合に、解の精度と収束性を確保するためには、要素数を増すことは避けられない。さらに、文献6)で提案されている混合法は有限要素解析法の一般性が失われて、汎用構造解析プログラムにケーブル要素を取り込むことが容易になし得ないと思われる。

一方、数値解析における釣り合い経路追跡のために、構造の非線形解析にあたって増分法がよく用いられる。したがって、ケーブルに対して全荷重-全変位の関係を表す必要のない場合が多いことも事実である。

以上のようなことから、本論文では、大きなサグを有する場合にも少数自由度で高精度かつ良好な収束性を確保でき、また任意の外荷重を取り扱え、動的解析や弾塑性解析への拡張を容易に行うことのできるケーブルの合理的な解法を提案することを目的とする。具体的には、Updated Lagrangian Formulation に基づき、曲線ケーブル要素の増分方程式を有限要素法によって定式化し、節点の総荷重と総内力の平衡条件を満たす

ようにNewton-Raphson法を用いて収束計算を行う解法を提案する。また、いくつかの計算例を通じて、本解析手法の精度や収束性を検証する。

2 Updated Lagrangian Formulationに基づくケーブル要素の増分方程式

2・1 仮定と座標系

次のように、ケーブル部材の解析にあたってよく用いられる仮定を設ける。

- ケーブルには軸方向の応力のみが存在し、一つの断面内において応力は一定である。すなわち、外乱と自重によって軸力しか生じない柔ケーブルを仮定する。
- 同一断面内の任意の点の変位はどれも等しい。つまり、節点変位が三つの変位成分で表せる。
- ケーブルの断面積は変形状態に関わらず一定である。

図1に示すように、曲線座標系 $\mathbf{s}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{t}$ をケーブルの局所座標系とする。ここに、 $\mathbf{s}$ はケーブルの軸線にとり、 $\mathbf{n}$ は曲率平面と直交する法線（陪法線）、 $\mathbf{t}$ 軸は曲率平面の法線（主法線）である。

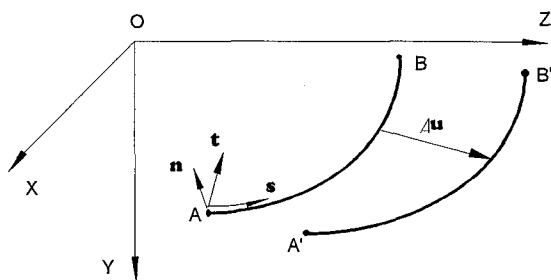


図1 ケーブル要素の座標系

曲線座標の基ベクトル $\mathbf{e}_s$, $\mathbf{e}_t$, $\mathbf{e}_n$ は空間固定デカルト座標の基ベクトル $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ を用いて以下のように表される。

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{e}_s &= e_{13}\mathbf{i} + e_{23}\mathbf{j} + e_{33}\mathbf{k} = \left(\frac{\partial X}{\partial s}\mathbf{i} + \frac{\partial Y}{\partial s}\mathbf{j} + \frac{\partial Z}{\partial s}\mathbf{k} \right) / \sqrt{g_1} \\ \mathbf{e}_t &= e_{12}\mathbf{i} + e_{22}\mathbf{j} + e_{32}\mathbf{k} = \left(\frac{\partial^2 X}{\partial s^2}\mathbf{i} + \frac{\partial^2 Y}{\partial s^2}\mathbf{j} + \frac{\partial^2 Z}{\partial s^2}\mathbf{k} \right) / \sqrt{g_2} \\ \mathbf{e}_n &= e_{11}\mathbf{i} + e_{21}\mathbf{j} + e_{31}\mathbf{k} = \left\{ \left(\frac{\partial Y}{\partial s} \frac{\partial^2 Z}{\partial s^2} - \frac{\partial Z}{\partial s} \frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} \right) \mathbf{i} - \left(\frac{\partial X}{\partial s} \frac{\partial^2 Z}{\partial s^2} - \frac{\partial Z}{\partial s} \frac{\partial^2 X}{\partial s^2} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial X}{\partial s} \frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} - \frac{\partial Y}{\partial s} \frac{\partial^2 X}{\partial s^2} \right) \mathbf{k} \right\} / \sqrt{g_3} \end{aligned} \right. \quad (1.a)$$

$$\begin{aligned}
g_1 &= \left(\frac{\partial X}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial s} \right)^2 \\
g_2 &= \left(\frac{\partial^2 X}{\partial s^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial s^2} \right)^2 \\
g_3 &= \left(\frac{\partial Y}{\partial s} \frac{\partial^2 Z}{\partial s^2} - \frac{\partial Z}{\partial s} \frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial s} \frac{\partial^2 Z}{\partial s^2} - \frac{\partial Z}{\partial s} \frac{\partial^2 X}{\partial s^2} \right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{\partial X}{\partial s} \frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} - \frac{\partial Y}{\partial s} \frac{\partial^2 X}{\partial s^2} \right)^2
\end{aligned} \tag{1.b}$$

