

## 有限要素法によるラップ接着円筒体の接着層の応力解析

## STRESS ANALYSIS OF ADHESIVE-BONDED CYLINDRICAL LAP JOINTS BY FEM

三上 隆\*, 李 海濱\*\*, 佐伯 昇\*, 芳村 仁\*\*\*

Takashi MIKAMI, LI Haibin, Noboru SAEKI and Jin YOSHIMURA

\*工博 北海道大学教授 工学部土木工学科 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

\*\*工修 北海道大学大学院 工学研究科博士後期課程 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

\*\*\*工博 釧路工業高等専門学校長 (〒084 釧路市大楽毛西2丁目32番1号)

The stresses in adhesive-bonded cylindrical lap joints, subjected to axial loads, are analysed using axisymmetric finite elements. To this end, two special elements are presented for modeling the adhesive. To evaluate the versatility and accuracy of the element, the results are compared with a previously published closed-form solution. Numerical examples are provided to illustrate the effects of various parameters on the distributions and intensities of stresses in the joint.

Key words: cylindrical lap joint, bond element, stress analysis

## 1. はじめに

近年接着継手は、高分子工業の発展によるめざましい接着剤の進歩により、軽量化・高機能化をねらいとして、各種工学分野に利用されている。しかし、接着継手に対する信頼性の高い定量的評価法に明確な基準がないため、二次的な構造要素や構造の二次的な箇所に用いられる場合が多い。一般に接着継手の設計は、ある外力条件に対する応力解析を行って被着体、接着層剤および接着界面の応力分布を求め、次にこれらの応力値をそれぞれに対応する部分の強度則に代入し継手強度の予測を行う二つのステップからなる。

第1ステップの応力解析に限定すれば、最近の計算機の発達により多くの研究がなされ、応力状態が明らかにされつつあるが、そのほとんどはフラットな梁・板のラップ継手に対する場合であり、本研究で取り上げた円筒体のラップ継手は極めて限られているようである。例えば、LubkinとReissner<sup>1)</sup>は、薄い円筒殻理論を用いて接着層内の応力分布を明らかにした先駆的な研究を行って

いるが、解析領域は被着体と接着層が重なっている継手領域である等の厳密さに欠ける面もある。ShiとCheng<sup>3)</sup>は3次元弾性理論から出発し、補足エネルギー最小の原理を用いて近似解を求めているが、Lubkinらと同様の欠点を有している。AdamsとPeppiatt<sup>2)</sup>は有限要素法(F. E. M)を用いて解析を行っているが、接着層両端の応力特性は要素分割に依存し、精度のよい解を得るには多くの要素分割をしなければならない。

接着継手は、同種あるいは異種の材料の被着体を薄い接着剤で結合させたものであり、被着体と接着剤層の厚さに大きな差があったり、被着体と接着剤層の間の力学的性質に大きな差異があるのが普通であり、この場合、通常の要素で離散化すれば要素数が膨大になったり、計算時間が増大するなど問題が生じる。

以上の点を考慮して本研究は、

- ①被着体の厚さを考慮した軸対称体の接着要素を新たに提示し、その有効性と妥当性を確認すること、および
- ②同種材料の被着体の接着層内の応力分布特性に与える種々のパラメータの影響を明確にすること、を目的とする。

## 2. 問題の定式化と離散化

考察する解析モデルは、図-1に示すような軸方向に引張力 $F$ を受けるラップ接着された円筒体であり、外側の被着体を被着体Iと名付けその弾性係数、ポアソン比、厚さをそれぞれ $E_1$ ,  $\nu_1$ ,  $t_1$ と表し、同様に内側の被着体を被着体IIと名付け弾性係数等を $E_2$ ,  $\nu_2$ ,  $t_2$ と表す。

