

等曲げを受ける円弧アーチの横倒れ座屈実験

LATERAL TORSIONAL BUCKLING TESTS ON CIRCULAR ARCHES UNDER UNIFORM BENDING

後藤 文彦*・倉西 茂**・岩熊 哲夫***・菅原 紘一****・藤本 国博†
Fumihiko GOTO, Shigeru KURANISHI, Tetsuo IWAKUMA, Kouichi SUGAWARA and
Kunihiro FUJIMOTO

*正会員 工博 東北大学助手 工学部土木工学科 (〒980-77 仙台市青葉区荒巻字青葉)

**正会員 工博 関東学院大学教授 工学部土木工学科 (〒236 横浜市金沢区六浦 4834)

***正会員 Ph. D. 東北大学教授 工学部土木工学科

****正会員 東北大学技官 工学部土木工学科

†東北大学大学院生

A closed form solution for lateral torsional buckling of circular arches under uniform bending is useful to demonstrate the validity of finite element formulations to investigate the out-of-plane instability problems of spacial frames. However, the validity of such a closed form solution itself has not been examined experimentally. In this study, lateral torsional buckling tests is carried out on circular arches under uniform bending and test results are compared with the results by the closed form solutions and finite element solutions.

Key Words : lateral torsional buckling, Vlasov's formula, Southwell's Method, Meck's Method

1. まえがき

曲げを受ける立体骨組部材の代表的な安定問題に、円弧アーチの横倒れ座屈がある。この問題は等曲げや一様圧縮などのある限られた条件下では解析解を求めることが可能であり、古典的な解としては Timoshenko¹⁾や Vlasov²⁾によるものがあつた。ところが1980年代初頭に、Yoo³⁾がそうした古典的な解析解とは全く異なる結果を与える解析解を導いたために、その後この問題に対する多くの研究が報告された。数値的な解析としては、Hasegawa ら⁴⁾が折れ線近似による線形座屈解析により Yoo と一致する結果を得たが、林と岩崎⁵⁾は、直線要素と円弧要素の各々に対して線形座屈解析を行い、通常のマトリクス解析では折れ線近似手法が正解を与えない場合があることを示した。更に、Maalla ら⁶⁾、Yang ら⁷⁾や岩崎と林⁸⁾は、より厳密に定式化した折れ線近似手法による解が、Vlasov の解析解または円弧要素による数値解によく一致することを示した。一方、新たな解析解も多数報告されたが^{9) 10) 11) 12)}、Yoo の解にも Vlasov の解にも一致しない。図-1、2に代表的な解析解によるアーチの横倒れ座屈の試算例を示す。試算に用いたアーチの諸元は弧長 $\ell = 10.244$ m、断面積 $A = 9.288 \times 10^{-2}$ m²、弱軸回りの断面二次モーメント $I_y = 3.871 \times 10^{-5}$ m⁴、強軸回りの断面二次モーメント $I_x = 113.63$ m⁴、ねじり定数 $J = 5.89 \times 10^{-7}$ m⁴、そりねじり定数 $I_\omega = 5.5869 \times 10^{-7}$ m⁶、ヤング率 $E = 200$ GPa、せん断弾性係数 $G = 77.2$ GPa である。

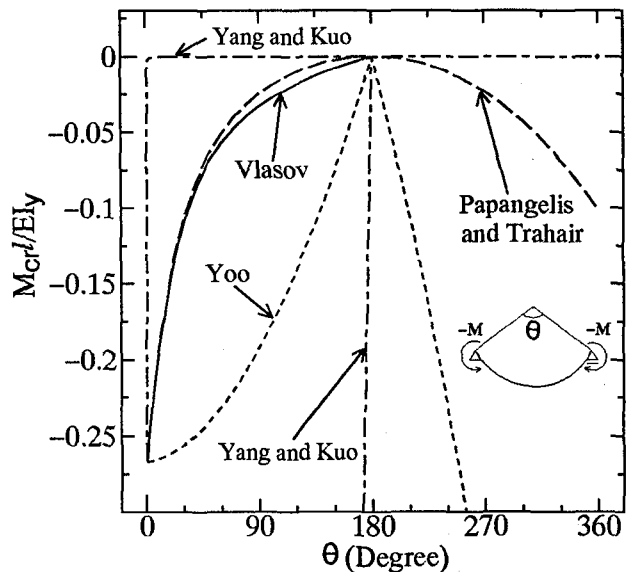


図-1 円弧アーチの横倒れ座屈 (負の等曲げ)

Yang と Kuo¹⁰⁾以外の解析解では座屈前の面内変位の影響を無視しているため、ここでは比較のために面内曲げ剛性の極端に大きいアーチで試算したところ、Yang と Kuo の解は他とは著しく異なる結果を与えた。ちなみに面内曲げ剛性が面外曲げ剛性の数倍程度であれば、Yang と Kuo の解は図面上では Vlasov の解に完全に一致する。Papangelis と Trahair¹¹⁾の解は、負の等曲げを受ける場合には、Vlasov の解と異なる。また図中に