式中に表われる導関数 $\partial X/\partial s \sim \partial^2 Z/\partial s^2$ は付録に示す。

仮定b)によって、空間におけるケーブル断面の自由度が三つあるから、任意断面の変位増分を次のように表わすことができる。

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}(s) = [\Delta u_n, \Delta u_t, \Delta u_s]^T \tag{2}$$

このケーブルの変位増分ベクトルは全体座標 XYZ を用いて、

$$\Delta \mathbf{u}(s) = [\Delta u_X \ \Delta u_Y \ \Delta u_Z]^T \tag{3}$$

の形で表わすことができるが、両者の間には座標変換によって、次のような関係が存在する。

$$\Delta \mathbf{u}(s) = [\mathbf{e}] \Delta \bar{\mathbf{u}}(s) \tag{4}$$

ここで、変換マトリックス $[\mathbf{e}]$ は曲線座標の基ベクトルで以下のように表わされる。

$$[\mathbf{e}] = [\mathbf{e}_n \ \mathbf{e}_t \ \mathbf{e}_s] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \tag{5}$$

2・2 基礎方程式

ケーブル要素の増分形剛性方程式は、以下に示すように、仮想仕事の原理から定式化できる。

まず仮想仕事の原理によって、

$$\delta \Delta \Pi = \delta \Delta \bar{U} - \delta \Delta \bar{P}_e = 0 \tag{6}$$

が成立する。ここで $\Delta \Pi$ 、 $\Delta \bar{U}$ 、 $\Delta \bar{P}_e$ はそれぞれ、総ポテンシャルエネルギー増分、ひずみエネルギー増分、及び外力仮想仕事増分を表わし、 δ はそれぞれの変分を意味する。

仮定 a)によると、ケーブルの断面力は軸力しか生じ

ないから、ひずみエネルギー増分の変分 $\delta \Delta \bar{U}$ は

$$\delta \Delta \bar{U} = \int_l (\bar{T}^0 + \Delta \bar{T}) \delta \Delta \bar{\epsilon} ds \tag{7}$$

と表せる。

ここで、 $\bar{T}^0$ 及び $\Delta \bar{T}$ はケーブルの初期張力と張力増分である。

一方ケーブルのひずみ増分 $\Delta \bar{\epsilon}$ は線形ひずみ $\Delta \bar{\epsilon}^L$ と非線形ひずみ $\Delta \bar{\epsilon}^N$ を含むが、曲率の影響を考慮する柔ケーブルの線形ひずみ増分 $\Delta \bar{\epsilon}^L$ と非線形ひずみ増分 $\Delta \bar{\epsilon}^N$ は以下のように考える。

図2に示すように、ケーブルが状態 S^0 から変位増分 $\Delta \mathbf{u}$ によって状態 S^* に達するとしたとき、変位後のケーブルの任意点の位置ベクトル $\mathbf{r}^*$ は次のように表わされる。

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \Delta \mathbf{u} \tag{8}$$

ここで、 $\mathbf{r}$ は変形前ケーブルの位置ベクトルである。

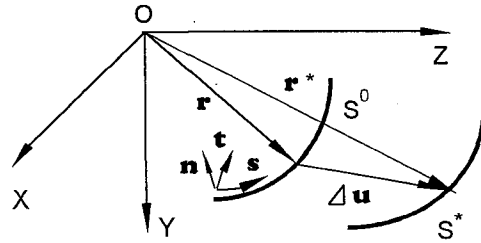


図2 ケーブル要素の変位

Updated Lagrangian Formulation では変形後の形を参照するから、非線形挙動の著しい柔ケーブルに対しても、変形後の曲線座標 $\mathbf{s}^*$ を次のように低次項だけで近似しても十分な精度が得られる。

$$\mathbf{s}^* = \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial s} \approx \left(1 + \frac{\partial \Delta u_s}{\partial s} - \frac{\Delta u_t}{R} \right) \mathbf{s} + \left(\frac{\partial \Delta u_t}{\partial s} + \frac{\Delta u_s}{R} \right) \mathbf{t} + \left(\frac{\partial \Delta u_n}{\partial s} \right) \mathbf{n} \tag{9}$$

