

空気型枠の有限要素解析

ANALYSIS OF AIRMAT BY FINITE ELEMENT METHOD

佐々木理文* 上田多門** 林川俊郎** 小野武彦***

Masafumi SASAKI, Tamon UEDA, Toshiro HAYASHIKAWA, Takehiko ONO

* 北海道大学学生 工学部土木工学科 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

** 工博 北海道大学助教授 工学部土木工学科 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

*** 清水建設株式会社部長 土木本部技術第一部 (〒105-07 東京都港区芝浦 1-2-3 シーバンスS館)

A finite element program is developed for the deflection analysis of the airmat, which is considered to be used as formworks of concrete. The airmat is modeled as the Mindlin plate. The deflections predicted by the finite element program agree with those by the theory. The stiffnesses predicted by the program are less than the experimentally observed ones. The restriction at the support in the experiment is considered to be the reason of the discrepancy. The program also predicts the experimental fact that the superimposition of a steel plate whose shear stiffness is much greater than that of the airmat increases drastically the stiffness of the airmat.

Key word : airmat, concrete formwork, finite element analysis

1. はじめに

土木作業現場において、コンクリート打設時における型枠の設置が型枠の重さ故に安全性の確保、省力化の推進上問題になる。このような問題の解決法としては、軽量構造の一つであるエアマットを、コンクリートの型枠として使用することが考えられる。エアマットは、宇宙飛行体を大気圏内に緩やかに突入させるためのグライダー用に膨らまし方式の構造体として米国のGoodyear社によって開発されたもの¹⁾であり、飛行機などの重量物を支えるジャッキ、空気の代わりに砂を入れて防音壁などに使われている。

今までも、エアマットに関する研究はなされてきたが、解析できるものがエアマットの支持条件で限定されており¹⁾²⁾、この問題点を解決するために、有限要素法を用いることが考えられる。エアマットの有限要素解析の既往の研究としては、エアマットはせん断変形の影響が大きいことから、エアマットを一次元のエアビームと考え、せん断変形を考慮したTimoshenko梁として有限要素解析を行った研究がある³⁾。

本論文では、エアマットを二次元で解析するために、エアマットをせん断変形を考慮した板理論であるMindlin板としてモデル化を行った。Mindlin板の剛性マトリックスとの比較により、エアマットの剛性マトリックスを導出し、エアマットの有限要素解析を行い、理論値との比較、および、実験値との比較から、モデル化の妥当性を確認した。また、エアマットだけでは剛性が足

りない場合、実際の型枠としては鋼板とエアマットを重ねて使用することが考えられるので、このエアマットと鋼板を重ねた状態の解析を行い、実験値との比較を行った。

2. 空気型枠 (エアマット)

型枠として用いられるエアマットを本論文では空気型枠と呼ぶことにする。空気型枠の補強膜 (外皮) には塩化ビニルで被覆したポリエステル製の織布を用いた。こ

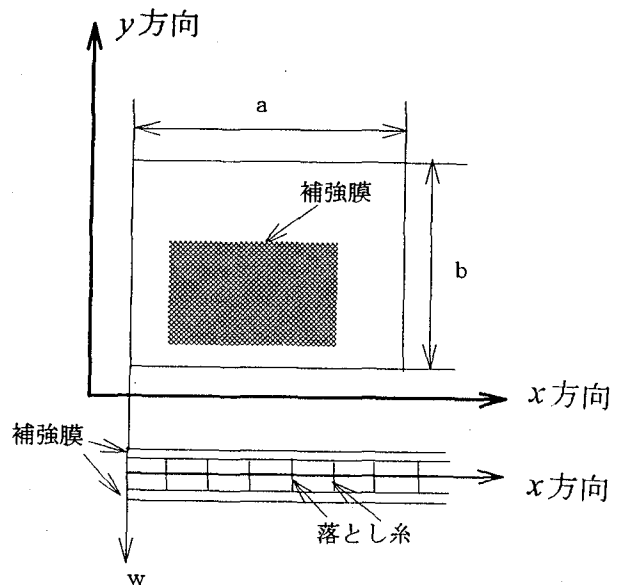


図1 空気型枠

の補強膜は非常に多くのポリエステル製の落とし糸で結ばれ型枠としての厚さを一定に保つようにしてある。また、中の空気圧（内圧）により剛性を持たせている（図1参照）。

3. 空気型枠の剛性マトリックスの導出

ここでは、空気型枠をMindlin板としてモデル化するために、Mindlin板の剛性マトリックスから、空気型枠の剛性マトリックスを導出する。

3.1 空気型枠の基礎方程式¹⁾²⁾

空気型枠の端部での水平方向の拘束がなく、軸力が発生しない（ $H_x = H_y = 0$ 、 $H_{xy} = H_{yx} = 0$ ）とすると、断面力であるせん断力、モーメント等は以下のように表される^{1) 2)}（図2参照）。