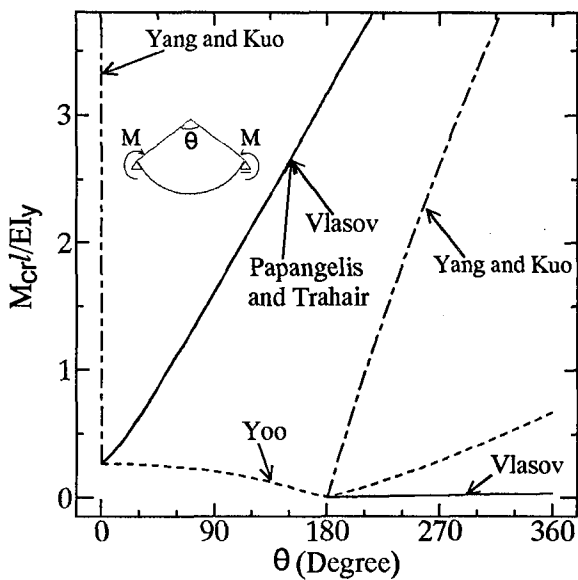


図-2 円弧アーチの横倒れ座屈（正の等曲げ）

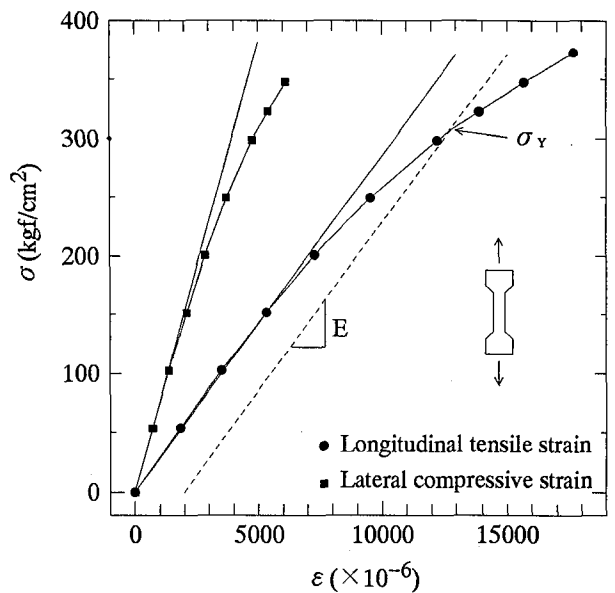


図-3 アクリル材の応力-ひずみ関係

はないが、Rajasekaran と Padmanabhan¹²⁾の解析解は、開角 180° の半円弧の解が不定になることを除き、Vlasov の解に完全に一致する。近年、Kang と Yoo¹³⁾は新しい解析解を報告しているが、Vlasov の解と完全には一致していない。このように種々の解析解が報告されている中で、Papangelis と Trahair¹⁴⁾は、中央集中荷重を受ける円弧アーチの横倒れ座屈実験を行い、曲がりばり要素を用いた数値解とよく一致することを示したが、等曲げを受ける円弧アーチに対する Vlasov の解析解を実験により直接的に検証することは行われていない^{15) 16) 17)}。そこで本研究は、この等曲げ問題に対応する境界条件および荷重条件を可能な限り忠実に再現し、Vlasov の解析解を実験と比較することを目的とする。

2. 実験モデル

供試体および荷重治具の製作の容易性から、供試体材料にはアクリル材を用いる。図-3に代表的な引張試験結果を示したが、この図よりヤング率 E は応力-ひずみ曲線の初期弾性係数として

$$E = 3.21 \times 10^4 \text{ kgf/cm}^2 (= 3.15 \text{ GPa}) \quad (1)$$

と算定した。ポアソン比 ν は縦横のひずみ比から

$$\nu = 0.38 \quad (2)$$

とした。せん断弾性係数 G は、これらから

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 1.16 \times 10^4 \text{ kgf/cm}^2 (= 1.14 \text{ GPa}) \quad (3)$$

と定める。便宜上、降伏点 σ_Y を 0.2% ひずみの点から初期勾配で応力-ひずみ曲線と交わった点とし

$$\sigma_Y = 306 \text{ kgf/cm}^2 (= 30.0 \text{ MPa}) \quad (4)$$

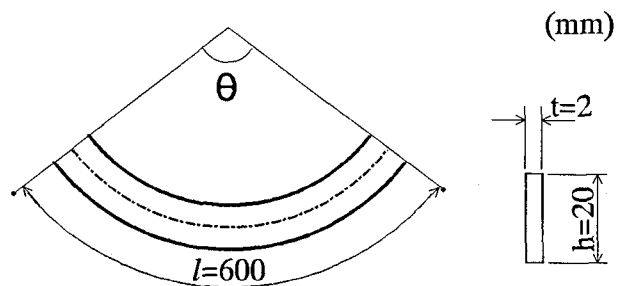


図-4 供試体形状

とする。この材料特性を元に、横倒れ座屈の前に面内座屈や断面塑性が生じないような供試体形状を、図-4のような弧長 600mm、2mm×20mm の矩形断面とした。実験装置の大きさの制限のため、弧長 600mm を固定して種々のアーチ開角 θ の供試体を製作することにより、曲率半径の影響を検討する。以下「開角」とはこのアーチ開角 θ のことを呼ぶ。