グリーンのひずみの定義式

$$e_{ss} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial s} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right) \tag{10}$$

に式(9)を代入すれば、各ひずみ増分が増分変位によって以下のように表わされる。

$$\Delta \bar{\epsilon}^L = \frac{\partial \Delta u_s}{\partial s} - \frac{\Delta u_t}{R} \tag{11}$$

$$\Delta \bar{\epsilon}^N = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Delta u_n}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta u_t}{\partial s} + \frac{\Delta u_s}{R} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta u_s}{\partial s} - \frac{\Delta u_t}{R} \right)^2 \right]$$

(12)

ここで、 R は変形前のケーブルの曲率半径である。

また、ケーブルの張力増分 $\Delta\bar{T}$ は線形弾性体を仮定して、式(13)で計算する。

$$\Delta\bar{T} = EA \Delta\bar{\epsilon}^L \quad (13)$$

ここで、 EA はケーブル伸び剛性である。

さらに、外力仮想仕事 $\Delta\bar{P}_e$ の変分は

$$\delta\Delta\bar{P}_e = \int_i (\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) \cdot \delta\Delta\mathbf{u}(s) ds + (\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}) \delta\Delta\mathbf{u}^* \quad (14)$$

と表せる。ここに、 $(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p})$ と $(\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P})$ はケーブルに作用する分布荷重ベクトル及び集中荷重ベクトルで、 $\Delta\mathbf{u}^*$ は集中荷重が作用する節点変位増分ベクトルである。

ひずみエネルギー増分式(7)と外力仮想仕事増分の変分式(14)を仮想仕事原理(6)に代入して、次式を得る。

$$\begin{aligned} \int_i \Delta\bar{T} \delta\Delta\bar{\epsilon} ds + \int_i (\bar{T}^0 + \Delta\bar{T}) \delta\Delta\bar{\epsilon}^N ds = \int_i (\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) \delta\Delta\mathbf{u}(s) ds \\ + (\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}) \delta\Delta\mathbf{u}^* - \int_i \bar{T}^0 \Delta\bar{\epsilon}^L ds \end{aligned} \quad (15)$$

2・3 有限要素法に基づく離散化

図3に示すように、ケーブル要素を m 節点で分割し、形状関数 $[N(s)]$ を導入して、要素内部の変位増分と空間座標をそれぞれ節点変位、節点座標で以下のように表示する。

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{u}(s) = [N(s)] [\Delta\mathbf{u}_1, \dots, \Delta\mathbf{u}_m]^T = [N] \Delta\mathbf{u}^e \\ \mathbf{X}(s) = [N(s)] [\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m]^T = [N] \mathbf{X}^e \end{cases} \quad (16)$$

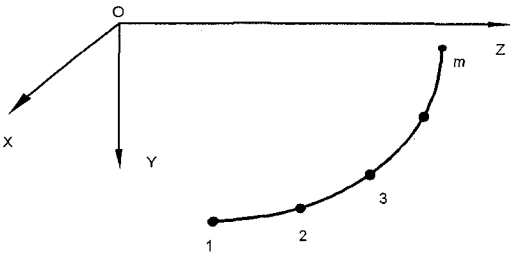


図3 曲線ケーブル要素

ここに、 $\mathbf{X}(s)$ と $\mathbf{X}^e$ は要素内部及び節点での空間座標ベクトルである。また $\Delta\mathbf{u}^e$ は節点変位ベクトルの増分を

示す。

形状関数マトリックス $[N]$ は次のようである。

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_m & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_m & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & & 0 & 0 & N_m \end{bmatrix} \quad (17)$$

ここで、 $N_1, N_2, \dots, N_m$ はLagrange補関数であり、四節点要素の場合、以下のように表わされる。

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{16}(1-\xi)(9\xi^2-1) \\ N_2 = \frac{9}{16}(1-\xi^2)(1-3\xi) \\ N_3 = \frac{9}{16}(1-\xi^2)(1+3\xi) \\ N_4 = \frac{1}{16}(1+\xi)(9\xi^2-1) \end{cases} \quad (18)$$