$$M_x = -\frac{h^2}{2} \left(C_x \frac{\partial \alpha}{\partial x} + C_{xy} \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) \quad (1)$$

$$M_y = -\frac{h^2}{2} \left(C_{xy} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + C_y \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) \quad (2)$$

$$M_{xy} = -\frac{h^2}{2} C_g \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \quad (3)$$

$$Q_x = ph \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \alpha \right) \quad (4)$$

$$Q_y = ph \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \beta \right) \quad (5)$$

ここで、 α 、 β は落とし糸の鉛直軸から x 軸、 y 軸方向への傾き（図3参照）、 w は鉛直たわみ、 p は空気型枠の内圧、 h は空気型枠の厚さである。また C_x 、 C_y 、 C_{xy} 、 C_g は

$C_x = \frac{tE_x}{1-\nu_x\nu_y}$ 、 $C_y = \frac{tE_y}{1-\nu_x\nu_y}$ 、 $C_{xy} = \frac{\nu_y E_x}{1-\nu_x\nu_y}$ 、 $C_g = tG$ で定義される定数であり、 t は補強膜の厚さ、 E_x 、 E_y は補強膜の弾性係数、 ν_x 、 ν_y は補強膜のポアソン比、 G は補強膜のせん断弾性係数である。

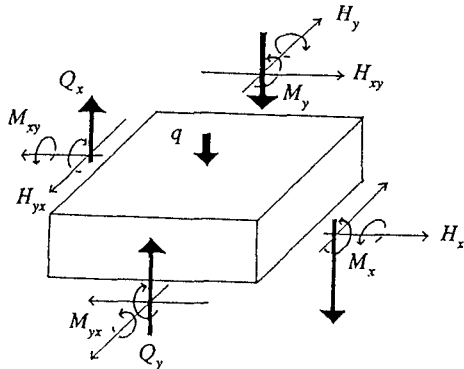


図2 断面力の定義

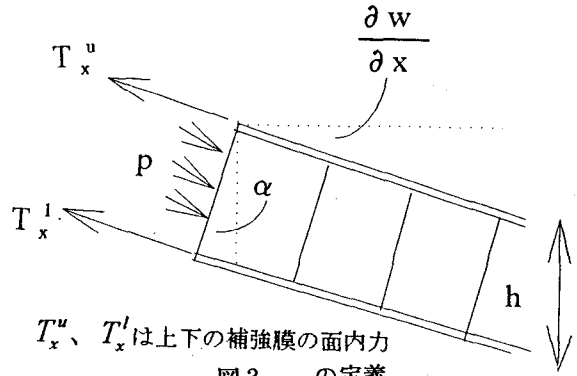


図3 α の定義

3.2 Mindlin板の断面力の式

Mindlin板の断面力の式は鉛直たわみを w 、鉛直軸と変形後の中央面に対する法線とのなす角を θ_x 、 θ_y とすると以下のようにかける（図4参照）。

$$M_x = -\left(D \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu D \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \quad (6)$$

$$M_y = -\left(\nu D \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \quad (7)$$

$$M_{xy} = -D \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \quad (8)$$

$$Q_x = S \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) \quad (9)$$

$$Q_y = S \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right) \quad (10)$$

ここで、 D, S は $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ 、 $S = \frac{Et}{2.4(1+\nu)}$ t は板の厚さ、 E は弾性係数である。

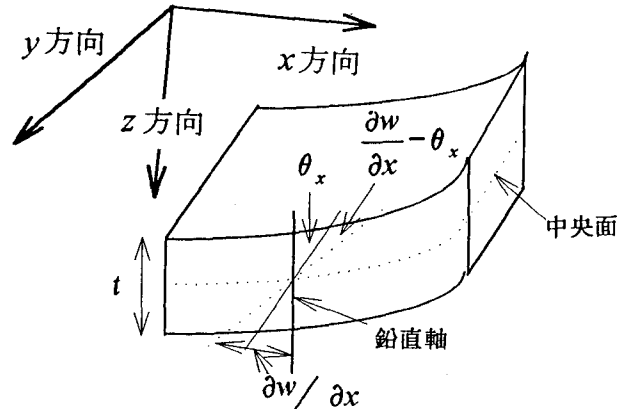


図4 θ の定義

3.3 空気型枠のMindlin板のモデル化

ここで、空気型枠の落とし糸の鉛直軸から x 軸、 y 軸方向への傾きの角とMindlin板の鉛直軸と中央面の法線とのなす角が同じであると仮定するとき、すなわち、 $\alpha = \theta_x$ 、 $\beta = \theta_y$ と仮定するとき、式(1)～(5)、式(6)～(10)より

