

液体を満たした薄肉円筒殻のカオスの挙動

CHAOTIC VIBRATION OF A LIQUID-FILLED THIN CYLINDRICAL SHELL

豊田幸宏*、増子芳夫*

Yukihiro TOYODA and Yoshio MASUKO

*工修 (財) 電力中央研究所 我孫子研究所 (〒270-11 千葉県我孫子市我孫子1646)

This paper is concerned with an experimental study on the chaos of a partially liquid-filled cylindrical tank under horizontal excitation. The test cylinder with mean radius $r=170\text{mm}$ was made of polyester film with nominal thickness $h=0.188\text{mm}$ by lap-joining along a longitudinal seam and bonding an aluminum end plate along one edge. Shaking table testings were conducted in order to investigate the dynamic characteristics of the shell responses. In this series of the tests, the shell responses indicated the instability phenomenon, with jumps at some excitation frequencies, depending on the excitation acceleration amplitude. At low accelerations, several types of limit cycles were observed, and for excitation accelerations above a critical value, the shell responses became quasi-periodic. At higher excitation accelerations, the shell responses became chaotic. The occurrence of Chaos was recognized by the time history, Poincare map, phase trajectory, power spectrum, and Lyapunov exponent. In order to visualize the strange attractor, phase portraits were constructed by embedding the trajectories in a three dimensional phase space.

keywords: Chaos, Strange attractor, Poincare map, Lyapunov exponent

1. はじめに

内部に液体を含む薄肉円筒容器は、内部液体と円筒殻との動的連成系を形成する。このような系は、ロケット燃料タンクに関連する宇宙開発、原子炉容器などの原子力エネルギー分野、石油タンク・化学プラントに見られる化学工業などの幅広い分野で見ることができる。それらプラントで使用される円筒構造物は、近年、大型化、薄肉化の傾向にあり、液体—円筒容器系の動的挙動を解明することは、システム全体の安全性を確保するために、非常に重要な工学的課題の一つである。

従って、液体—円筒容器系を対象に、従来より数多くの理論的、実験的研究^{1)~8)}が行われ、特に微小振幅運動を前提とする線形系については、基本的な現象の把握から解析モデル化手法に至るまで十分適切な評価が可能となっている。また、大振幅運動に起因する非線形動的挙動に着目した検討事例^{9)~16)}も数多く見受けられ、線形系では見られなかった種々の特異な現象の発生することが明らかにされている。

一般に、非線形振動系には複数のアトラクタやカオスの解的存在することが、最近の計算機シミュレーション技術の飛躍的な向上により、明らかとなってきた。たとえば、Holmes, Shawら¹⁵⁾は、1自由度非対称衝突振動系を力学理論の手法を用いて解析し、種々の分岐現象やカオスの挙動が発生すると報告している。また、佐藤ら¹⁶⁾は、外力を受けるアーチのような非対称構造モデルで表されるvan der Pol-Mathieu-Duffing系振動系のカオスの挙動について、その発生の有無あるいは発生の条件などについて数値シミュレーションを行っている。

しかしながら、これらは、振動系を理想化した簡易力学モデルによる数値的検討であり、実際の振動系、特にここで対象とするような液体—円筒容器系で、カオスの振動の発生の有無あるいは発生の条件について検討した例はほとんど見あたらない。千葉ら¹⁰⁾、岡崎ら¹¹⁾は、液体を満たした円筒殻に関し、振動外力が比較的大きい場合に円筒殻応答がカオス状態となることを観察・報告している。しかしながら、前者は、円筒殻構造緒元が、パラメトリック不安定振動現象の発生に及ぼす影響を把握することに着目したもので、カオス現象そのものに言及したものではない。また、後者においては、実験に用いたモデルの構造緒元が、本実験で使用したものとは異なっており、実験条件が限られている。

そこで、本研究では、液体—円筒容器系の非線形連成動的挙動を実験的に調べ、実際に生じた複雑な現象がカオスであるかどうかを示すこと、また、構造系の緒元条件が、カオス振動の発生やカオスの振動挙動に及ぼす影響を把握することを目的とする。そのため、その第1歩として、液体を満たした円筒容器を水平方向に正弦波加振した場合の容器の応答が、加振加速度の増加に伴い、周期的な応答からカオスの挙動へと遷移する過程を調べた。本報は、液体を満たした薄肉弾性円筒殻の振動実験結果について報告したものである。