3. 境界条件および荷重条件

試験用アーチは、面外への初期の僅かな傾きにより、力が座屈を誘発することを避けるため、そのクラウン部を鉛直面の下側にして設置する。これは後述のように、開角 180° の半円弧に近いアーチの場合等では特に重要である。両端部の回転に関する境界条件は Vlasov の解析解に対応させて、図-5に示すような、両端で面内の回転と円弧半径放射方向軸回りの回転を自由とし、部材

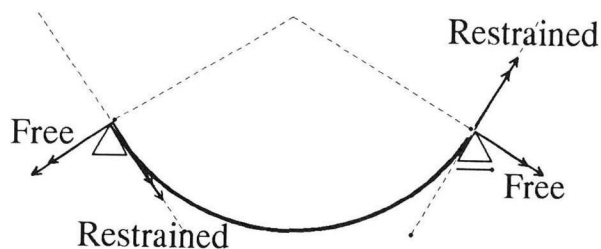


図-5 回転に関する境界条件

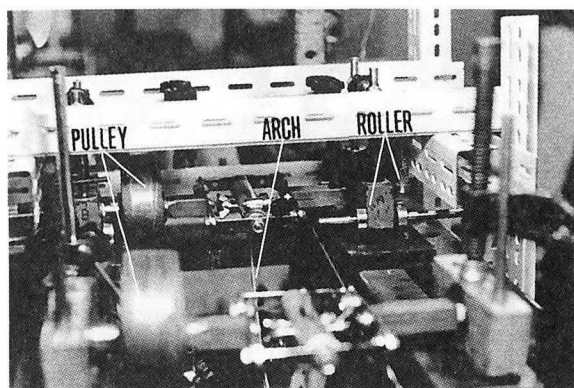


写真-2 モーメント载荷用滑車および可動支障

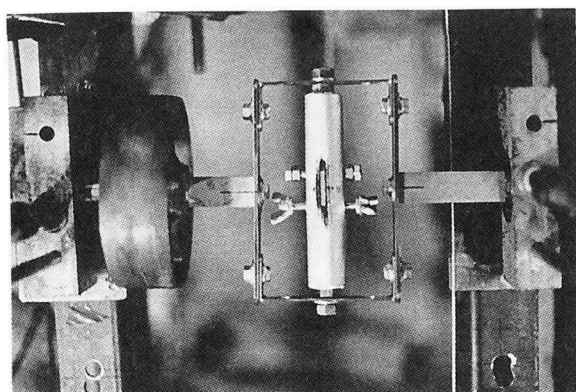


写真-1 供試体支持端

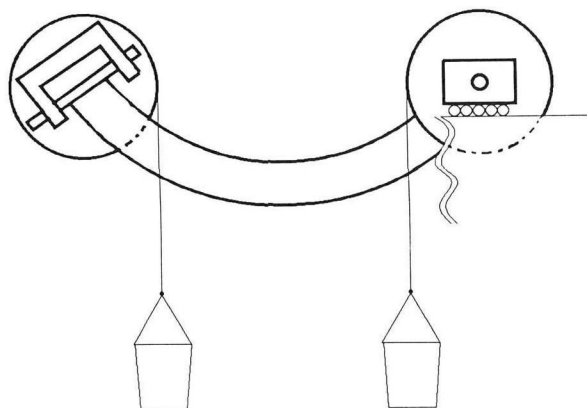


図-6 実験装置概略

端部接線方向軸回りの回転を拘束したものでなければならない。これは写真-1に示すような、供試体断面の図心を通る強軸、弱軸回りに各々面内、面外に回転できる留め具によって実現させた。尚 Vlasov の境界条件に、より厳密に対応させるためには、両端のそりは自由でな

ければならないが、細長い矩形断面ではその影響は無視できると考え、本装置の端部では供試体を板厚方向には挟み込んで固定している。

等曲げ载荷は、図-6のように両端の面内回転軸に取り付けられた滑車に互いに逆向きの回転力を与えることによって行う。この回転力は、各々の滑車に巻き付けた糸の先に吊り下げられた二つのカップ内に同時に重量の等しい錘を入れていくことにより与える。図-6は正のモーメント外力を与える場合を示しており、負のモーメントの場合は円弧の曲率を減少させる方向に変形するように滑車の外側にカップを吊るす。

また等曲げを与えるための並進に関する境界条件は、一端は全方向の変位を拘束し、他端は面内の一方向の変位を自由とすればよい。ここでは供試体自身の重量によって生じてしまう反力が左右対称となるように、自由とする一端の面内変位は水平変位とする。これは写真-2のように、一方の支承の下部水平面上にローラーを取り付けて可動支障とし、更に鉛直面内方向へもローラーを介したガイドを設け、一端を面内水平方向へのみ変位させることによって満足させる。滑車と底面の摩擦は不可避だが、水平方向ローラー支持によりアーチに水平方向外力は殆ど作用していないと考えられる。