$$\frac{h^2}{2} C_x = \frac{h^2}{2} C_y = D, \quad \frac{h^2}{2} C_{xy} = \nu D,$$

$$\frac{h^2}{2}C_g = \frac{(1-\nu)}{2}D, \quad ph = S$$

とおけば、断面力（せん断力、モーメント）が同じになることが明らかである。従って、空気型枠をMindlin板にモデル化できるのである。

そこで、Mindlin板の剛性マトリックスは

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D & \nu D & 0 & 0 & 0 \\ \nu D & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2}D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S \end{pmatrix} \quad (11)$$

と表せるので、空気型枠の剛性マトリックスは

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{h^2}{2}C_x & \frac{h^2}{2}C_{xy} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{h^2}{2}C_{xy} & \frac{h^2}{2}C_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{2}C_g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ph & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ph \end{pmatrix} \quad (12)$$

となる。

4. 数値計算例

導出した空気型枠の剛性マトリックスを用いて、空気型枠の有限要素解析のプログラムを作成した。プログラムで、使用した要素は、1要素8節点のアイソパラメトリック要素である。ここでは、有限要素解析の収束性の確認と、導出した剛性マトリックスの妥当性を確認するため、有限要素解析で出された値と理論値¹⁾²⁾の比較を行い、また、実験値との比較も行った。

ここでの計算は、等分布荷重が載荷された四辺単純支持の空気型枠で行った。また、計算に用いた空気型枠の大きさは1800mm×900mm×20mmの大きさである。また、空気型枠の材料定数は表1の通りである。

表1 空気型枠の材料定数

膜の弾性係数	膜のせん断弾性係数
Ex=Ey=245.6MPa	G=71.8MPa
膜の厚さ	ポアソン比
t=0.056cm	ν=0.5

4.1 有限要素解析の収束性の確認と理論値の収束性の確認

空気型枠の基礎方程式から以下の式が得られる。

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) + \frac{q}{ph} = 0 \quad (13)$$

$$C_x \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + C_g \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + (C_{xy} + C_g) \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial p}{\partial h} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \alpha \right) = 0 \quad (14)$$

$$C_g \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + C_y \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} + (C_{xy} + C_g) \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} + \frac{\partial p}{\partial h} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \beta \right) = 0 \quad (15)$$

なお、qは鉛直荷重である。

四辺単純支持の時はα,β,wを

$$w = \sum \sum w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (16)$$

$$\alpha = \sum \sum \alpha_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (17)$$

$$\beta = \sum \sum \beta_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (18)$$

と二重フーリエ級数を用いて表し、式(13)、(14)、(15)に代入して、三つの連立方程式を得て、それを解いて求めたたわみの値が理論値である。

二重フーリエ級数の項数の変化による空気型枠の中心部のたわみの値の変化を表したのが表2である。計算に用いた等分布荷重の大きさはq=0.0019MPaであり、空気型枠の内圧はp=0.049MPa、0.029MPaの2種類で計算した。

表2 フーリエ級数の項数の違いによるたわみの値の変化

	n=10 m=10	n=50 m=50	n=100 m=100
p=0.029 MPa	3.273 cm	3.265 cm	3.265 cm
p=0.049 MPa	2.101 cm	2.096 cm	2.096 cm

(たわみの値は空気型枠の中心部における値)

この表2から、理論値の収束性は良好なことが、及び、n=50、m=50項以上とれば収束していることが明らかである。よって、以下の理論値の計算にはn=50、m=50の項数を使用することにする。

また、有限要素解析の分割数による空気型枠の中心部のたわみの値の変化を表したのが表3である。この表3によって、空気型枠の全体四分の一の領域を18分割以上すれば収束することが示されている。

表3 分割数によるたわみの収束性
(a) p=0.029MPaの時

2分割	8分割	18分割	32分割
3.273 cm	3.264 cm	3.264 cm	3.264 cm

(b) p=0.049MPaの時

2分割	8分割	18分割	32分割
2.101 cm	2.097 cm	2.097 cm	2.097 cm

4.2 有限要素解析の値と理論値との比較

荷重された等分布荷重の大きさは $q = 0.0019\text{MPa}$ である。また、空気型枠の内圧は $p = 0.049\text{MPa}$ 、 0.029MPa の2種類を計算した。有限要素解析の値は、全体の四分の一の領域を18分割して求めた値である。