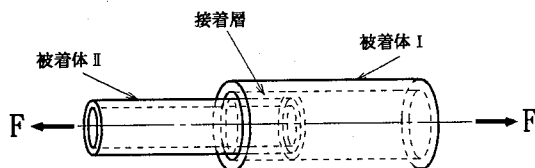


図-1 ラップ接着された円筒体

また、接着剤層の弾性係数、ポアソン比、厚さをそれぞれ  $E_a$ ,  $\nu_a$ ,  $\eta$ , 接着層の長さおよび接着層の半径をそれぞれ  $l$  および  $r_0$  で表す。

本研究では、解析に有限要素法を用いる。被着体の離散化には軸対称荷重を受ける三次元軸対称体の応力-ひずみ関係式に基づいた8節点アイソパラメトリック要素<sup>4)</sup>を採用する。厚さの薄い接着層の離散化は、通常の有限要素を用いて接着層の厚さ方向にも要素分割すれば、要素数が膨大になり計算労力が増加したり、要素数が少なければアスペクト比が大きくなり計算精度に問題が生じる可能性もある。そこで、本研究では厚さ方向には分割を施さないが、厚さを考慮した接着要素の剛性マトリックスを軸対称体のひずみ-変位関係式に合理的な近似を導入した6節点有限要素を新たに提示する。その誘導の概略は以下となる。

図-2に示すように、円筒座標系を  $(r, z, \theta)$  と表し、 $2a(\eta) \times 2b$  の大きさの長方形回転断面を考え、座標系  $(r, z, \theta)$  に対応する局部座標系  $(\xi, \zeta, \theta)$  を接着要素の厚さの中央で定義する。軸方向 ( $\zeta$  方向) 変位を  $w$ , 半径方向 ( $\xi$  方向) 変位を  $u$  と記し、図-2のように各節点の番号付けをする。

変位-ひずみ関係式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \end{aligned} \quad (1)$$

接着要素の節点1, 6, 4と節点2, 5, 3に沿った辺の半径方向変位 ( $u_{164}$  と  $u_{253}$ ) および軸方向変位 ( $w_{164}$  と  $w_{253}$ ) を以下のように表す。

$$u_{164}(\zeta) = N_1 u_1 + N_2 u_4 + N_3 u_6 \quad (2.a)$$

$$u_{253}(\zeta) = N_1 u_2 + N_2 u_3 + N_3 u_5 \quad (2.b)$$

$$w_{164}(\zeta) = N_1 w_1 + N_2 w_4 + N_3 w_6 \quad (2.c)$$

$$w_{253}(\zeta) = N_1 w_2 + N_2 w_3 + N_3 w_5 \quad (2.d)$$

ここで、 $u_k (k=1 \sim 6)$  と  $w_k (k=1 \sim 6)$  は各節点の変位を表し、形状関数  $N_1 \sim N_3$  は以下である。

$$N_1(\zeta) = -\zeta(1-\zeta)/2 \quad (3.a)$$

$$N_2(\zeta) = \zeta(1+\zeta)/2 \quad (3.b)$$

$$N_3(\zeta) = 1-\zeta^2 \quad (3.c)$$

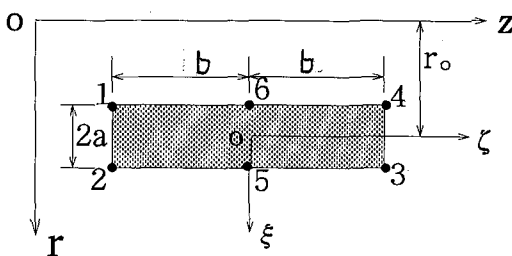


図-2 接着要素

式(1)のひずみは、式(2)を用いて次のように近似される。 $\varepsilon_r$  は半径方向変位  $u$  の相対変位  $\Delta u = u_{164} - u_{253}$  を用いて、 $\varepsilon_\theta$  は辺(1, 6, 4)と辺(2, 5, 3)の軸方向変位  $w$  の直ひずみの平均値で表し、 $\varepsilon_z$  は要素中心 ( $r=r_0$ ) における辺(1, 6, 4)と辺(2, 5, 3)の半径方向変位  $u$  の平均で近似する。更に  $\gamma_{rz}$  は、 $\partial u / \partial z$  に対しては  $\varepsilon_z$  と同様な近似を、 $\partial w / \partial r$  に対しては  $\varepsilon_r$  と同様な近似を行う。以上のような近似を用いれば、各ひずみは次のようになる。