ただし、 ξ は要素の自然座標である。

式(16)をケーブルの場合の仮想仕事式(15)に代入して変形すれば、次のような Updated Lagrangian Formulationに基づいたケーブル要素の増分形剛性方程式が導かれる。

$$([K_L] + [K_\sigma]) \Delta\mathbf{u}^e = \Delta\mathbf{F}^e \quad (19)$$

ここで、 $[K_L]$ と $[K_\sigma]$ は要素の線形剛性マトリックス及び幾何剛性マトリックスを表わし、以下の式で決定される。

$$\begin{cases} [K_L] = \int_i [B]^T EA [B] ds \\ [K_\sigma] = \int_i [G]^T (\bar{T}^0 + \Delta\bar{T}) [G] ds \end{cases} \quad (20)$$

ただし、 $[B]$ 、 $[G]$ は次のように書かれる(付録参照)。

$$[B] = \frac{\partial^2 \mathbf{X}^T}{\partial s^2} [N] + \frac{1}{J} \mathbf{e}_r^T \frac{\partial [N]}{\partial \xi} - \sqrt{\left(\frac{\partial^2 X}{\partial s^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial s^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial s^2}\right)^2} \mathbf{e}_n^T [N] \quad (21)$$

$$[G] = \left[\frac{1}{J} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} [e]^T + N_1 \frac{\partial [e]^T}{\partial s} + \frac{N_1}{r} [e^*], \dots, \frac{1}{J} \frac{\partial N_n}{\partial \xi} [e]^T + N_n \frac{\partial [e]^T}{\partial s} + \frac{N_n}{r} [e^*] \right] \quad (22)$$

また、 J はJacobianを表わし、マトリックス $[e^*]$ は次式

で定義している。

$$[e^*] = \begin{bmatrix} e_{13} & e_{23} & e_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ -e_{11} & -e_{21} & -e_{31} \end{bmatrix} \tag{23}$$

また、荷重増量 ΔF は次式で表わされる。

$$\{\Delta F\} = \int_i [N]^T \Delta p ds + \Delta P^o \tag{24}$$

Gauss積分法を用いることにより、要素の線形剛性マトリックス $[K_L]$ 、幾何剛性マトリックス $[K_G]$ と荷重ベクトル $\{\Delta F\}$ は簡単に数値的に求められる。なお、非線形方程式は Newton Raphson 反復計算法で解くが、不平衡力を変形後の総荷重と総断面力の差から考える。即ち、次の式で計算する。

$$\Delta R = \int_i [N]^T p ds + P^o - \int_i [B]^T T ds \tag{25}$$

3 数値解析例

まず、二つの数値計算例によって、本計算方法の精度と収束性を確認する。また、風荷重を受ける単一ケーブルの張力計算を例に、本手法の長大斜張橋への適用性について簡単な考察を加える。なお、計算の際の収束判定は、荷重増分ごとに変位増分 $\|\Delta \delta\|_2 \leq 1.0 \times 10^{-4}$ である。また、ケーブル要素としては4節点のアイソパラメトリック要素を用いた。

(1) 文献3)、6)に示されている例題と同じく、図4に示すようなカテナリーケーブルが中点に斜め上方向の集中荷重を受ける場合の荷重—変位曲線を求めた。ケーブルはスパン80m、サグ比0.211、伸び剛性 $EA=2.55 \times 10^6 t$ 、分布死荷重 $w=1 t/m$ であり、中央点の荷重の大きさをパラメータに解析している。また、要素の分割数の影響を調べるために、このカテナリーケーブルをそれぞれ2要素、4要素、12要素、16

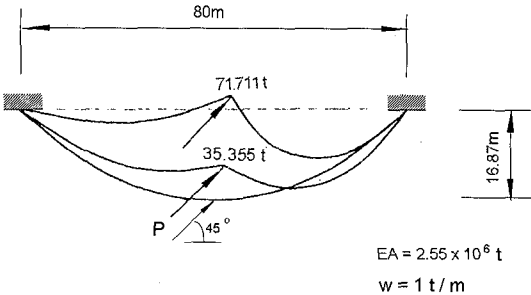


図4 計算例(1)のケーブル及び荷重

要素と40要素に分けて計算した。

本論文での計算結果と文献6)の比較を図5に示す。図5から明らかなように、本手法では2要素の場合にも文献6)の8要素で得た解との差がほとんど見られない。また二つ以上の要素を用いた場合、要素数が計算結果に影響しておらず、本手法では2要素で高精度の結果が得られるといえる。なお、各ステップ荷重の計算繰り返しの回数はすべて4回位である。