短辺方向（ y 方向）には支持から45cmの位置に固定し、長辺方向（ x 方向）のさまざまな位置でのたわみの値を求めた。表4が理論値との比較である。

表4 有限要素解析値と理論値の比較

(a) 0.029MPaの時

	$X=15\text{cm}$	$x=30\text{cm}$	$x=45\text{cm}$
理論値	1.370cm	2.233cm	2.756cm
F.E.M	1.370cm	2.232cm	2.756cm
	$x=60\text{cm}$	$x=75\text{cm}$	$x=90\text{cm}$
理論値	3.060cm	3.217cm	3.265cm
F.E.M	3.060cm	3.217cm	3.265cm

(b) 0.049MPaの時

	$X=15\text{cm}$	$x=30\text{cm}$	$x=45\text{cm}$
理論値	0.866cm	1.420cm	1.760cm
F.E.M	0.865cm	1.419cm	1.760cm
	$x=60\text{cm}$	$x=75\text{cm}$	$x=90\text{cm}$
理論値	1.960cm	2.065cm	2.097cm
F.E.M	1.960cm	2.065cm	2.097cm

この結果から、理論値と有限要素解析の値が非常によく一致していることが明らかである。このことからMindlin板のモデル化による空気型枠の剛性マトリックスの評価が正しいことがわかる。

4.3 実験値との比較

ここでは、部分荷重を受ける四辺単純支持の空気型枠の実験値と有限要素解析の値を比較した。支持部は鋼製の丸棒により、空気型枠を直接下から支持しており、部分荷重は中央部に30cm×30cmの範囲に載荷した（図5参照）。実験は載荷部分に空気型枠より剛性がかかなり大きいコンクリートブロックをのせて載荷させており、有限要素解析はこのことを考慮し、この部分の剛性マトリックスは、コンクリートブロックの剛性マトリックスと空気型枠の剛性マトリックスの和を用いて解析を行った。また、空気型枠の材料特性は、4.1、4.2のところで使用した値と同じである。

荷重の大きさとたわみの形状の関係を表したのが、図6であり、横軸は空気型枠の短辺方向（ y 方向）の位置を $y=45\text{cm}$ に固定したときの長辺方向（ x 方向）の位置、縦軸はたわみ w を表したものである。また、 Q は部分荷重の大きさ（コンクリートブロックの重さ）、 p は内圧の大きさを表している。図6より、有限要素法では、実験値で表れているコンクリートブロックを載せた載荷部分のたわみの形状を表しているといえる。また、荷重が小さいときはたわみは全体的に実験値の方が大きい、荷重が大きくなるにつれてその差は小さくなること示されている。そして、内圧が小さい $p = 0.029\text{MPa}$ の時は、たわみの分布形状は、有限要素解析結果は、実験結

果に近いが、内圧が高い $p = 0.049\text{MPa}$ の時は、たわみの分布形状は、有限要素解析によると載荷部分を除き曲線になっているのに対し、実験結果は比較的直線状になっており、合わなくなっている。

荷重による剛性の影響を調べたのが図7である。横軸は空気型枠の中心部の鉛直たわみ w であり、縦軸は荷重 Q である。図7のグラフの傾きは、剛性を表している。図7から、実験値は荷重を載荷した時点で、大きなたわみを生じるが、その後はたわみの増加量が有限要素解析値より小さいことが明らかである。これは、荷重を載荷することにより、空気型枠の平坦性の乱れがなじむことにより初期のたわみが大きくなること²⁾、支持部で空気型枠の水平変位が摩擦等により拘束され、軸力が生じ（ $H_x \neq 0, H_y \neq 0$ ）、剛性が大きくなることが理由だと思われる。

