

Spline Prism法を用いた厚肉円筒
パネルの振動解析について

VIBRATION OF THICK CYLINDRICAL SHELL PANELS BY USING THE SPLINE PRISM METHOD

水澤富作*, 加藤年宏**

Tomisaku MIZUSAWA and Toshihiro KATO

* 工博 大同工業大学助教授 工学部建設工学科 (〒457 名古屋市南区白水町40番地)

** 大同工業大学学生 工学部建設工学科 (〒457 名古屋市南区白水町40番地)

This paper presents application of the spline prism method which is a semi-analytical model based on the three-dimensional elasticity theory to analyse vibration of thick, cylindrical panels.

To demonstrate the convergence and accuracy of the present method, several examples are solved, and the results are compared with those obtained by other numerical methods. Stable convergence and good accuracy are obtained using the higher-order spline prism models. The effects of thickness ratio, shallowness angle, radius ratio on the frequencies of cylindrical panels with several boundary conditions are analysed.

Key Words : spline prism method, thick cylindrical panel, vibration,
3D-elasticity theory

1. まえがき

構造物の大型化や重量化に伴いかなり分厚い円筒パネルが曲線コンクリート橋、サイロや落石防護構造などに採用されるので、このような構造要素の構造解析が設計上重要になっている。このような厚肉円筒パネルの2次元解析では、以下のような2つの近似理論が適用されている。

1) 基礎式に現れる $(1 + z/Rc)^{-1}$ の級数展開に伴う採用項数により、Donnell, Love, Sanders, Koitor, NovozhilovやFlüggeなどの一次の近似理論から高次の近似シェル理論が提案されている^{1, 2)}。

2) 横せん断変形の影響を考慮するために厚さ方向の変位場をどのように仮定するかにより、古典シェル理論、一次せん断変形理論や高次せん断変形シェル理論が提案されている³⁾。したがって、これらの近似仮定より、シェルの曲率半径、 Rc 、シェル厚やシェル長がこれらの偏平シェル理論の大きな適用限界になっている。厚肉シェル理論では、3次元的な力学量のうちシェルとしての特性に着目し、その特性を解析仮定の中に取り込み、解析を2次元化した弾性シェルの高次せん断変形理論である。すなわち、これらの2次元化理論は、厚さ方向に級数展開を行い、シェル厚方向の影響が近似的に考慮されている。厚さ方向の級数展開を高めれば、より高次なシェル理論が導けるが、解式が複雑になり、未知数の数も増大してくる。したがって、弾性体である厚肉円筒パ

ネルのより正確な振動特性を知るためには、厳密な境界条件も考慮できる3次元弾性理論に基づかなければならない。これまでも、弾性理論に基づく完全な厚肉円筒シェルの振動解析に関する研究は多くみられるが^{11, 12)}、4つの支持辺を有する厚肉円筒パネルの振動解析に関する研究はあまり行われていないように思われる。

Soldatosら¹³⁾は、周辺単純支持された円筒厚肉パネルの3次元の振動問題を、反復法を用いて厳密な解を求めているが、境界条件に大きな制約がみられる。

最近、著者ら^{4, 5)}は有限プリズム法⁶⁾と同様な離散化概念に基づくSpline Prism法を用いて長方形厚板や扇形厚板の振動解析を行い、数値安定性の高い解析結果を得ている。また、この方法によれば、従来の有限プリズム法と比較して、未知数をかなり低減できる。

本研究では、3次元弾性理論に基づくSpline Prism法を用いて、相対する円筒軸に平行な2辺で単純支持され、他の円弧辺で任意の境界条件を持つ厚肉円筒パネルの振動解析を行っている。この方法は、一方向に固有関数を仮定し、他の2方向にB-spline関数を用いた3次元の曲面帯板モデルであり、また幾何学的境界条件のみを満足させれば、力学的境界条件が変分操作により満たすことができる。本手法の解析精度や収束性に与えるスプライン次数やプリズム要素の分割数の影響について検討した。また、厚肉円筒パネルの振動特性に与えるシェル厚比、偏平角、曲率半径比や境界条件などの影響について

も明らかにしている。

2. 解析手法

ここでは、3次元弾性理論とポテンシャルエネルギー最小化原理を用いて、Fig. 1に示すような曲面Spline Prism要素モデルを導く。このSpline Prism法は、2方向の変位にB-spline関数を仮定し、他の一方向に変位をフーリエ級数展開し、関数の直交性を利用して3次元問題を2次元問題に変換した半数値解析法である。このSpline 関数の次数を高めることにより、任意の高次のSpline Prismモデルが導かれる。