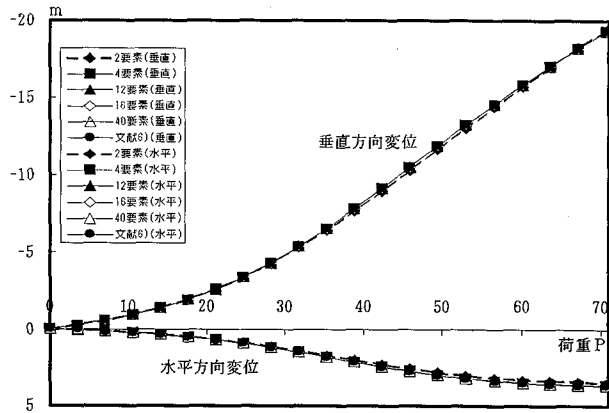


図5 計算例(1)の荷重—変位曲線

(2) 文献6)に示されている例題と同じく、図6に示すようなスパン1500mのカテナリーケーブル中点に垂直荷重Pが作用する時のC点変位を求めた。

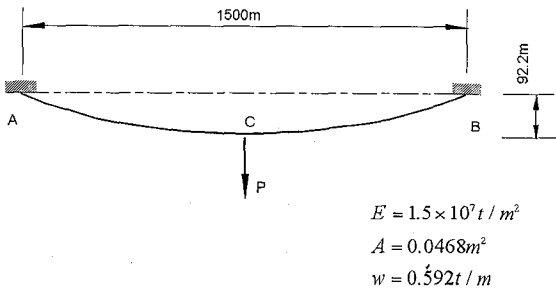


図6 計算例(2)のケーブル形状

図7に本論文での計算結果を示す。 $P=100 t$ 時の垂直変位は文献6)の結果と一致している。本論文では2要素を用い、総自由度数は10である。また、各荷重ステップでの計算繰り返し回数は2回と大変少ない。

以上のように、本論文での手法は少ない自由度で高精度な結果が得られ、マルチケーブル長大吊構造の解析に対して、経済的に計算を実行できることが伺える。

特に、架設系などサグが大きい場合に、従来法に比較して本手法の優位性が大きくなる。

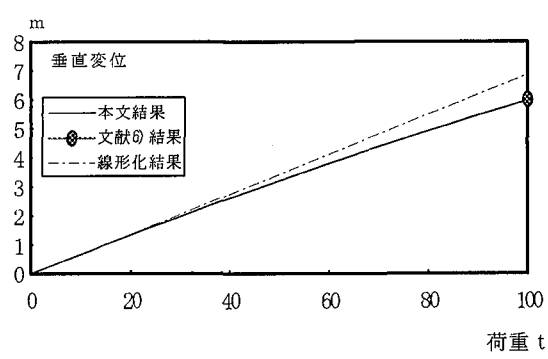


図7 計算例(2)の荷重-変位曲線

(3) スパン1000m~1500m程度の斜張橋の架設可能性及び力学特性が最近多くの技術者にとって興味ある課題になっている⁹⁾。そこで、図8に示すような単一斜張ケーブルに対して、横方向風荷重による定着端の反力等を解析した。ケーブルは断面積 0.0136m^2 、自重 0.135t/m である。節点高度の風荷重は表1に示すよう

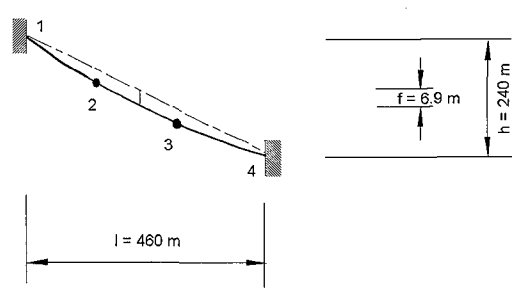


図8 単一斜張ケーブル構造

に風速の鉛直プロファイルを考慮して決定している。

図9～図11は節点1と4での風荷重による生じるケーブル張力3成分の変化の様子を示す。縦軸はケーブル張力の各方向成分、横軸は設計風荷重を最大として(桁着目の風荷重)百分率で表わした風荷重の大きさである。図中、直線要素(1要素)は、設計計算でよく用いられるように、ケーブルを1つのトラス要素でモデル化した場合を意味する。これらの結果から、ケーブルに作用する風荷重の桁と塔とに伝達される度合いが、直線トラス要素(1要素)で解析した場合に比べて多少異なってくることがわかる。特に、桁にとって、2面吊りケーブルで約5t/定着断面の橋面内垂直方向の風荷重が生じることは注意を要する。したがって、定着間隔が短いマルチケーブルシステムに