また、この軸力により図6の様に載荷部分以外のたわみの形状が、有限要素解析結果は曲線であるのに対し、実験結果は直線的になったと思われる。

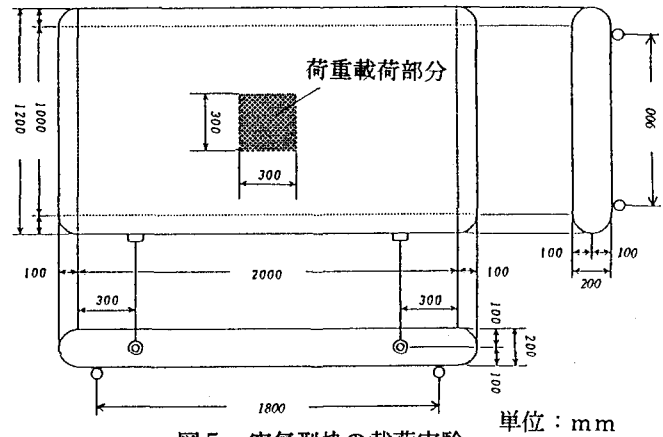


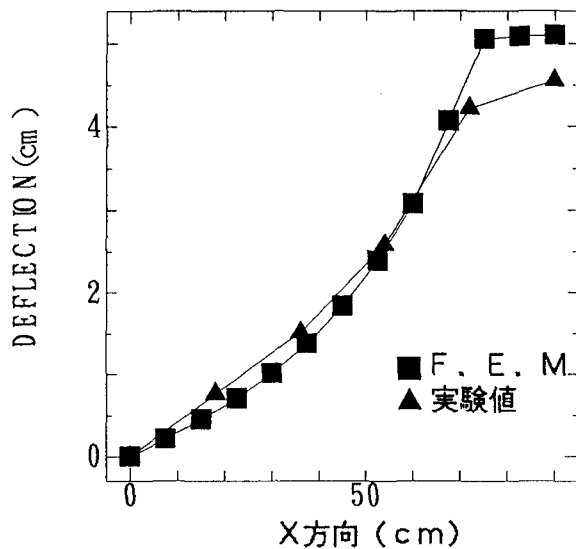
図5 空気型枠の載荷実験

5. 鋼板と空気型枠を重ねた状態の有限要素解析

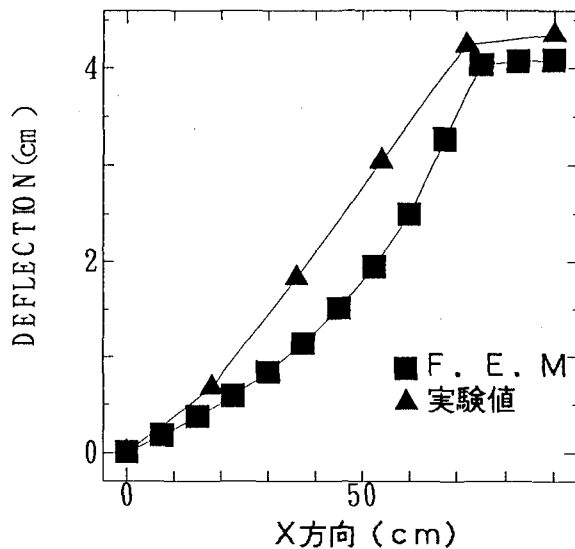
空気型枠だけを型枠として使用するには、剛性が小さい場合、実際の使用方法としては空気型枠と鋼板等を重ねて剛性を大きくして使用することが考えられる。ここでは空気型枠と鋼板を重ねたもの（以下、重ね板と呼ぶ）を有限要素解析し、実験値との比較を行った。空気型枠と鋼板の間は自由に滑れるものとし、ここで使用した重ね板の剛性マトリックスは空気型枠の剛性マトリックスと鋼板の剛性マトリックスの和とした。また、空気型枠の材料特性は4のところで使用した値であり、鋼板の材料特性は表5の通りである。

表5 鋼板の材料特性

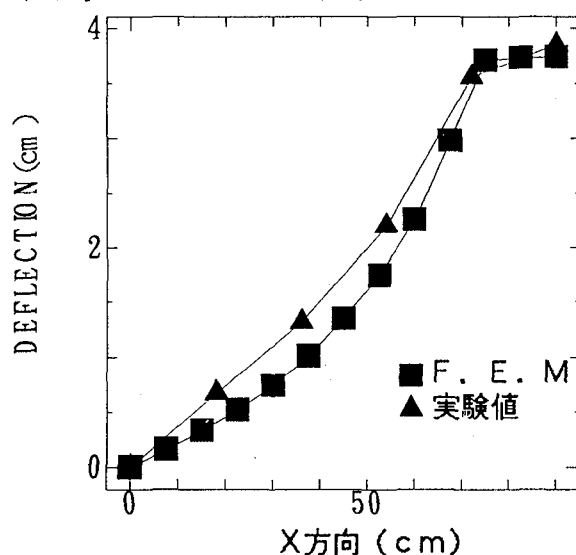
ヤング係数 E_s	ポアソン比 ν	板厚 t
198000MPa	0.278	0.3cm