2. 実験方法

2.1 円筒殻模型

実験に用いた円筒模型を図—1に示す。模型は、板厚

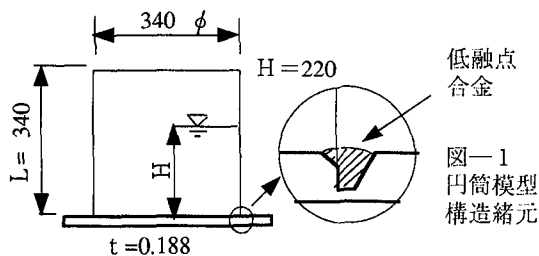


表1 ポリエステルフィルム材料定数

ヤング率 E (kgf/mm ²)	重量密度 ρ (kgf/mm ³)	ポアソン比 ν
4.85×10^2	1.41×10^{-6}	0.30

0.188mmのポリエステルフィルムを半径 $R=170\text{mm}$ になるように軸線に沿って重ね合わせて接着し、下端を低融点合金によりアルミニウム製底板に固定したものである。使用したフィルムの材料定数を表-1に示す。同表中の弾性係数は、常温下で実施した単軸引張試験ならびに自由振動試験より得られた実測値である。具体的には、引張試験では、矩形状に切り出したポリエステルフィルム小片（幅40mm、長さ160mm）を用い、荷重と伸び量の関係を実測し、自由振動試験では、矩形状小片の片持ち梁としての固有振動数を計測することにより弾性係数を求めた。これら実測値の平均値は、実験に用いた液体円筒容器系を対象とした固有値解析における解析用物性値として用いられた。

なお、内部液体には、水道水を用い、本実験では、全ケースにわたり、水位は一定とし、円筒容器底面上表面より220mmとした。

2.2 実験装置および加振方法

実験装置の概略を図-2に示す。計測項目は、振動台入力加速度と円筒胴部の面外変位とし、変位計測には、渦電流式非接触変位計を使用した。変位計は、円筒模型に対して軸方向、周方向に移動可能な計装治具に装着され、固有モード形状等を測定できるようになっている。計測されたアナログ信号は、AD変換ボードを介してパソコンに収録されるとともに、FFTアナライザにも入力され周波数分析をオンラインで実施した。

加振には、(財)電力中央研究所が所有する水平・上下2軸小型電磁式振動台（振動台寸法、 $1\text{m} \times 1\text{m}$ 、最大積載重量、300kgf）を用い、加速度制御による水平方向正弦波加振を行った。

実験では、まず、模型の固有振動数、固有モード形状を調べるために、正弦波掃引加振を実施した。ついで、共振振動数を加振振動数とした条件で、入力加速度振幅を段階的に増加させ、模型の応答が、周期的な運動からカオスの挙動へと遷移する様子を調べた。なお、正弦波掃引加振時における加振振動数の掃引速度は、 0.05Hz/sec とした。なお、実験は、 20°C 前後の室温下で実施された。

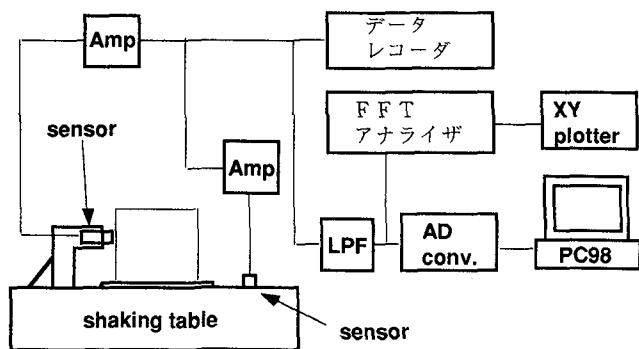


図2 実験装置の概略

3. 実験結果および考察

3.1 線形応答特性

液体を満した円筒殻模型を微小加振して、円筒胴部応答曲線を求めた。得られた周波数応答の一例を図-3に示す。同曲線は、変位計を模型軸方向について、 $x/L=0.56$ （模型底板上表面と変位計固定位置までの距離を X と表記した。）、周方向については、加振軸方向 $\theta=0^\circ$ に設定し計測されたものである。また、振動台加振加速度振幅は、5galである。図-3において、50Hz以下の主たる共振点に関し、振動モード形状を測定し、別途実施したFEMによる線形固有値計算結果と併せ示したものが図-5、図-6である。ここで、計算の実施にあたっては、電力中央研究所が開発した有限要素法に基づく流体連成振動解析コードLISAを用いた。有限要素モデル（図-4、表-2参照）については、静液圧により初期軸対称変形を考慮したものを作成し、自由表面での動水圧は、零とした。要素分割については、円筒殻部を、軸対称シェル要素により32分割し、流体部は、軸対称流体要素により256分割した。

図-5～6によれば、固有振動数については、FEM解と実験値は全域にわたり非常によく一致しており、円筒殻の振動モードも両者よく一致していることがわかる。従って、ここで得られた解析値と実験値との良好な一致より、模型の初期不完全性は比較的小さいものと考えられる。

3.2 非線形応答特性

(1) 周波数応答

振動台加振振幅を5galから100galまで逐次増大したときの円筒殻胴部の1点、 $x/L=0.56, \theta=0^\circ$ における周波数応答を図-7に示す。図において、縦軸は、応答変位の実効値を示している。これら図によれば、加振振幅の増加に伴い不安定現象の生ずる振動数範囲および応答振幅が増大していることがわかる。ここで得られた結果は、不安定振動の発生する領域を概略把握し、加振振動数や振幅等の加振条件を設定するにあたっての参照データと