表1 節点の風荷重 (t/m)

節点1	節点2	節点3	節点4
0.042	0.039	0.033	0.024

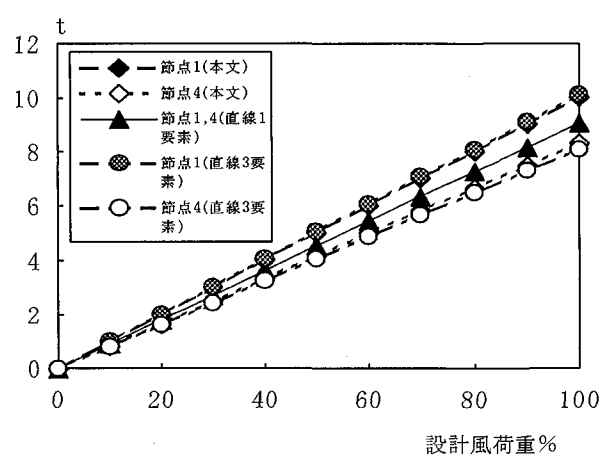


図9 橋直角方向の風荷重分配

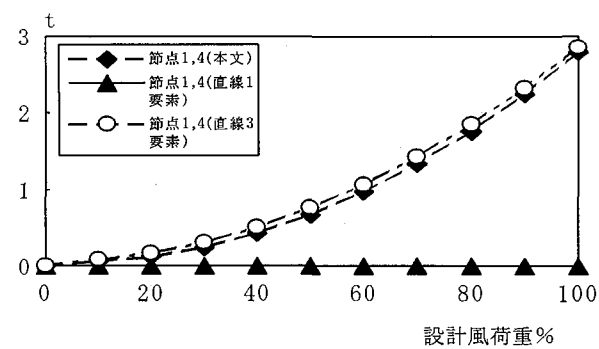


図10 橋面内垂直方向の風荷重分配

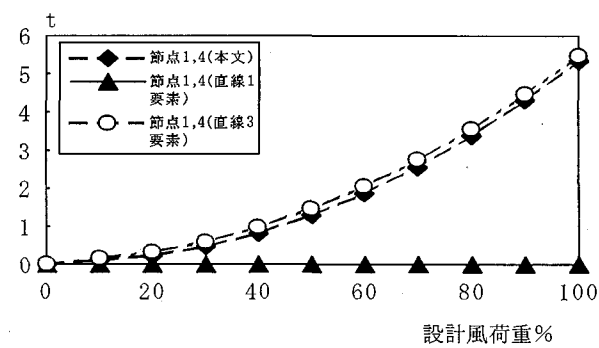


図11 橋軸方向の風荷重分配

対して、斜張橋全体系の解析を行う際、その影響を厳密に検討する意義があると考ええる。

また、図には直線3要素での計算結果も併記してあるが、このような非線形性の弱い場合には、直線要素でも正確な解析が可能であることが確認された。

4 まとめ

幾何学的非線形性が著しい柔ケーブルに対して、Total Lagrangian Formulation で解析する場合、精度や収束性を確保するためには、ひずみの高次非線形項までを考慮しなければならないため、非線形方程式が複雑となる。それに対して、Updated Lagrangian Formulationでは変形後のケーブル形状を参照することから、低次の非線形項だけで大変形ケーブルの非線形挙動を取り扱える。

本論文では、Updated Lagrangian Formulationに基づき、2次までの非線形ひずみを用いた仮想仕事原理から、ケーブル要素の剛性方程式を増分形で定式化した。得られた増分形方程式は一般的な理論からの定式化であるので、要素族として有限要素法汎用プログラムに設置することも簡単である。また、いくつかの例題を解析して本手法の精度と収束性における優位性などの特長を示した。本手法はカテナリー解析解に基づいた解法に比べて自由度数がやや増えるが、動的問題や弾塑性解析への拡張が容易であることや任意外乱を受ける際の挙動を解析できるなどの利点があり、マルチケーブル長大吊構造の解析に適していると考えられる。