4. 座屈モーメントの算定

実験供試体には種々の初期不整の存在が不可避であるため、モーメントの载荷により発生する座屈前後の面外変位の履歴から座屈モーメントを算定せざるを得ない。図-7に示したように、供試体に取り付けた標的 A、B を用いてレーザー変位計で面外水平変位を測定し、供試体図心軸の面外変位 δ とねじれ角 ϕ とを算出する。レーザーの標的は対称モードの場合はアーチのクラウン部に、また反対称モードの場合は弧長の $\frac{1}{4}$ の点に、曲率中心に向かう線上の断面頂部と底部の図心から等しい距離に配置する。

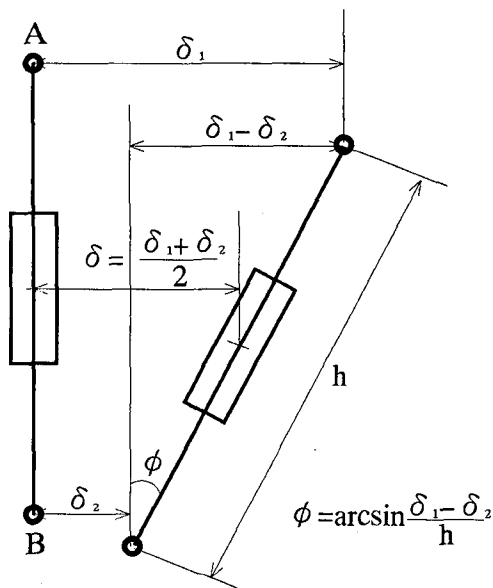


図-7 レーザー変位計の標的位置

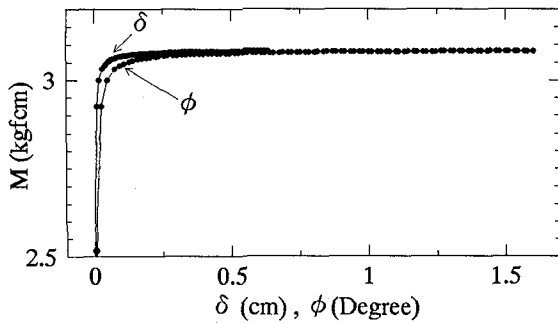


図-8 有限変位解析による変位履歴(開角 30°、正のモーメント)

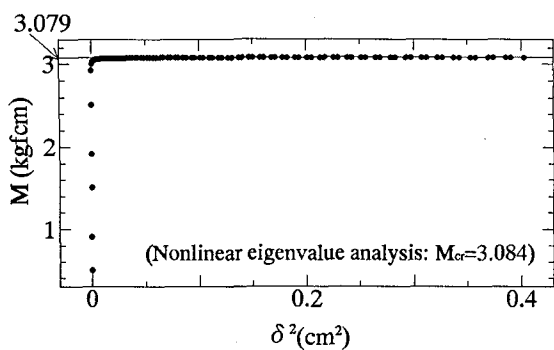


図-9 $M-\delta^2$ 法の数値シミュレーション(開角 30°、正のモーメント)

座屈荷重は次の三つの方法で算定する。

1. $M-\delta^2$ 法
2. Southwell 法¹⁸⁾
3. Meck 法¹⁹⁾

いずれもよく使われる方法であるが、ここでは手法の妥

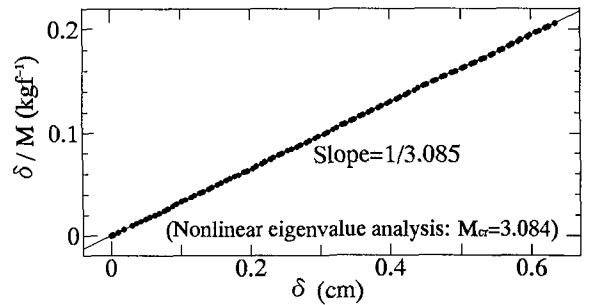


図-10 Southwell 法の数値シミュレーション(開角 30°、正のモーメント)

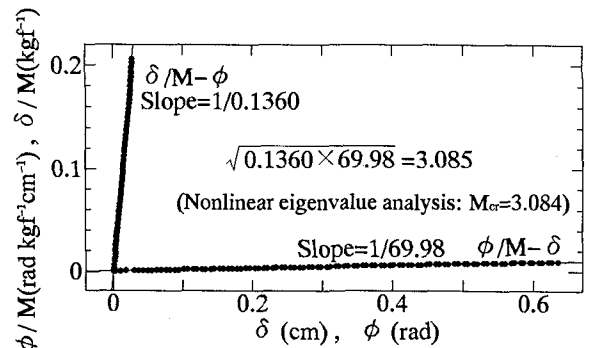


図-11 Meck 法の数値シミュレーション(開角 30°、正のモーメント)