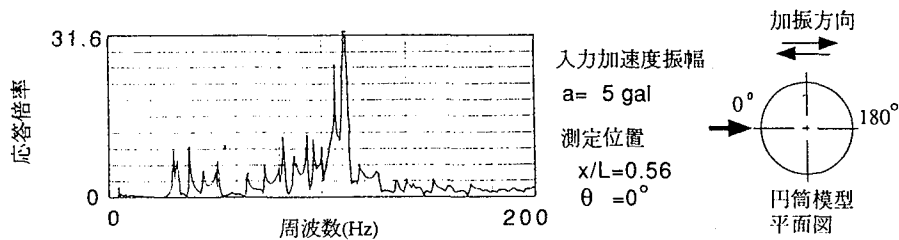


図-3 共振曲線

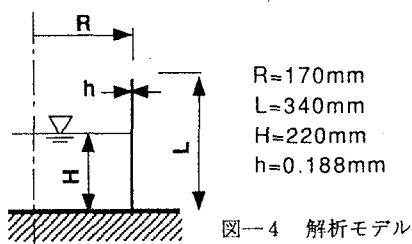


図-4 解析モデル

表-2 解析用物性値

ヤング率	E (kgf/mm ²)	4.85×10^2
ポアソン比	ν	0.3
構造系密度	ρ_s (kg/mm ³)	1.41×10^{-6}
流体密度	ρ_L (kg/mm ³)	1.00×10^{-6}

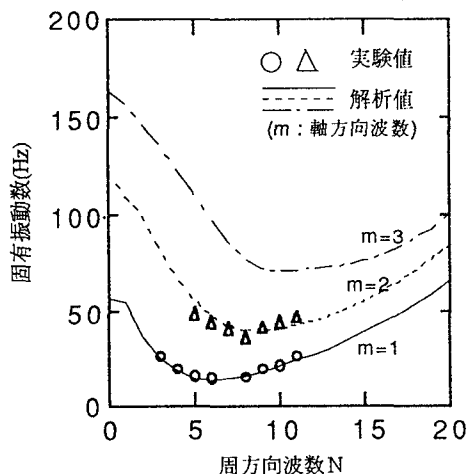
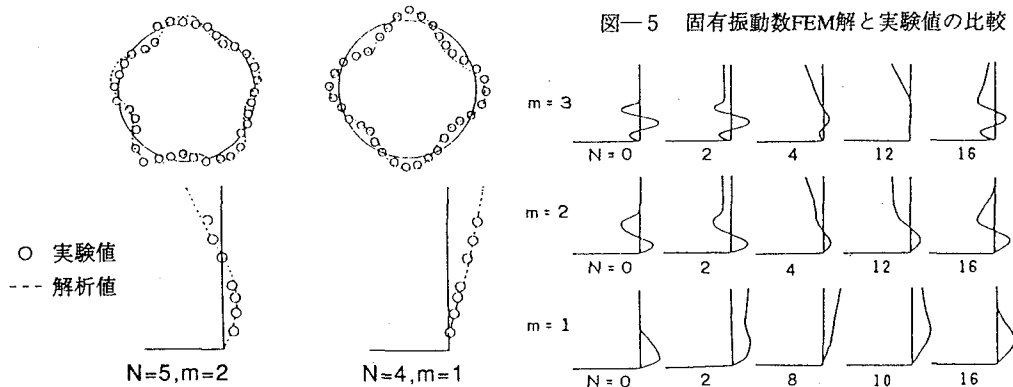


図-5 固有振動数FEM解と実験値の比較



(1)実験より得られた振動モードの一例

(2)FEM解による振動モード

N:周方向波数、m: 軸方向次数

図-6 振動モード図

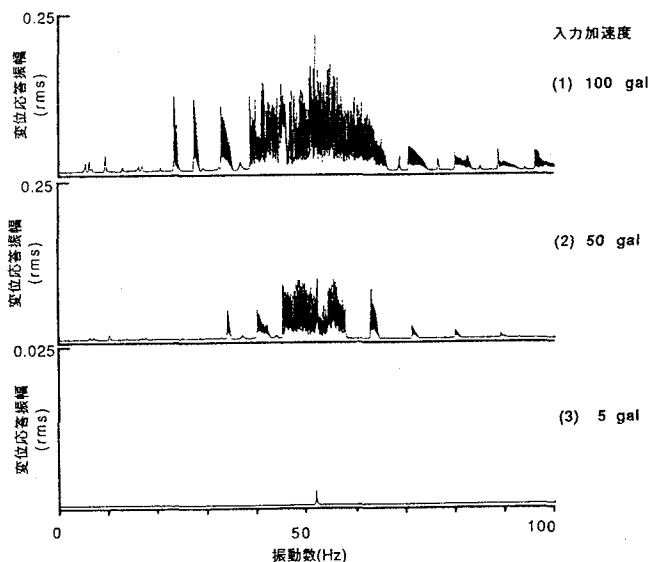


図-7 周波数応答特性

して用いられた。

(2) 液面変動の時系列信号

非接触変位計からの出力波形の一例を図-8に示す。図に示した出力波形は、変計測位置を、 $x/L=0.56$, $\theta=0^\circ$ とした時に得られたものであり、加振振動数（以下 f_0 と表記する。）48Hzにおける応答波形を示している。図において、(1)と(2)は(3)~(5)と比較して時間軸を拡大してある。これは、(1)と(2)における信号が定常的に連続であり、波形を詳細に示すためである。また、(3)~(5)は円筒胴部応答変位の振幅が時間的に変化するため(1)および(2)と比較して長い時間軸で示した。図から加振振幅が5 gal（以下 $a=5$ galと表記する。）では調和振動であることがわかる。 $a=20$ galとなると、周期の異なる波との混合が見られる。さらに、加振振幅が増大すると、応答波形は、完全にビードを打つようになり、最大応答振幅が増大していることもわかる。さらに加振振幅が増大されるとき、円筒殻胴部の最大応答振幅が増大し、周期性が乱れ、ラ