$$\varepsilon_r(\zeta) = \frac{\partial u}{\partial r} \approx \frac{\Delta u}{2a} = \frac{u_{164} - u_{253}}{2a} \quad (4.a)$$

$$\varepsilon_\theta(\zeta) = \frac{u}{r} \approx \frac{u_{164} + u_{253}}{2r_0} \quad (4.b)$$

$$\varepsilon_z(\zeta) = \frac{\partial w}{\partial z} \approx \frac{1}{2b} \frac{\partial}{\partial \zeta} [w_{164} + w_{253}] \quad (4.c)$$

$$\gamma_{rz}(\zeta) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \approx \frac{1}{2b} \frac{\partial}{\partial \zeta} [u_{164} + u_{253}] + \frac{1}{2a} [w_{164} - w_{253}] \quad (4.d)$$

式(4)は、式(2)を用いれば以下のようにマトリックス表示される。

$$\{\varepsilon\} = [B(\zeta)] \{\delta\} \quad (5)$$

ここで、 $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_r \ \varepsilon_\theta \ \varepsilon_z \ \gamma_{rz}\}^T$

$$\{\delta\} = \{u_1 \ w_1 \ u_2 \ w_2 \ u_3 \ w_3 \ \dots \ u_6 \ w_6\}^T$$

であり、 $[B(\zeta)]$  は大きさ  $4 \times 12$  のひずみ-変位マトリックスである。

応力-ひずみマトリックスは次式で定義される。

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (6)$$

ここで、 $\{\sigma\} = \{\sigma_r \ \sigma_\theta \ \sigma_z \ \tau_{rz}\}^T$

であり、マトリックス  $[D]$  は次式で表される。

$$[D] = \frac{E_a}{(1+\nu_a)(1-2\nu_a)} [d] \quad (7)$$

と置けば、マトリックス  $[d]$  の非零成分は以下となる。

$$d(1,1) = \alpha_1(1-\nu_a), \quad d(1,2) = \alpha_2\nu_a, \quad d(1,3) = \alpha_2\nu_a$$

$$d(2,1) = \alpha_2\nu_a, \quad d(2,2) = \alpha_2(1-\nu_a), \quad d(2,3) = \alpha_2\nu_a$$

$$d(3,1) = \alpha_2\nu_a, \quad d(3,2) = \alpha_2\nu_a, \quad d(3,3) = \alpha_2(1-\nu_a)$$

$$d(4,4) = (1-2\nu_a)/2$$

ここで、 $\alpha_1$  と  $\alpha_2$  は Lubkin と Reissner の<sup>1)</sup> 接着層の定式化を表すために導入された係数で、 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  と置けば軸対称体の  $[D]$  であり、 $\alpha_1 = (1+\nu_a)(1-2\nu_a)/(1-\nu_a)$  および  $\alpha_2 = 0$  と置けば Lubkin と Reissner の場合に対応する。本研究では前者を用いた解析を '定式化1'、後者を用いた場合を '定式化2' と呼ぶことにする。

要素の剛性マトリックス  $[K]$  は次式で求められる。

$$[K] = 2\pi a b \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B(\zeta)]^T [D] [B(\zeta)] \cdot r d\xi d\zeta \quad (8)$$

上式で  $r = r_0 + a\xi$  であるが、 $r_0$  (接着層の中心半径) が  $a$  (接着層の厚さの半分) より十分大きいことを考慮して、