最後に、本研究の計算例(3)のケーブルデータ及び風荷重データは川田工業株式会社の野村国勝・中崎俊三両氏に提供頂いたもので、ここに記して謝意を表わす。

付録2 曲線局所座標の方向ベクトル導関数

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial s} = \left(\frac{\partial^2 X}{\partial s^2} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} \mathbf{j} + \frac{\partial^2 Z}{\partial s^2} \mathbf{k} \right) / \sqrt{g_1} = \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial s^2} / \sqrt{g_1} \quad (A.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = \left(\frac{\partial^3 X}{\partial s^3} \mathbf{i} + \frac{\partial^3 Y}{\partial s^3} \mathbf{j} + \frac{\partial^3 Z}{\partial s^3} \mathbf{k} \right) / \sqrt{g_2} = \frac{\partial^3 \mathbf{X}}{\partial s^3} / \sqrt{g_2} \quad (A.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial s} \times \mathbf{t} + \mathbf{s} \times \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} \quad (A.6)$$

ここに

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \mathbf{X}}{\partial s^3} = & \frac{1}{J} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial \xi^2} \frac{1}{J} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J} \right) + \frac{1}{J^2} \left\{ \frac{\partial^3 \mathbf{X}}{\partial \xi^3} \frac{1}{J} + \right. \\ & 2 \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial \xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J} \right) + 3 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J} \right) \right]^2 - \frac{1}{J^3} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} \left[\left(\frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} \right)^2 \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial^3 X}{\partial \xi^3} + \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \right)^2 + \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial^3 Y}{\partial \xi^3} + \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} \right)^2 + \frac{\partial Z}{\partial \xi} \frac{\partial^3 Z}{\partial \xi^3} \right] \right\} \end{aligned} \quad (A.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J} \right) = -\frac{1}{J^3} \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} + \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial Z}{\partial \xi} \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} \right) \quad (A.8)$$

付録3 マトリックス[B]と[G]の誘導

線形ひずみ $\Delta \epsilon^L$ は次のように表せる。

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon^L = & \frac{\partial \Delta u_s}{\partial s} - \frac{\Delta u_t}{R} \quad (A.9) \\ \frac{\partial \Delta u_s}{\partial s} = & \left(\left[\frac{\partial e_{13}}{\partial s} \quad \frac{\partial e_{23}}{\partial s} \quad \frac{\partial e_{33}}{\partial s} \right] [N] + [e_{13} \quad e_{23} \quad e_{33}] \right. \\ & \left. \frac{\partial [N]}{\partial s} \right) \Delta \mathbf{u}^* = \left(\left[\frac{\partial e_{13}}{\partial s} \quad \frac{\partial e_{23}}{\partial s} \quad \frac{\partial e_{33}}{\partial s} \right] [N] + \frac{1}{J} \right. \\ & \left. [e_{13} \quad e_{23} \quad e_{33}] \frac{\partial [N]}{\partial \xi} \right) \Delta \mathbf{u}^* \end{aligned} \quad (A.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta u_t}{R} = & \Delta u_t \sqrt{\left(\frac{\partial^2 X}{\partial s^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial s^2} \right)^2} \\ = & \sqrt{\left(\frac{\partial^2 X}{\partial s^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial s^2} \right)^2} [e_{11} \quad e_{21} \quad e_{31}] [N] \Delta \mathbf{u}^* \end{aligned} \quad (A.11)$$

したがって

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon^L = & [B] \Delta \mathbf{u}^* \quad (A.12) \\ [B] = & \left(\left[\frac{\partial^2 X}{\partial s^2} \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial s^2} \right] [N] + \frac{1}{J} [e_{13} \quad e_{23} \quad e_{33}] \frac{\partial [N]}{\partial \xi} \right. \\ & \left. - \sqrt{\left(\frac{\partial^2 X}{\partial s^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial s^2} \right)^2} [e_{11} \quad e_{21} \quad e_{31}] [N] \right) \end{aligned} \quad (A.13)$$

付録1 ケーブル曲線軸の誘関数 $\partial \mathbf{X} / \partial s \sim \partial^2 \mathbf{X} / \partial s^2$

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} = \frac{1}{J} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} \quad (A.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial s^2} = & \frac{1}{J^2} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial \xi^2} - \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} \right) \frac{1}{J^2} \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} + \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial Z}{\partial \xi} \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (A.2)$$