ンダムな様相を呈していることがわかる。

(3) 応答変位の周波数分析

図-9は、図-8に示した応答変位波形のパワースペクトルを示したものである。これらによれば、明らかに $a=5$ galでは加振振動数 f_0 の成分が卓越している。 $a=20$ galとなると、応答変位の周波数成分は、加振振動数 f_0 より低い2つの振動数成分、すなわち $f_1=22.8$ Hz, $f_2=25.2$ Hzが明らかに認められる。さらに加振加速度レベルが40 galに増加するとそれら2つの振動数周波数 f_1 , f_2 が卓越していることがわかる。これらは、パラメトリック不安定振動現象が発生した際によくみられるもので、千葉ら¹⁰⁾の実験でも同様な現象は観察されている。本実験で観察されたものは、いわゆる結合型の不安定振動と呼ばれるもので、加振振動数成分 f_0 と f_1 , f_2 の間には、 $f_0=f_1+f_2$ の関係が成り立つ。また、 $a=40$ gal条件でのスペクトル上の共振峰は、 $f=f_2-f_1$ （約3 Hz）を最小振動数とする高調波成分からはば構成されていることが認められ、円筒殻は、概

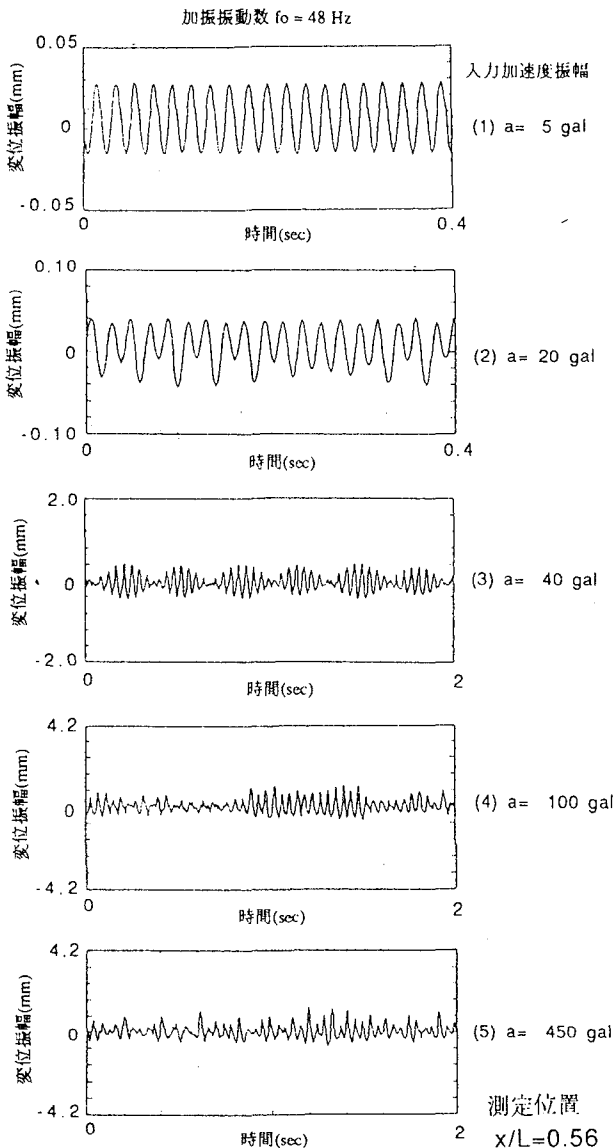


図-8 応答変位の時系列波形

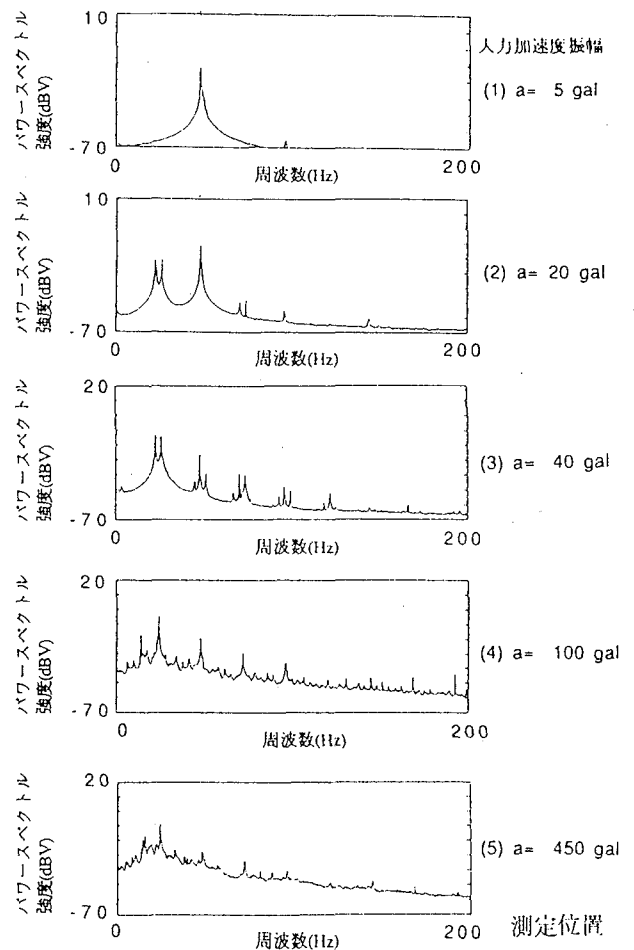
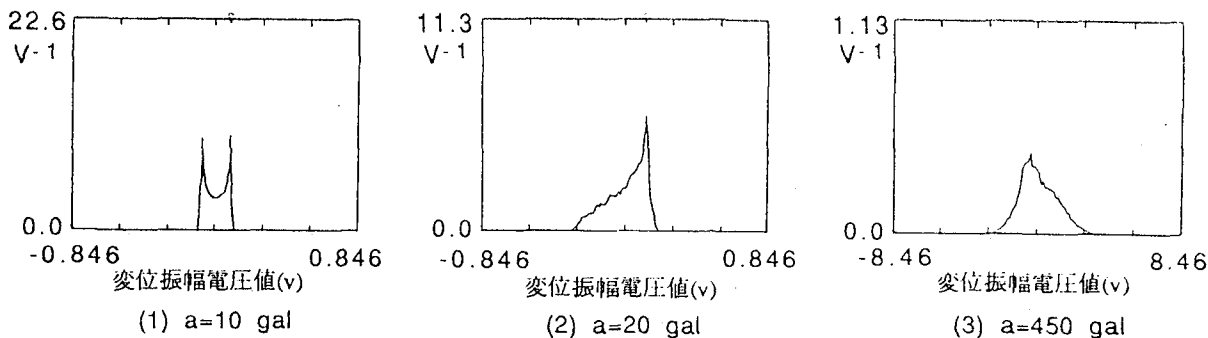


図-9 応答変位のパワースペクトル



図一10 変位応答の振幅確率密度関数