$r=r_0$ と近似する。従って、要素剛性マトリックスは次式で算定できる。

$$[K]=4\pi a b r_0 \int_{-1}^{+1} [B(\zeta)]^T [D] [B(\zeta)] d\zeta \quad (9)$$

なお、積分には標本点数3のGaussの求積法を用いた。

### 3. 数値計算例

解析モデルは軸方向引張力Fが内側の被着体に作用する場合であり、分割の様子および支持条件を図－3に示す。以下に示す結果の全ては、 $E_1=E_2$ の同種接着結合に対するもので、接着層内部の応力のうち、垂直応力 $\sigma_r$ およびせん断応力 $\tau_{zr}$ を平均せん断応力 $\tau_m=F/(2\pi r_0 l)$ で無次元化して、それぞれ $N(=\sigma_r/\tau_m)$ および $T(=\tau_{zr}/\tau_m)$ で表示する。

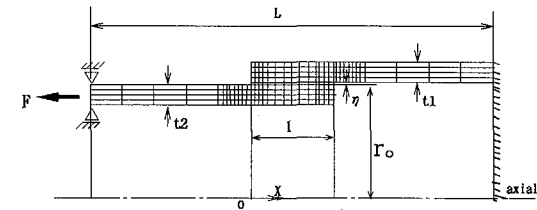
#### 3.1 既往の解析結果との比較

LubkinとReissnerの<sup>1)</sup> 解析諸元を用いた計算を行い、本研究で提示した2つの定式化による接着要素の妥当性および離散化の程度(分割数と解析領域)の解に及ぼす影響を検討する。計算は、 $t_1=t_2$ 、 $l/t_1=10$ および $\eta/t_1=0.2$ とし、パラメータ $\beta(=\eta E_1/t_1 E_a)$ と $R(=t_1/2r_0)$ の二つの組合せに対して行った。

case1; ( $\beta$ ,  $R$ )=(20, 0.025)  
case2; ( $\beta$ ,  $R$ )=(4, 0.1)  
これらの数値は、被着体にアルミニウム( $E_1=70000\text{MNm}^{-2}$ ,  $\nu_1=0.3$ ), 接着剤にはエポキシ(case1で $E_a=700\text{MNm}^{-2}$ , case2で $E_a=3500\text{MNm}^{-2}$ ,  $\nu_a=0.3$ )を採用したことに相当する。

表－1は、解析対象領域を $L/l=3, 4, 5, 6$ と変化させ、また要素分割数を5段階に変化させて、'定式化1'による接着層の端 $x=0$ (荷重作用端側)の応力NとTを整理したものである。この表によれば、解析領域には $L/l=4$ を要素分割数には179以上を用いれば、ほぼ収束した値が得られている。以後、解析領域は $L/l=5$ を、要素分割数には206を用いることにする(図－3がこの分割数に対応する)。

ここでは接着層端部( $x/l=0$ )の最大値として、端部に最も近い積分点の応力値を用いた。また、せん断応力Tは理論的には零となるが、本計算値及び後述のLubkinらの理論解は数値計算上零の値にならない。しかし、せん断応力の最大値は端部より少し内側に入った位置で生じるので、本論文は積分点の応力を端部の応力として整理し



図－3 解析モデルと要素分割

た。なお接着層端部は解析上の特異点であり、一般には要素細分割とともに応力は大きくなる。本計算値(分割数NE=146, 179, 206)は、端部における接着層の要素はいずれもアスペクト比を一定にしており、端部最大応力は接着層端部近傍における応力集中の平均値とみなせる。

図-4は接着層内のNとTの応力分布について、本解析法('定式化1'および'定式化2')と薄肉シェル理論に基づくLubkinらの理論解と比較したものである。また図では接着層両端の数値的比較が判然としないので表－2に応力値を示した。これらの図表によれば、応力Tはいずれの結果も全領域においてよい一致が得られていることがわかる。一方、応力Nは接着層中央部近傍ではよく一致しているものの、両端では差異が認められ、本解析結果は理論解より大きめの値を与え、また本解析結果では'定式化1'が'定式化2'より大きい値を示し'定式化1'が剛性を堅めに、'定式化2'が剛性を柔らかめに評価していることが分かる。なお、応力Nが本解析結果と理論解に差があるのは、理論解が接着層の定式化で応力 $\sigma_r$ と $\tau_{zr}$ の影響