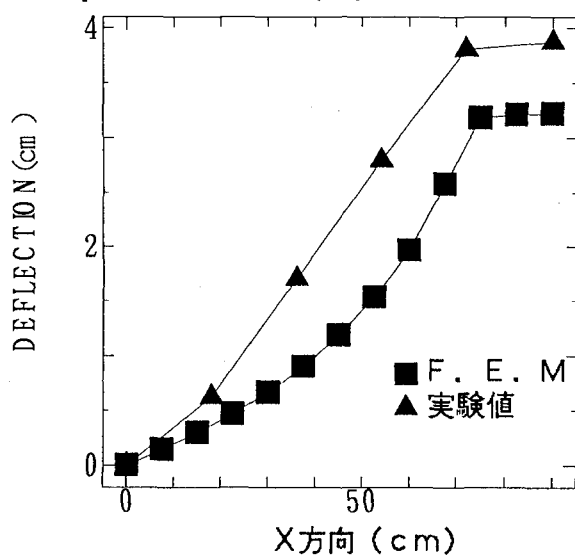
(a) $p = 0.029 \text{ MPa}$, $Q = 1470 \text{ N}$



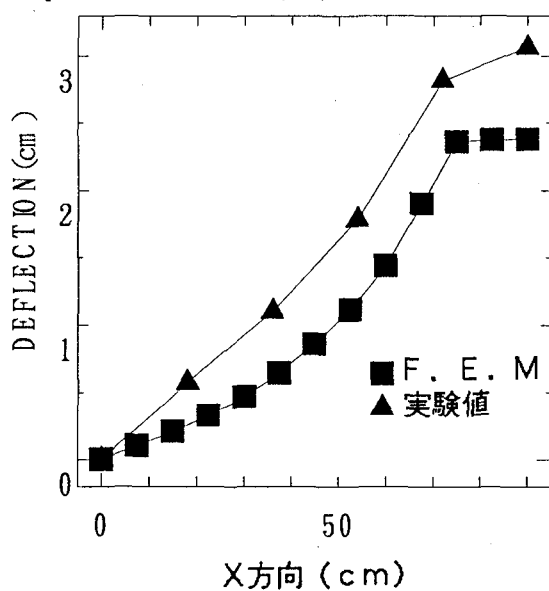
(d) $p = 0.049 \text{ MPa}$, $Q = 1860 \text{ N}$



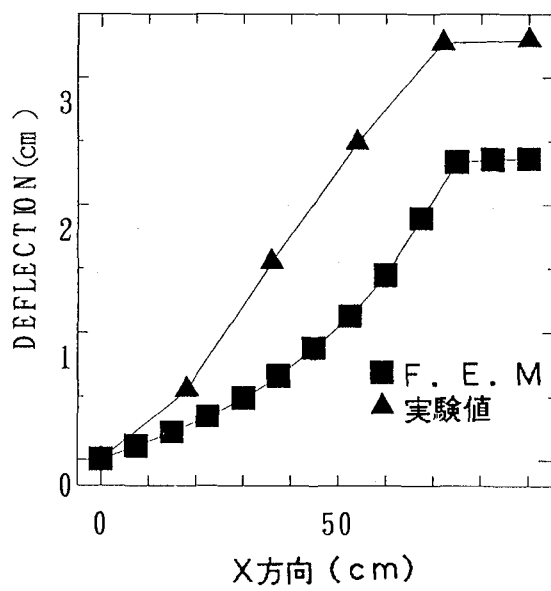
(b) $p = 0.029 \text{ MPa}$, $Q = 1078 \text{ N}$