当性を確認する意味で、同じ条件のアーチモデルに微小な初期たわみを与えて有限変位解析²⁰⁾した結果に用いてみた。図-8は、開角 30° で正のモーメントを受ける場合のアーチクラウン部の水平変位とねじれ角である。この変位履歴を $M-\delta^2$ 法、Southwell 法、Meck 法に適用したものを各々図-9、10、11に示す。図中の M_{cr} は上述の有限要素非線形固有値数値解析²⁰⁾によるものだが、三方法の結果は 0.2% 以下の誤差しか有しない。このように、これら三手法を本実験値の整理に使えることが期待できる。

5. 数値解析

実験値を Vlasov の解析解と比較すると同時に、有限変位有限要素法による数値解析²⁰⁾も参考のために用いる。ここで用いたのはいわゆる剛体変位除去の手法を用いたものであるが、厳密な回転角の取り扱い⁸⁾ではなく、Euler 角を用いた増分角度の取り扱いを定式化したモデルである。また、近似とは言え増分に関しては厳密な回転角の取り扱いをしているので、文献^{6) 7)}にあるような semitangential 等の方策を全く用いないで折れ線近似解析を行った。

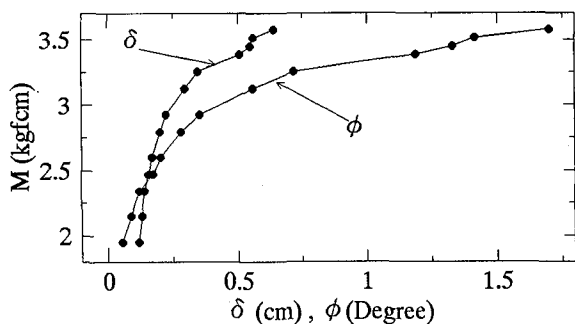


図-12 実験値の変位履歴 (開角 30°、正のモーメント)

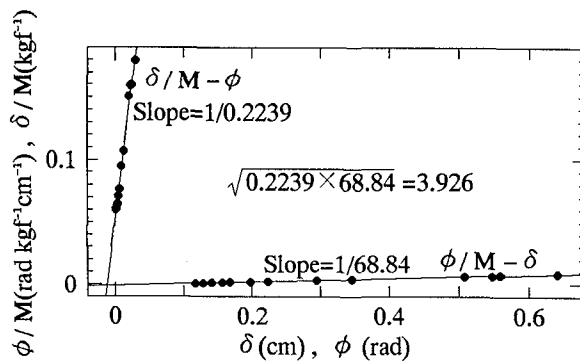


図-15 Meck Plot (開角 30°、正のモーメント)

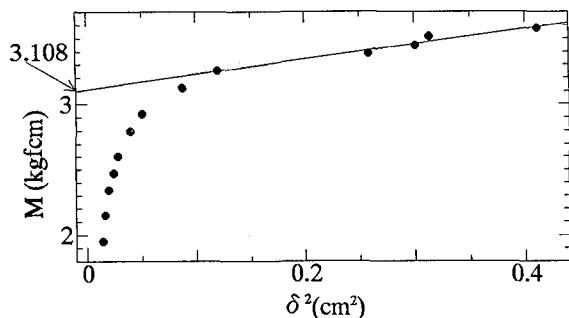


図-13 $M - \delta^2$ Plot (開角 30°、正のモーメント)

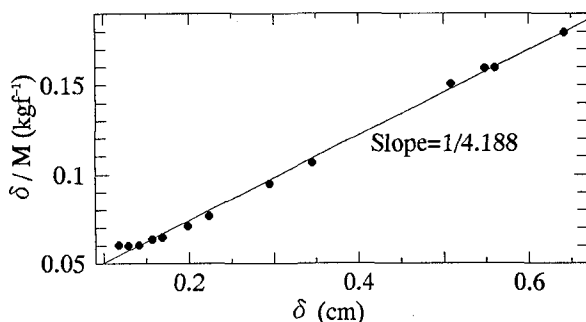


図-14 Southwell Plot (開角 30°、正のモーメント)

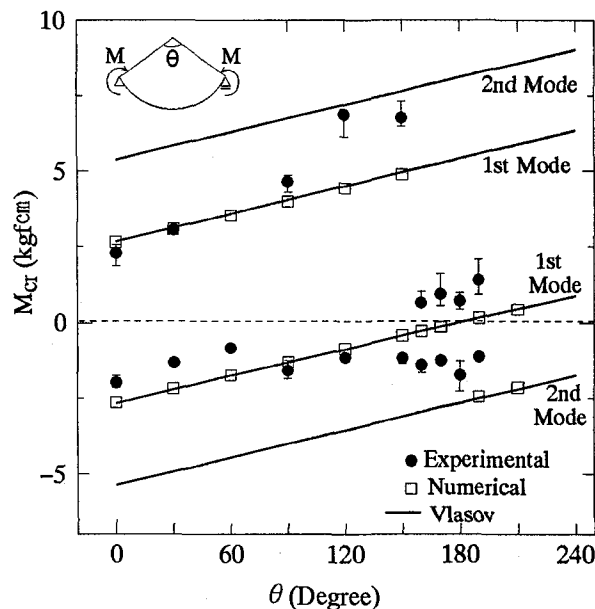


図-16 $M - \delta^2$ 法による算定値

可能性を示唆していると考えられるが、ここではその議論は行わない。

開角 0° ~ 190° までの座屈モーメントを、 $M - \delta^2$ 法、Southwell 法、Meck 法により算定し、Vlasov の解析解と非線形固有値解析²⁰⁾による数値解と併せて各々図-16、17、18に示す。尚、実験値は 5 回の測定の実験値の平均値で、最大値と最小値を誤差棒で示してある。