表－1 解析領域と分割数の解に与える影響

| case1   |       |      |           |           |           |
|---------|-------|------|-----------|-----------|-----------|
|         | L/l=3 |      | 4         | 5         | 6         |
| NE      | N     | T    | N T       | N T       | N T       |
| 85( 5)  | 1.23  | 1.39 | 1.22 1.39 | 1.22 1.39 | 1.24 1.39 |
| 119( 7) | 1.25  | 1.38 | 1.23 1.38 | 1.22 1.38 | 1.22 1.38 |
| 146(10) | 1.25  | 1.38 | 1.24 1.38 | 1.23 1.38 | 1.23 1.38 |
| 179(11) | 1.26  | 1.38 | 1.25 1.37 | 1.24 1.37 | 1.24 1.37 |
| 206(14) | 1.26  | 1.38 | 1.25 1.37 | 1.24 1.37 | 1.24 1.37 |

| case2   |       |      |           |           |           |
|---------|-------|------|-----------|-----------|-----------|
|         | L/l=3 |      | 4         | 5         | 6         |
| NE      | N     | T    | N T       | N T       | N T       |
| 85( 5)  |       |      | 2.19 2.22 | 2.23 2.24 | 2.26 2.25 |
| 119( 7) | 2.31  | 2.18 | 2.32 2.18 | 2.32 2.18 | 2.32 2.18 |
| 146(10) | 2.32  | 2.18 | 2.32 2.18 | 2.32 2.18 | 2.32 2.18 |
| 179(11) | 2.41  | 2.14 | 2.42 2.14 | 2.42 2.14 | 2.42 2.14 |
| 206(14) | 2.41  | 2.14 | 2.42 2.14 | 2.42 2.14 | 2.42 2.14 |

NE: 総要素数 [ ( ) ]は接着層の総要素数]

表－2 端部の応力値 ( $x/l=0$ )

|       | 理論解  |      | 本解法 (FEM) |      |       |      |
|-------|------|------|-----------|------|-------|------|
|       |      |      | 定式化 1     |      | 定式化 2 |      |
|       | N    | T    | N         | T    | N     | T    |
| case1 | 0.88 | 1.35 | 1.24      | 1.37 | 1.05  | 1.36 |
| case2 | 1.59 | 2.25 | 2.42      | 2.14 | 2.09  | 2.08 |

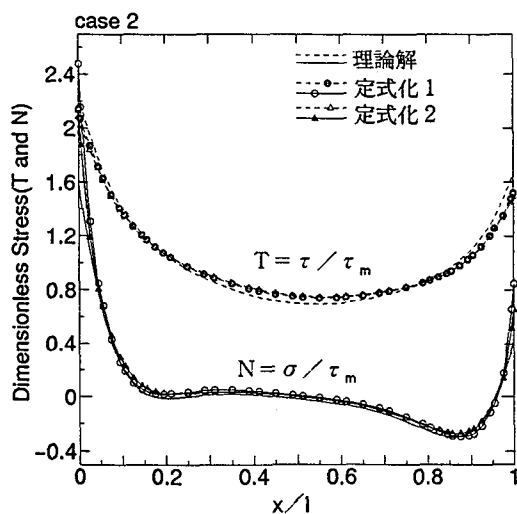
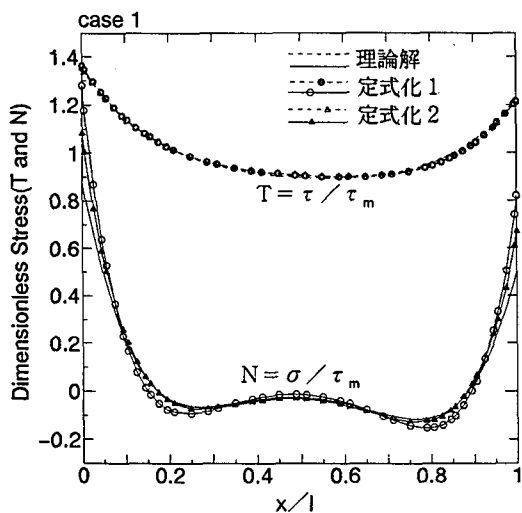