J は Jacobian を表わす。

$$\begin{aligned} J = & \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \xi} \right)^2} = \\ & \sqrt{\left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial \xi} X_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial \xi} Y_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial \xi} Z_i \right)^2} \end{aligned} \quad (A.3)$$

非線形ひずみ $\Delta \epsilon^N$ は次のように表せる。

$$\Delta \epsilon^N = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Delta u_i}{\partial s} + \frac{\Delta u_s}{R} \frac{\partial \Delta u_n}{\partial s} \frac{\partial \Delta u_s}{\partial s} - \frac{\Delta u_i}{R} \right] \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Delta u_i}{\partial s} + \frac{\Delta u_s}{R} \\ \frac{\partial \Delta u_n}{\partial s} \\ \frac{\partial \Delta u_s}{\partial s} - \frac{\Delta u_i}{R} \end{array} \right\} \quad (A.14)$$

但し

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Delta u_i}{\partial s} + \frac{\Delta u_s}{R} \\ \frac{\partial \Delta u_n}{\partial s} \\ \frac{\partial \Delta u_s}{\partial s} - \frac{\Delta u_i}{R} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial s} & 0 & \frac{1}{R} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ -\frac{1}{R} & 0 & \frac{\partial}{\partial s} \end{array} \right] [e]^T [N] \Delta u^o$$

$$= \left[\frac{1}{J} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} [e]^T + N_1 \frac{\partial [e]^T}{\partial s} + \frac{N_1}{R} [e^*], \dots, \frac{1}{J} \frac{\partial N_m}{\partial \xi} [e]^T + N_m \frac{\partial [e]^T}{\partial s} + \frac{N_m}{R} [e^*] \right] \{ \Delta u \}^e = [G] \Delta u^o \quad (A.15)$$

したがって、

$$[G] = \left[\frac{1}{J} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} [e]^T + N_1 \frac{\partial [e]^T}{\partial s} + \frac{N_1}{R} [e^*], \dots, \frac{1}{J} \frac{\partial N_m}{\partial \xi} [e]^T + N_m \frac{\partial [e]^T}{\partial s} + \frac{N_m}{R} [e^*] \right] \quad (A.16)$$

参考文献

- 1) 伊藤 学：吊形式橋梁について，構造工学論文集，Vol. 40A, pp. 1~7, 1994. 3.

- 2) 前田 幸雄・林 正・前田 研一：サグを考慮したケーブル部材の計算式，土木学会論文報告集，No. 257, pp. 123~126, 1977. 1.
- 3) 後藤 茂夫：柔ケーブル材の接線剛性方程式について，土木学会論文報告集，No. 270, pp. 41~49, 1978. 2.
- 4) 山本 孝雄・北原 俊男：ケーブルの非線形性を考慮した斜張橋解析，住友重機械技報，Vol. 27, No. 80, pp. 31~38, 1979. 8.
- 5) Henghold, W.H. and J.J. Russell: Equilibrium and natural frequencies of cable a nonlinear finite element approach, Computer & Structures, Vol. 6, pp. 267~271, 1976.
- 6) 中西 宏・波田 凱夫：曲線要素を用いた有限要素法によるケーブル構造の大変形解析，土木学会論文報告集，No. 318, pp. 41~50, 1982. 2.
- 7) W. Kanok-Nukulchai, A. Hasegawa and F. Nishino: Generic formulation procedure for large deformation analysis of structural elements, Structural Engineering/Earthquake Engineering, Vol. 3, No. 1, JSCE, pp. 53s~61s, 1986. 4.
- 8) W. Kanok-Nukulchai, Po Kwong Anthong Yiu and Derick M. Brotton: Mathematical Modelling of Cable-Stayed Bridges, Struct. Eng. International, J. of IABSE, SEI, Vol. 2, No. 2, pp. 108~113, 1992.
- 9) 長井 正嗣・藤野 陽三：1000mを超える自定式斜張橋の構造形態に関する主に静的挙動からの一考察，構造工学論文集，Vol. 38A, pp. 1161~1174, 1992. 3.
- 10) 中村 一史・前田 研一ら：ケーブルの弛緩を考慮した長大斜張の立体有限変位解析，土木学会第49回年次学術講演会，pp. 62~63, 1994. 9.

(1994年9月14日受付)