三手法による結果は、平均値に関する限りいずれも大差はないが、Southwell 法と Meck 法は 1 ケース当たりの 5 回の実験値のばらつきが目立つ。 $M - \delta^2$ 法は三手法の中では最も低めの値を示しているが、これは算定に用いる変位履歴が、弾性範囲内で実験を行うよう十分な後座屈領域まで測定されていないことが原因の一つと考えられる。Southwell 法と Meck 法は値もばらつきもよく似た傾向を示している。

いずれの方法でもまとめてもばらつきが大きいのが開角 180° 付近である。そもそも Vlasov の解析解が対象としている問題の境界条件は図-5に示したようであり、開角が 180° の場合には構造系は初期から不安定である。

6. 実験結果

図-12は、開角 30° で正のモーメントを受ける場合のアーチクラウン部の水平変位とねじれ角の履歴である。

この変位履歴を $M - \delta^2$ 法、Southwell 法、Meck 法に適用したものを各々図-13、14、15に示す。前章における数値シミュレーションほどの急激な変位の変化はないが、オーダー的には一致している。ここで「オーダー的一致」と書いた。これは実験値が実験装置の細かい精度にかなり左右され、二桁ぐらいのばらつきを一連の測定で発生させる場合があり、特に横倒れ座屈実験の困難さを物語っている。逆に言えば、設計において公式や実験により安全率を正しく把握することは困難である

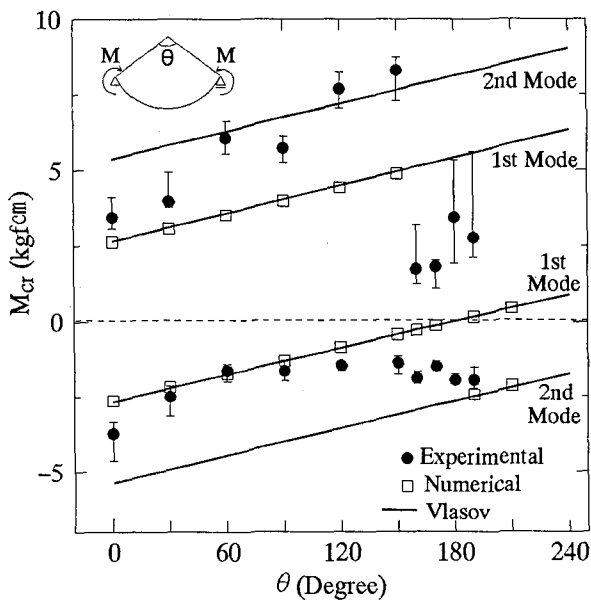


図-17 Southwell 法による算定値

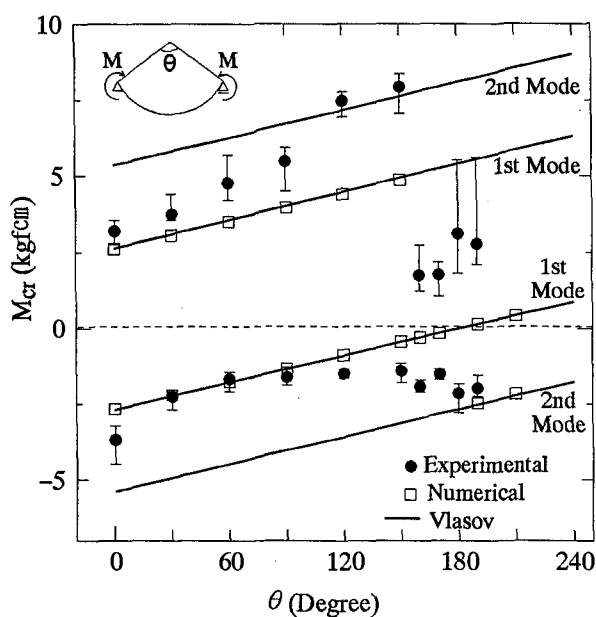


図-18 Meck 法による算定値

すなわち、座屈モーメントは零に等しい。この実験ではクラウン部を下位に位置させることによって重力で安定させているが、载荷の瞬間に本質的な不安定性が発揮され、実験が困難となる。無载荷状態でのアクリルアーチのアラインメントの誤差や、ローラー支承の構造特性により零ではない水平外力の影響を考慮すると、開角 180° 前後の実測値におけるばらつきが不可避であることは明らかである。