図-4 本解析法の妥当性の検討  
(接着層の応力分布)

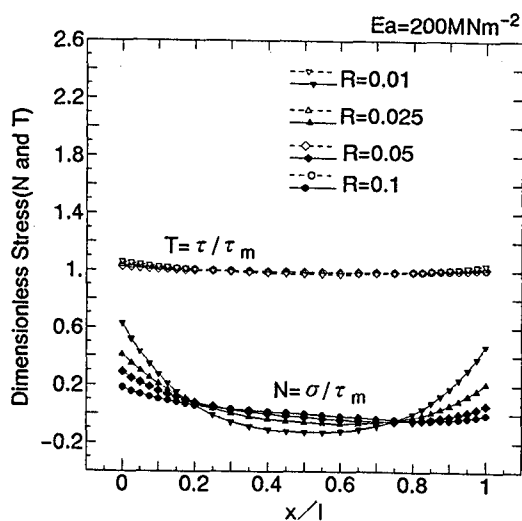
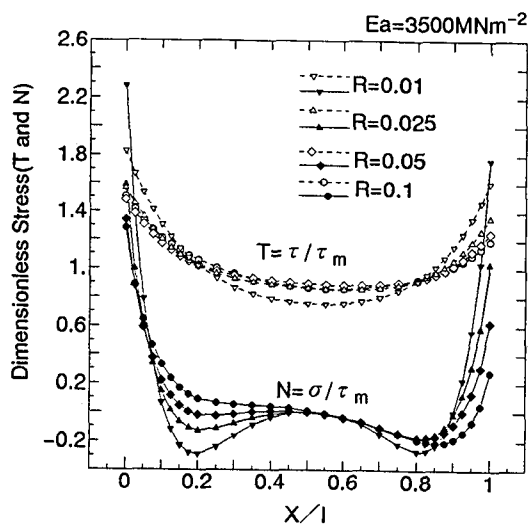


図-5 同種材料の接着層の応力分布特性

を無視していること、理論解の解析領域は $x/l=0\sim1$ であり、 $x/l<0$ と $x/l>1$ の領域での被着体の剛性を考慮していないこと、 $x/l=0$ および $x/l=1$ における境界条件をせん断力と曲げモーメントを零として解析しているなど接着層両端における被着体の末端効果(boundary effect)を適切に考慮していないことによるものと考えられる。

### 3.2 同種材料の接着接合の応力特性

ここでは、被着体ⅠとⅡに鉄( $E_1=206000\text{MNm}^{-2}$ ,  $\nu_1=0.3$ )を用い、接着剤にエポキシ系を用いた場合を想定し、'定式化1'の接着要素を用いて解析を行った。解析諸元は、 $l/t_1=10$ ,  $\eta/t_1=0.2$ および $L/l=5$ である。

図-5には、被着体の板厚が等しい場合( $t_1=t_2$ )の

接着層の応力分布(NとT)について示したものであり、接着層の弾性係数を $E_a=200, 3500\text{MNm}^{-2}$ とし、 $R(=t_1/2r_0)$ を0.01~0.1まで変化させた。この図から同種材料からなるラップ接着継手の応力特性として、次の諸点を指摘できる。

①せん断応力Tは、 $E_a$ が小さければRの値によらずほぼ一定値をとり、 $E_a$ が大きくなれば二次曲線的な分布を示し、端部で最大となり、Rが小さいほど大きな値となる。

②垂直応力Nは、Rと $E_a$ に大きな影響を受け、圧縮応力状態になる領域もある。応力は荷重作用側の端部で最大となり、 $E_a$ とRが小さい程大きくなる。言い換えれば、端部の応力集中は、厚い円筒体程、接着層の弾性係数が小さい程軽減できる。