周期的に responding していることがわかる。さらに加振振幅が増加すると、離散スペクトルは幅を広げて連続スペクトルへと次第に遷移する。この図-9(4)~(5)によれば、円筒殻胴部の応答波形は、広い範囲の周波数成分によって構成されていることがわかる。一般にカオス的な運動では、このような幅のある連続スペクトルを持つことがわかっており、ここで観察された振動挙動は、カオス的であると考えられる。

(4) 変位応答の周期性

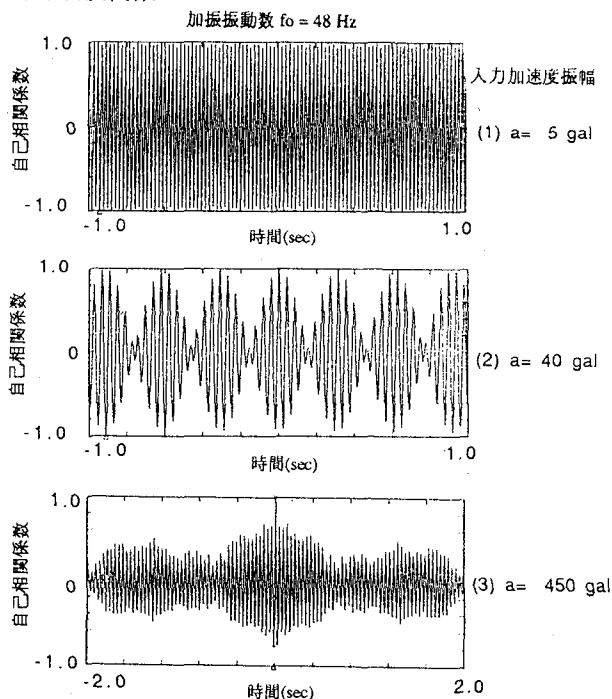
ここでは、応答波形の不規則性がどの程度強いものかを統計的手法により検討する。

図-10、図-11に、上記の応答波形のいくつかについて、振幅確率密度関数、自己相関関数を算定した結果を示す。これら図によれば、加振振幅が小さい領域では応答が極めて強い周期性を有していることは、明らかである。加振振幅が増大すると、図-10(2)、図-11(2)に示すごとく、不規則性は増大するが周期性も残っていることがわかる。 $a=450\text{gal}$ となると、密度関数の形状は、あたかも狭帯域雑音のごとく形状を呈しており、また、自己相関係数においても信号の周期性はほとんど認められなくなっている。一般に、パワースペクトルが幅広くなってくると、自己相関関数の値も小さくなってゆくの、相関関数が零に近いことがカオスの特徴である。乱雑さが増大すればすほど、自己相関関数の値は、零に近く付くよく知られている。従って、 $a=450\text{gal}$ では、乱雑さが多少温和なカオスが発生しているものと考えられる。