負のモーメントを受ける場合、開角 $0^\circ \sim 120^\circ$ までは開角の増加に伴い実験値は単調に増加する傾向を示し、理論値とも近い値を示している。ところが、開角 150° 辺りから実験値は徐々に減少し、Vlasov の二次モードの解に近づく。実際、開角 180° や 190° のアーチでは、

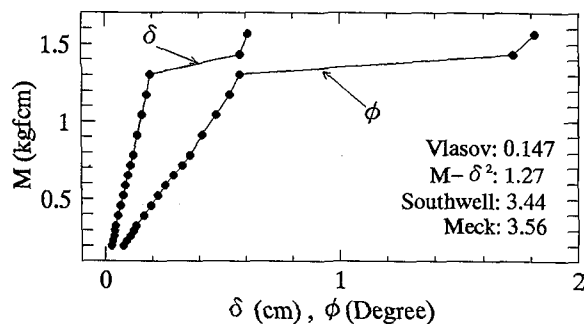


図-19 実験値の変位履歴 (開角 190° 、正のモーメント)

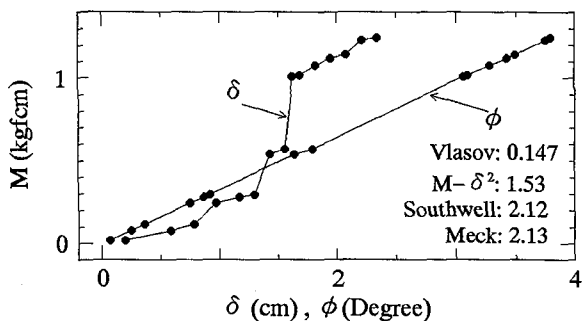


図-20 実験値の変位履歴 (開角 190° 、正のモーメント)

水平変位が正弦二半波のモードで座屈していることが肉眼で確認された。数値計算上、最低次の負の座屈モーメントは開角 180° 未満では正弦半波モードの解、 180° より大きく 360° 未満では正弦二半波モードの解を与えるが、実験上はこれらの二つのモード間の遷移は開角 180° の前後で徐々に起こっているものと考えられる。また前述のように本来、開角 180° では座屈モードが弦回りの回転となり境界条件の許す回転自由度に対応してしまうので、座屈モーメントは零となるが、本実験では変位履歴から形式的に座屈モーメントを算定した。

正のモーメントを受ける場合、開角 $0^\circ \sim 90^\circ$ までは開角の増加に伴い実験値は単調に増加する傾向を示し、理論値とも比較的近い値を示している。ところが、開角 120° と 150° ではかなり高めの値を示し Vlasov の二次モードの解に近づいているが、肉眼では正弦半波で座屈しているようにしか見えない。開角 160° 以上では実験値は、開角 150° 以下と比べてかなり低い値に分布し、Southwell 法と Meck 法では 1 ケース当たりの実験値のばらつきが大きくなっている。これは正のモーメントの場合、開角が大きくなると同じケースの変位履歴が実験の度に全く異なったものとなるからである。例えば図-19のように水平変位とねじれ角が急激に増加する箇所が明瞭に現れる場合もあれば、図-20のようにそのような箇所が特に認められない場合もある。図-19の変位履歴は一見すると典型的な座屈のようにも見えるが、い

ずれの算定方法による座屈モーメントも Vlasov の解よりかなり高い値となり、Southwell 法と Meck 法では、変位が急激に増加する箇所よりも遙かに高い値が座屈モーメントと算定されている。これは図-12のように変位の増加の割合が徐々に大きくなっていくのではなく、急激に増加する箇所に至るまでは変位の増加の割合がほぼ一定であるためと考えられる。図-20の変位履歴の場合、ねじれ角は傾き一定の直線であり、また、水平変位が殆ど増加せずにねじれ角のみが増加する区間も認められる。こうした現象は、水平変位とねじれ角に共に正弦一半波を仮定した Vlasov の解析解等の理論上の横倒れ座屈現象に対応しているとは言い難い。数値計算上、最低次の正の座屈モーメントは開角 180° 未満では正弦一半波モードの解、 180° より大きく 360° 未満では二つ存在する正弦一半波モードの解のうち小さい方の解を与えるが、実験上はこれら二つの解の間の遷移は開角 160° 辺りから既に始まっているように見える。

7. まとめ

等曲げを受けるアクリル製円弧アーチの横倒れ座屈実験を行った。座屈モーメントの算定には、 $M - \delta^2$ 法、Southwell 法、Meck 法の三手法を用いた。 $M - \delta^2$ 法は三手法の中では最も低い値を示し、Southwell 法と Meck 法は同じケースの実験値に対するばらつきが大きい。この二者はよく似た傾向を示した。これらの手法はいずれも、比較的開角の小さい領域では曲がりばりの横倒れ座屈の算定に十分適用できることが、数値的にも実験的にも確認された。

負のモーメントを受ける場合、実験値は開角 120° 以下では Vlasov の一次モードの解と定性的に一致するが、開角 150° 辺りから二次モードの解への漸近が徐々に始まってしまう。特に開角 180° と 190° では正弦二半波のモードでの座屈が肉眼で確認できた。