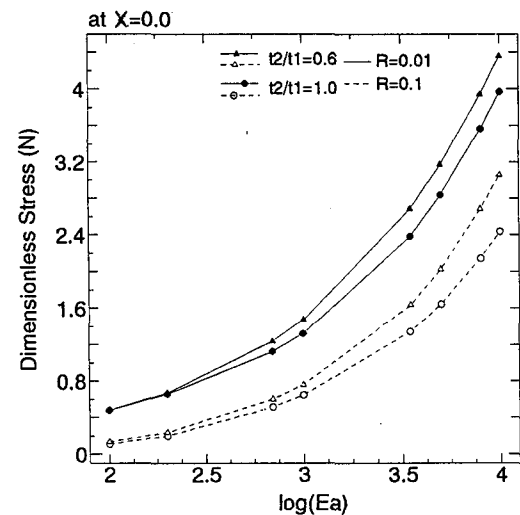
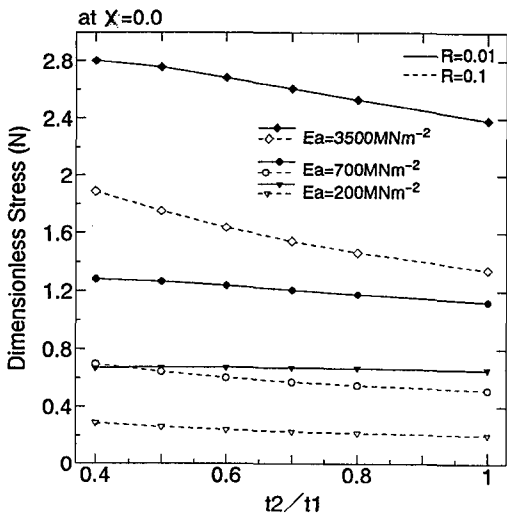
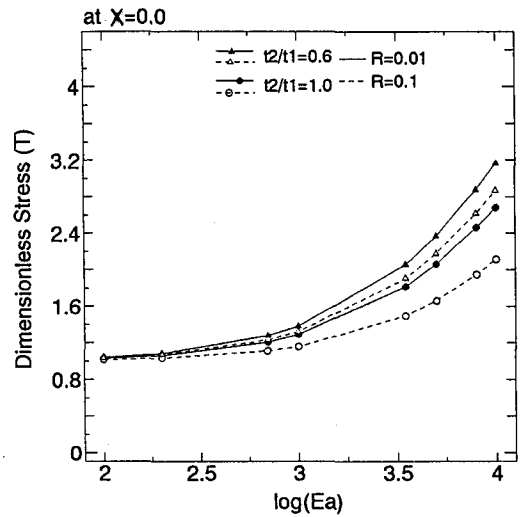
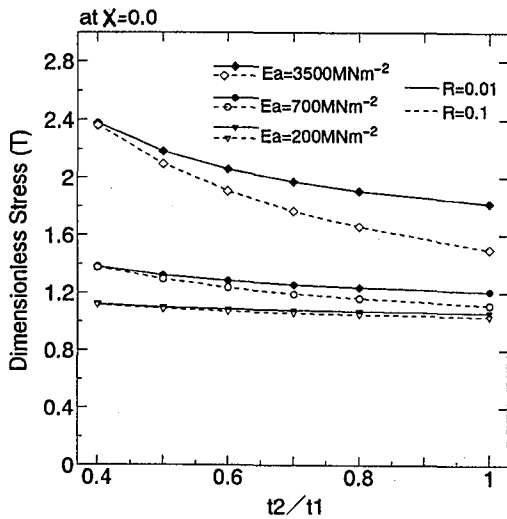


図-6 被着体の厚さ比( $t_2/t_1$ )の最大応力に与える影響

図-7 接着層の弾性係数 $E_a$ が最大応力に与える影響

図-6は、被着体Iの厚さ( $t_1$ )を一定して、被着体IIの厚さ( $t_2$ )を $t_2/t_1=0.4\sim1.0$ の間で変化させて、 $x/l=0$ (荷重作用端側)の最大応力の変動をみたものである。これによれば、

①応力 $T$ と $N$ の最大値は、 $t_2/t_1$ の増加とともに減少する傾向にあり、とくに、 $R$ が小さく(薄肉円筒体)、 $E_a$ が大きい程著しい。