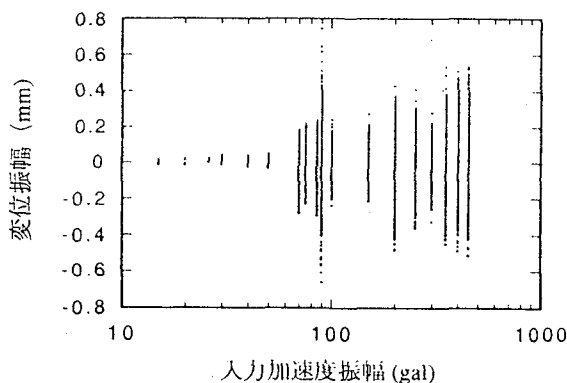
(5) 変位応答における分岐

図-12に、 $f_0=48\text{Hz}$ の場合における円筒殻胴部の振動挙動の分岐線図を示す。この図は、加振加速度場の位相が 2π のときの円筒殻胴部の相対変位を縦軸にプロットしたものである。また、この図でサンプリングしたフレーム時間は8secに設定した。図において加振振幅が小さい領域($a<20\text{gal}$)では変位応答が1つの周期で振動するため一定の位置にある。さらに加振振幅が増大すると、先の(3)で述べたごとく、パラメトリック不安定振動を起こし、分岐が発生していることがわかる。さらに加振振幅が大きくなると円筒殻胴部の変位応答は非周期的になり、いろいろな値を持っていることがわかる。

先に示した図-9において、加振振幅が増大するにつ

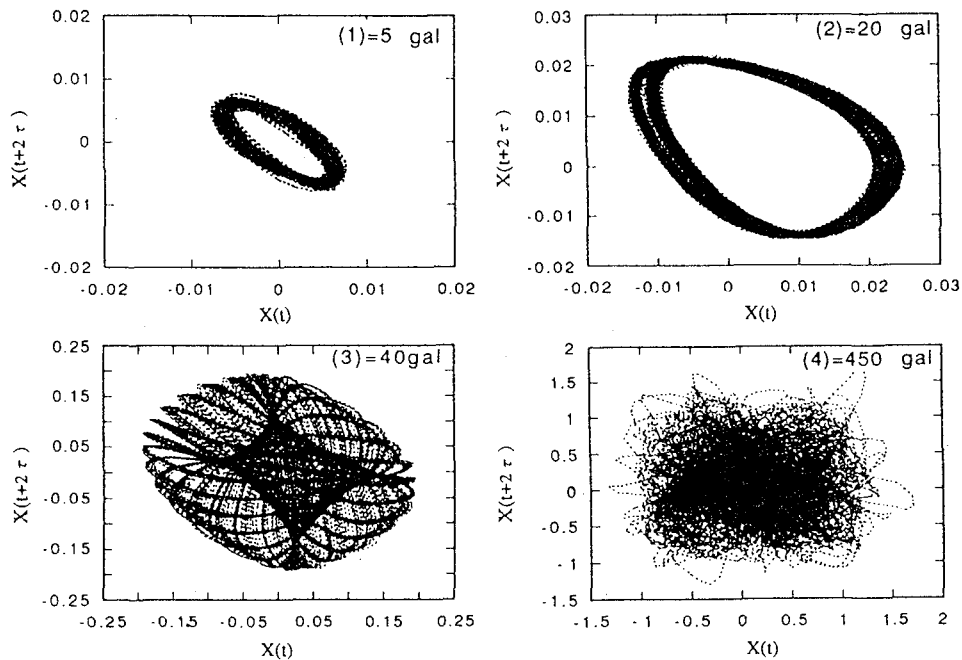


図一11 自己相関関数

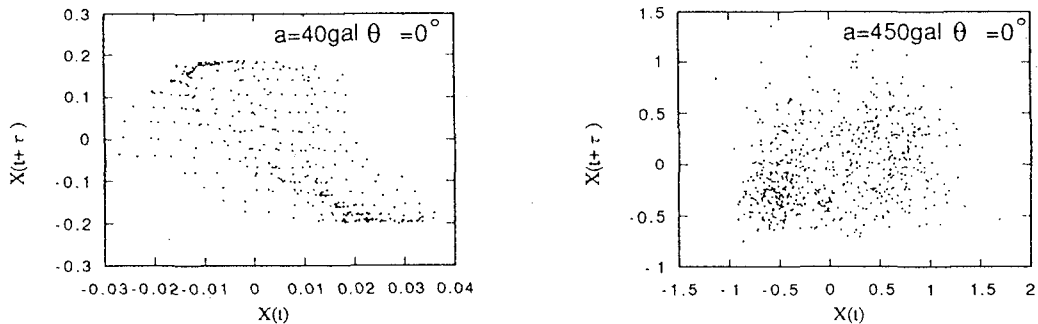


図一12 変位応答の分岐線図 $f_0=48\text{Hz}$

れ、分岐が発生し、その後、応答は、概周期的となり、次第に周波数成分が連続スペクトルとなりカオスの挙動に遷移していく様子を示した。これは、いわゆるカオスへのルートが概周期崩壊ルートであったことを意味するもので、ストレンジアトラクタの存在を示唆している。一般にアトラクタを調べる場合には、適当な n 次元位相空間での軌道を見る必要がある。ここでは、 $\{Z(t), Z(t+\tau),$