(e) $p = 0.049 \text{ MPa}$, $Q = 1470 \text{ N}$

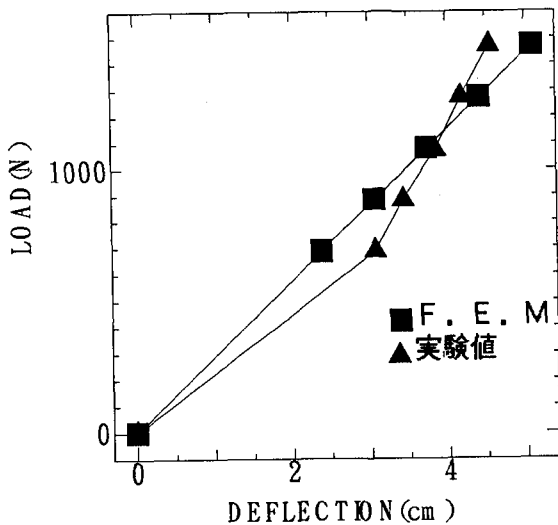


(c) $p = 0.029 \text{ MPa}$, $Q = 683 \text{ N}$

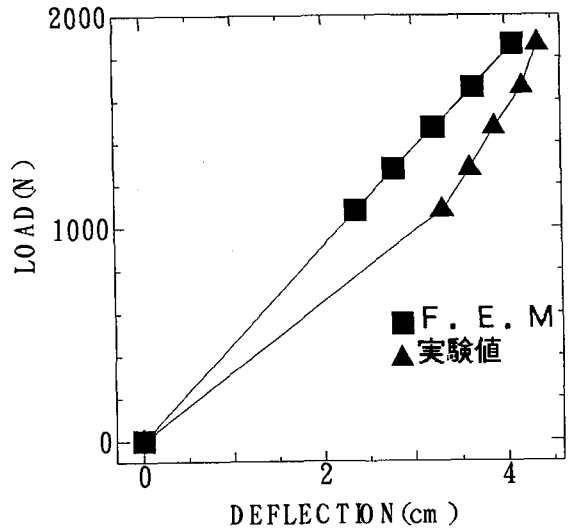


(f) $p = 0.049 \text{ MPa}$, $Q = 1070 \text{ N}$

図6 たわみの形状の実験値と有限要素解析値の比較

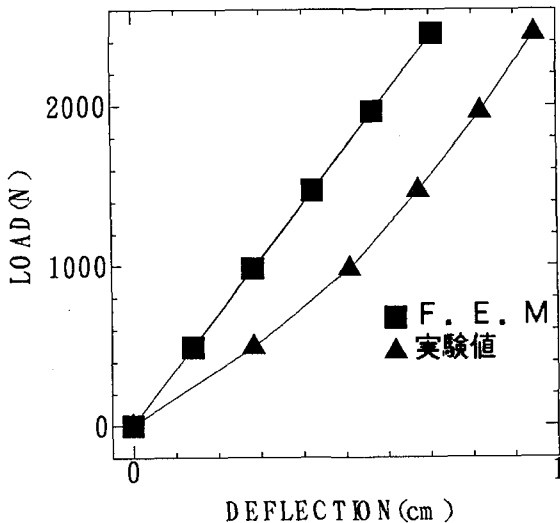


(a) $p = 0.029 \text{ MPa}$ の時

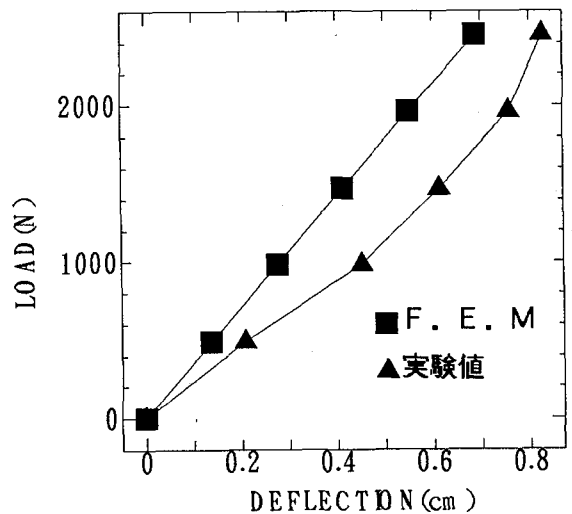


(b) $p = 0.049 \text{ MPa}$ の時

図7 荷重と中心部のたわみの変化(空気型枠)



(a) $p = 0.029 \text{ MPa}$ の時



(b) $p = 0.049 \text{ MPa}$ の時

図8 荷重と中心部のたわみの変化(重ね板)

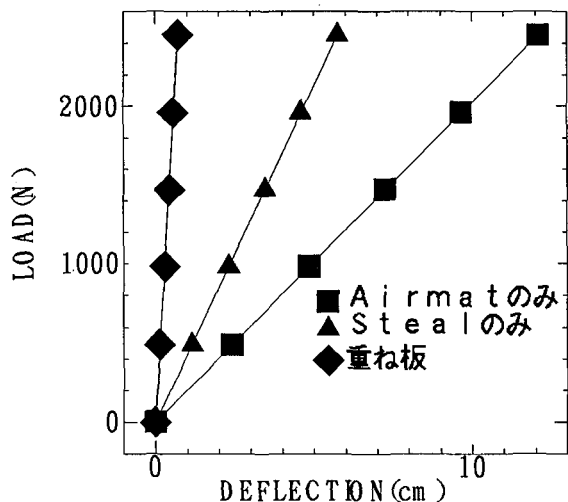
図8は、重ね板の剛性を表したものであり、横軸が中心部の鉛直たわみ w 、縦軸が部分荷重の大きさ Q である。また、空気型枠だけ、鋼板だけと重ねたときの剛性を比較したのが、図9であり、図7と同じく横軸が中心部の鉛直たわみ w 、縦軸が部分荷重の大きさ Q である。