② $t_2/t_1$ の増加にともなう、最大応力の低下の度合は、 $R$ よりもが $E_a$ に大きく依存し、 $E_a$ の値が小さければ、 $t_2/t_1$ の値によらずほぼ一定値となる傾向にある。ことがわかる。

図-7は、接着層の弾性係数 $E_a$ を $200\sim10000\text{MNm}^{-2}$ の間で変化させて、 $x/l=0$ における最大の応力値の変化を

示したものである。なおグラフの横軸は、 $\log_{10}(E_a)$ で示している。この図より、次のことが理解できる。

①応力 $N$ と $T$ の最大値は、 $E_a$ の増加とともに大きくなり、 $\log_{10}(E_a)$ に対して単調に増加する。

② $N$ と $T$ の値は、 $E_a$ が大きい程、 $R$ が小さい程(薄肉円筒体)、被着体の厚さが異なる場合( $t_1 \neq t_2$ )に大きくなる。

さて、図-5、6および図-7に示した諸パラメータの接着層の応力に与える影響は、'定式化2'による応力 $\sigma_r$ および $\tau_{zr}$ と変位の関係式からもおおよそ理解できる。この場合の応力(例えば $\sigma_r$ )と変位の関係式は式(4.a)と式(6)より次式となる。

$$\sigma_r = E_a (\Delta u / 2a) = E_a (u_{184} - u_{283}) / 2a \quad (10)$$

式(10)より理解できるように応力は、接着層の剛性と被着体の相対変位の積に比例することがわかる。すなわち、

①  $R(=t_1/2r_0)$ が大きくなれば、被着体の剛性が大きく、被着体の変形も小さくなって、応力が小さくなる。

②被着体の厚さの比  $t_2/t_1$ が小さくなれば、被着体が薄い分だけ剛性が小さく、被着体の変形が大きくなり、応力が大きくなる。

③接着層の弾性係数 $E_a$ が大きくなれば、変形が小さくなるが、その影響よりも $E_a$ の影響が大きくなり、応力が大きくなる。

④ここでの数値例では示さなかったが、被着体の厚さが等しい( $t_2=t_1$ )場合でも、被着体の剛性が小さくなれば、②と同じ理由により応力が大きくなる。

#### 4. まとめ

本研究は、ラップ接着された円筒体に引張荷重が作用した場合の応力解析を行い、接着層の基本的な応力特性を明らかにした。得られた結果は以下となる。

(1) 提示した接着要素は実用的には、十分な精度を有している。

(2) 接着層における応力の最大値は、荷重載荷側の接着層の端で生じ、被着体の弾性係数が小さい場合、接着層の弾性係数が大きい場合、薄い円筒体の場合、および

被着体の厚さが異なる場合に大きくなる。

本研究では、接着層内部の基本的な応力特性の検討を行ったが、接着層端部は応力特異性の問題であり、応力場を特性づけるパラメータの検討や、接着層材料の温度依存性、粘弾性的性質を考慮した応力解析および衝撃などの動的解析を実施する予定である。

謝辞：本研究の実施にあたっては、角田與史雄教授（北海道大学工学部）にご助言を頂いたことを記し、謝意を表します。

#### 参考文献

- 1) Lubkin, J. L. and Reissner, E. :Stress distribution and design data for adhesive lap joints between circular tubes, J. Appl. Mech., Trans. ASME. 78, PP. 1213-1221, 1956.
- 2) Adams, R. D. and Peppiatt, N. A. :Stress analysis of adhesive bonded tubular lap joints, J. Adhes., Vol. 9, pp. 1-18, 1977.
- 3) Shi, Y. P. and Cheng, S. :Analysis of adhesive-bonded cylindrical lap joints subjected to axial load, Vol. 119, No. EM3, pp. 584-602, 1993.
- 4) 鷲津久一郎他共編：有限要素法ハンドブック, 基礎編, 培風館, 1981.

(1994年9月14日受付)