正のモーメントを受ける場合、実験値は開角 $0^\circ \sim 90^\circ$ までは Vlasov の一次モードの解と比較的近い値に分布するが、開角 120° と 150° ではかなり高めの値を示し、開角 160° 以上では、 150° 以下と比べかなり低い値に分布する。

結局、Vlasov の解析解を検証するに足る十分な実験精度は得られなかったが、開角が 180° よりも小さい領域で、Vlasov の解析解が実際の現象と明らかに違うということはないものと考えられる。また、数値解析で確認されるような開角 180° 前後での座屈モードの遷移があることも実験的に確認された。但し、負のモーメントを受ける場合にはこの遷移は開角 $150^\circ \sim 190^\circ$ で徐々に生じ、また正のモーメントを受ける場合には開角 160° 以上の領域で1ケース当たりの実験値のばらつきが大きくなることから、開角 180° での構造不安定がその周辺の領域にも影響を及ぼしている可能性も考えられ、実験

精度の改善とともに今後の研究課題である。

参考文献

- 1) Timoshenko, S. P. and Gere, J. M.: Theory of elastic stability, 2nd. ed., McGraw-Hill, 1961.
- 2) Vlasov, V. Z.: Thin-walled elastic beams, Israel program for scientific translations, Jerusalem, 1961.
- 3) Yoo, C. H.: Flexural-torsional stability of curved beam, J. Engrg. Mech. Div., ASCE, 108(6), Dec., pp. 1351~1369, 1982.
- 4) Hasegawa, A., Liyanage, K., Ikeda, T., and Nishino, F.: A concise and explicit formulation of out-of-plane instability of thin-walled members, Proc. JSCE, Struct. Engrg. /Earthquake Engrg., Vol.2, No.1, pp.81~89, 1985.
- 5) 林正・岩崎英治: 幾何学的非線形解析における薄肉曲線材の折れ線近似の妥当性, 土木学会論文集, Vol.5, No.1, pp.327~334, 1988.
- 6) Maalla, K., Kuranishi, S., and Iwakuma, T.: Geometric stiffness to analyze the lateral-torsional buckling of curved members, Proc. JSCE, Struct. Engrg. /Earthquake Engrg. Vol.7, No.1, pp.59~65, 1990.
- 7) Yang, Y. B., Kuo, S. R. and Yau, J. D.: Use of straight-beam approach to study buckling of curved beams, J. Struct. Engrg., ASCE, 117(7), Aug., pp.1963~1978, 1991.
- 8) 岩崎英治・林正: 立体骨組構造の有限変位解析の精密化, 構造工学論文集, Vol.37A, pp.353 ~ 366, 1991.
- 9) Yang, Y. B. and Kuo, S. R.: Static stability of curved thin-walled beams, J. Engrg. Mech., ASCE, 112(8), pp.821~841, 1986.
- 10) Yang, Y. B. and Kuo, S. R.: Effect of curvature on stability of curved beams, J. Struct. Engrg., ASCE, 113(6), pp.1185~1202, 1987.
- 11) Papangelis, T. P., and Trahair, N. S.: Flexural-torsional buckling of arches, J. Struct. Engrg., ASCE, 113(4), pp.889~906, 1987a.
- 12) Rajasekaran, S., and Padmanabhan, S.: Equations of curved beams, J. Engrg. Mech., ASCE, 115(5), May, pp.1094~1111, 1989.
- 13) Kang, Y. J. and Yoo, C. H.: Thin-walled curved beams. II: analytical solutions for buckling of arches, J. Struct. Engrg., ASCE, 120(10), Oct., pp.2102~2125, 1994.
- 14) Papangelis, T. P., and Trahair, N. S.: Flexural-torsional buckling tests on arches, J. Struct. Engrg., ASCE, 113(7), pp.1433~1443, 1987b.
- 15) 深沢泰晴: 軸圧縮力を受ける円弧アーチの曲げねじれ座屈に関する研究, 土木学会論文集第96号, pp. 29 ~ 47, 1963.
- 16) Trahair, N. S.: Elastic stability of continuous beams, J. Struct. Div., ASCE, Vol. 95, No. 6, pp. 1295 ~ 1312, 1969.

- 17) Tokarz, F. J. : Experimental study of lateral buckling of arches, J. Struct. Div., ASCE, Vol. 97, No. 2, pp. 545 ~ 559, 1971.
- 18) Southwell, R. V.: On the analysis of experimental observations in problems of elastic stability, Proc., Royal Society, 135, 601.
- 19) Meck, H. R.: Experimental evaluation of lateral buckling loads, J. Engrg. Mech. Div., Proc. ASCE, Vol. 103, No. EM2, April, 1977.
- 20) 後藤文彦, 倉西 茂, 岩熊哲夫 : Euler 角および空間固定三軸回りの微小回転角を用いた空間骨組解析, 土木学会第48 回年次学術講演会講演概要集第1 部, pp.1314 ~ 1315, 1993.

(1994 年 9 月 14 日 受付)