図一 1 3 相平面図 加振振動数 4 8 Hz



図一 1 4 ポアンカレ断面図

$Z(t+2\tau)$ の位相平面における軌道を組み立てた。図一 1 3 に、 $f_0=48\text{Hz}$ における、いくつかの加振振幅の場合について、軌道変化の相平面図を示す。ここでサンプリング時間は 1.0msec 、 τ は 3sec とした。これら図より、加振振幅が小さい時は明らかにリミットサイクルとなっている。次に加振振幅が 20gal を超えてくると軌道が変形し、分岐の発生したことを示している。さらに高い加振振幅の条件では、軌道は同じ道を通らず、軌道が平面上に広がる強い軌道不安定性を示していることがわかる。

$a=40\text{gal}$ 、 $a=450\text{gal}$ の場合について、図-1 4 に加振加速度場の位相が零の時の軌道をプロットした、いわゆるポアンカレ断面を示す。両者を比較すると、 $a=450\text{gal}$ の場合は、 $a=40\text{gal}$ の場合に比べ位相空間上での軌道が乱雑に存在していることがわかる。

(6) アトラクタのフラクタル性

一般に、質のよい時系列データがあれば、アトラクタの相関次元を求めることにより、それが熱雑音のような

多自由度の乱雑さか、それとも少数自由度での不規則性を判定することができる。図一 1 3 (4) に示した軌道について、相関次元を算出した結果を図-1 5 に示す。ここで、相関次元 D_2 の定義は、以下のとおりであり、実際、実験で得られた時系列データから算定するにあたっては、Grassberger と Procacia により開発された手法¹⁷⁾を用いた。

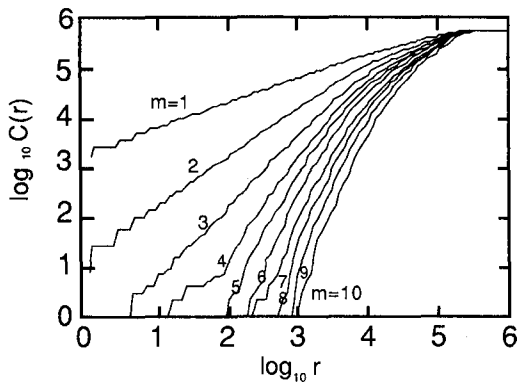
$$D_2 = \lim_{r \rightarrow 0} (\log C(r) / \log r) \quad (1)$$

ここで、

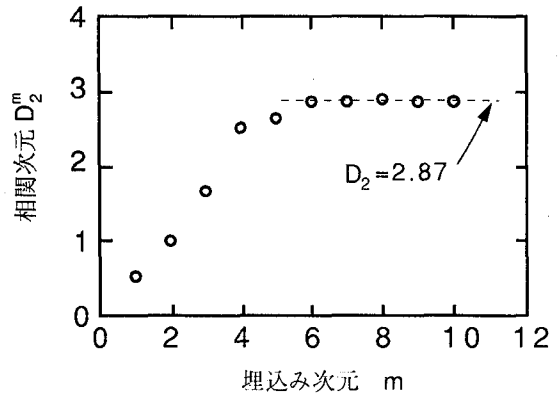
$$C(r) = \sum_{i,j=1}^N H(r - |X_i - X_j|) \quad (2)$$

また、 $H(x)$ は、Heviside関数であり、 $|X_i - X_j|$ は、ベクトル X_i, X_j 間の距離を、 N は、時系列データ総数を表す。

図一 1 5 (2) に示すごとく、 m 次元の埋め込み空間の中で



(1) 相関積分 $C(r)$ と r の関係



(2) 相関次元と埋込み次元の関係

図—1 5 フラクタル次元解析結果
($f_0 = 48\text{Hz}$, $a = 450\text{gal}$ の場合)

求めたアトラクタの相関次元は、 m が大きくなるにつれてある一定値に収束していく様子がわかる。図中の平坦部分を平均すると一定値は、2.87 となった。つまり、本実験で観察されたカオスの応答挙動には、少数自由度での不規則性があるものと考えられる。また、次元が非整数であることから、位相空間におけるアトラクタは、フラクタル特性を有していると考えられる。

(7) 最大リアプノフ指数

カオスの定義の1つに、写像拡大率の対数であるリアプノフ指数が正であることが挙げられる。リアプノフ指数は、相空間の次元の数だけあり、カオスでは、少なくとも1つのリアプノフ指数が正となる。ここでは、図—1 3 (4) に示した軌道について、Wolf⁽¹⁸⁾らの方法を用い、(3)式より時系列データから最大のリアプノフ指数を算出した。

$$\lambda = \frac{1}{t_N - t_0} \sum_{j=0}^{N-1} \log \frac{L_j}{L_j'} \quad (3)$$