図8より、実験値のグラフの傾きと有限要素解析値のグラフの傾きは、荷重を載荷した初期の段階を除くと、だいたい一致している。これは、荷重を載荷した初期の段階では、空気型枠と鋼板の間に隙間があり一体化してないと思われ、荷重を増加させるにつれ鋼板と空気型枠全体の隙間が無くなり、一体化したためと思われる。

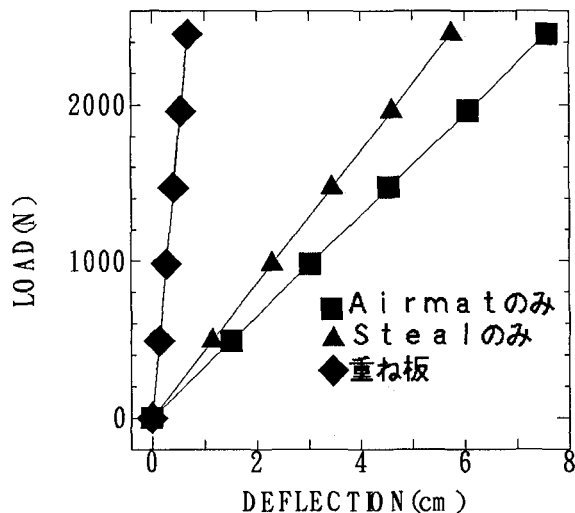
このことより、重ね板における、剛性マトリックスの評価が正しかったと言えよう。

図9より、重ねることにより、空気型枠、鋼板のみの

時より、剛性はかなり大きくなることが明らかである。これは、空気型枠の剛性マトリックスのうち、曲げ変形に関する部分とせん断変形に関する部分を比較した場合、せん断変形に関する剛性の値が小さいのに対し(すなわち、せん断変形が大きい)、鋼板は、曲げ変形に関する剛性の値の方が、せん断変形に関する剛性の値より小さい(すなわち、曲げ変形が大きい)ことによる。すなわち、単独に使用した場合には、小さい剛性値によりたわみの大きさが支配され、たわみの値は大きくなるが、重ねた場合には、せん断変形に関する剛性の値も、曲げ変形に関する剛性の値も大きくなるので(すなわち、曲げ変形もせん断変形も小さくなる)たわみを大きくする要因がなくなり、重ね合わせの効果が、著しく大きくなるのである。



(a) $p = 0.029 \text{ MPa}$ の時



(b) $p = 0.049 \text{ MPa}$ の時

図9 重ね板と空気型枠と鋼板の3つの比較

6. まとめ

本論文では、空気型枠をMindlin板としてモデル化をし、空気型枠の剛性マトリックスの導出を行い、有限要素解析を行った。結果は、以下のようにまとめられる。

- (1) 空気型枠単独の有限要素解析結果は、理論値とほぼ同じであることから、汎用性のある有限要素解析の結果を理論値の代わりに適用することの妥当性が確認された。
- (2) 空気型枠単独の場合、実験結果と比較して、有限要素解析による剛性は小さくなった。載荷することにより、支持部で空気型枠との間に摩擦力が発生したため軸力が生じ、見かけの剛性が大きくなったことが原因と推定された。
- (3) 空気型枠と鋼板との重ね板の場合、有限要素解析で得られた剛性は、実験結果に近い値となった。このことから、重ね板と仮定して剛性マトリックスを評価したことの妥当性が確認された。
- (4) 曲げ変形が小さいがせん断変形の大きい空気型枠とせん断変形は小さいが曲げ変形の大きい鋼板を重ねることにより、お互いの弱点が打ち消されるために、予想よりかなり大きい剛性が得られることが示された。従って、空気型枠の剛性を増大するためには、曲げ変形に比較しせん断変形の小さい部材を重ねることが効果的であると言える。

謝辞

本研究を行うに際し、貴重なご意見を清水建設株式会社の小野 定氏、小原 由幸氏から、また、貴重なご指導を、北海道大学工学部教授の角田 典史雄氏から受けた。ここに謝意を表します。

参考文献

- 1) 林 毅、赤坂 隆他：軽構造の理論とその応用 (下)、日本科学技術連盟、pp 186~189、1966年
- 2) 上田 多門他：空気型枠の変形性状に関する実験的研究、構造工学論文集、vol. 40A、pp 61~69、1994年3月
- 3) 林川 俊郎他：エア・ビーム構造の大変形解析、土木学会北海道支部論文報告集、第50号、pp 10~15、1994年2月

(1994年9月14日受付)