ここで、

t_0 : 時系列データ開始時刻

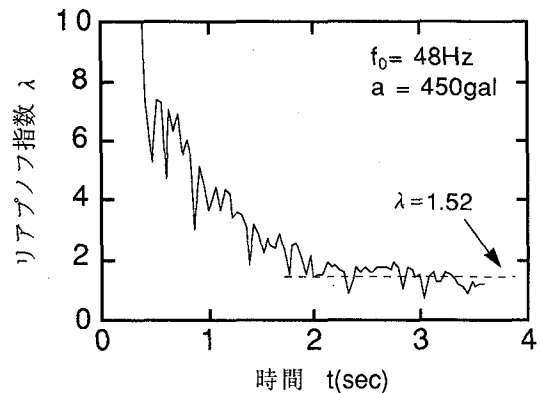
t_N : 時系列データ終了時刻

L_j : j stepでのベクトル X_j, Y_j 間の距離

L_j' : $j + \delta j$ ステップでのベクトル X_j, Y_j 間の距離

N : 時系列データサンプリング総数

図—1 6 に最大リアプノフ指数の収束状況を示す。これによれば、時刻 t に対して、最大リアプノフ指数は、約 1.52 に収束しており、 $a=450\text{gal}$ の場合が明らかにカオスの軌道であることがわかる。



図—1 6 リアプノフ指数の収束状況

波加振した場合の円筒殻胴部の応答を調べ、周期的応答からカオス状態への遷移過程を究明した。得られた結果を要約すると次のようになる。

(1) 加振振動数を一定にして、加振加速度を徐々に増加させた場合、円筒殻胴部の振動挙動は、始めは加振波形と同期しているが、加振振幅が限界値を超えると、概周期的運動となり、さらに加速度が大きくなると応答様相はカオス状態となることを最大リアプノフ指数を求めることで確認した。本実験における加振振幅の限界値は、20galであった。

(2) 本実験で観察されたアトラクタの次元を調べた結果、2.85 となり、過大な加振振幅下での円筒殻の振動挙動は、少数自由度での不規則性を有していることがわかった。また、算出した次元が非整数次元であることから、観察されたアトラクタにはフラクタル性があることがわかった。

謝辞

本実験実施にあたり、吉沢技研計測株式会社の齊藤智弥氏のご援助をいただいた。ここに感謝の意を示す。

まとめ

部分的に液体で満たされた円筒容器を水平方向に正弦

参考文献

- 1) G.W.Housner: Dynamic pressures on accelerated fluid containers, Bull.Seim.Soc.Am., Vol.47,1957
- 2)坂井藤一、迫田治行: 大型液体タンクの地震応答に関する研究、第4回日本地震工学シンポジウム論文集,1975
- 3) Clough, D.P.: Experimental evaluation of seismic design methods for broad cylindrical tanks, Univ. of. California, EERC Rep., No.UCB/EERC-77/10,1977
- 4) 曾我部潔、重田達也、柴田碧: 液体貯層の耐震設計に関する基礎的研究、東京大学生産技術研究所報告、第26巻、第1号、1977
- 5) A. Niwa : Seismic behaviour of tall liquid storage tanks, Univ.of.California,EERC Rep., No.UCB/EERC-78/04,1978
- 6) M.A. Haroun and G.W.Housner : Dynamic characteristics of liquid storage tanks, Proc. of ASCE J. of the Engineering Mechanics Division, Vol.108,No.EM-5,1982
- 7)千葉正克、八巻昇、谷順二: 部分的に液体を満たした片持ち円筒殻の自由曲げ振動、日本機械学会論文集 C,50巻453号、昭和59年
- 8) A. Sakurai, et al : Fluid-coupled vibration analysis of reduced models of a large pool type LMFBR in Japan, 8th SMiRT, Vol. EK1/8, 1985
- 9)M.Chiba, J. Tani et al: Dynamic stability of liquid-filled cylindrical shells under horizontal excitation, Part I: Experiment, J. of Sound and vibration, Vol.104(2),1986
- 10)M.Chiba, J. Tani and N.Yamaki : Dynamic stability of liquid-filled cylindrical shells under vertical excitation, Part I: Experiment, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 15,1987
- 11)K.Okazaki, J. Tani et al : Experimental study on chaos of a liquid-filled tank under horizontal excitation, ASME PVP-Vol.258, Flow-Induced Vibration and Fluid-Structure Interaction, 1993
- 12)W.K.Liu and R.A. Uras : Transient failure analysis of liquid-filled shells Part I: Theory, Nuclear Engineering and Design, Vol.177,1987
- 13)R.A. Uras and W K.Liu : Dynamic buckling of liquid-filled shells under horizontal excitation, J. of Sound and Vibration,Vol 141,1990
- 14)J. Guckenheimer and P. Holmes : Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer,1983
- 15)S.W.Shaw and P.J. Holmes:Dynamic behaviour in a vibro-impact mechanical system, J.of Sound and Vibration, Vol.90, 1983
- 16)佐藤啓二、山本純雄ら: 強制外力を受ける係数励振形非線形自励振動系のカオスの挙動、日本機械学会論文集、58巻、551号、1992
- 17)P. Grassberger and Procaccia:Characterization of Strange Attractors, Physical Review Letters, Vol.50, 1983
- 18)A. Wolf, J.B. Swift, L.Swinney et al :Determining Lyapunov Exponents from a time series, Physica16D Vol.31, 1985

(1994年9月14日受付)