式の定式化にあたり、次式で表される無次元円筒座標系を用いる。

$$\xi = (r - R_i)/t, \quad \eta = y/L, \quad \zeta = \theta/\phi \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $t = R_i(\delta - 1)$ 、 $\delta = R_o/R_i$ 、 t は円筒パネルの厚さ、 L はパネル長、 ϕ は偏平角、 r は半径であり、また R_i と R_o はそれぞれ円筒の内径と外径を示す。 R_c は中央曲面の曲率半径であり、 $(R_o + R_i)/2$ で与えられる。

曲面プリズム要素で仮定される ξ 、 η 、 ζ 方向の変位関数、 U 、 V 、 W は、それぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned} U &= \sum_{\ell=1}^R \left\{ \sum_{m=1}^{i_r} \sum_{n=1}^{i_y} A_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \right\} Z_{\ell}(\zeta) \\ &= \sum_{\ell=1}^R [N]_{mn} Z_{\ell}(\zeta) \{\delta_A\}_{\ell} \\ V &= \sum_{\ell=1}^R \left\{ \sum_{m=1}^{i_r} \sum_{n=1}^{i_y} B_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \right\} Z_{\ell}(\zeta) \\ &= \sum_{\ell=1}^R [N]_{mn} Z_{\ell}(\zeta) \{\delta_B\}_{\ell} \\ W &= \sum_{\ell=1}^R \left\{ \sum_{m=1}^{i_r} \sum_{n=1}^{i_y} C_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \right\} \bar{Z}_{\ell}(\zeta) \\ &= \sum_{\ell=1}^R [N]_{mn} \bar{Z}_{\ell}(\zeta) \{\delta_C\}_{\ell} \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

ここで、 $i_r = k - 1 + M_r$ 、 $i_y = k - 1 + M_y$ 、 $Z_{\ell}(\zeta)$ と $\bar{Z}_{\ell}(\zeta)$ は、それぞれ軸方向の支持辺で与えられた境界条件を満たした固有関数である。 $N_{m,k}(\xi)$ と $N_{n,k}(\eta)$ は正規化されたB-spline関数であり、 $k-1$ はB-spline関数のスプライン次数、 M_r と M_y はそれぞれ r と y 方向のプリズム要素の分割数である。 R は、固有関数の級数の項数である。また、式(2)をマトリックスで表すと、次式で与えられる。

$$\{d\} = \sum_{\ell=1}^R [S]_{mn} \{\Delta\}_{\ell} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $\{d\} = \{U, V, W\}^T$ 、 $\{\Delta\}_{\ell} = \{\{\delta_A\}_{\ell}, \{\delta_B\}_{\ell}, \{\delta_C\}_{\ell}\}^T$ であり、 $[S]_{mn}^{\ell}$ は、次式で表される。

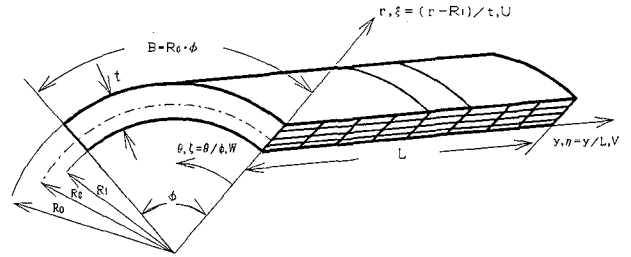


Fig.1 Cylindrical thick panel and co-ordinate systems

$$[S]_{mn}^{\ell} = \begin{bmatrix} [N]_{mn} Z_{\ell}(\zeta) & 0 & 0 \\ 0 & [N]_{mn} Z_{\ell}(\zeta) & 0 \\ 0 & 0 & [N]_{mn} \bar{Z}_{\ell}(\zeta) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (4)$$

次に、3次元弾性理論で定義される垂直ひずみ及びせん断ひずみを無次元円筒座標系で表せば、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{\theta} \\ \gamma_{ry} \\ \gamma_{\theta r} \\ \gamma_{y\theta} \end{Bmatrix} = \\ (1/t) &\left\{ \begin{array}{l} \partial U / \partial \xi \\ (t/L)(\partial V / \partial \eta) \\ \{U / (\xi + R_i/t) + [1 / (\xi + R_i/t)](1/\phi) \partial W / \partial \zeta\} \\ \{\partial V / \partial \xi + (t/L) \partial U / \partial \eta\} \\ \{\partial W / \partial \xi - W / (\xi + R_i/t) \\ \quad + [1 / (\xi + R_i/t)](1/\phi) \partial U / \partial \zeta\} \\ \{1 / (\xi + R_i/t)(1/\phi) (\partial V / \partial \zeta) \\ \quad + (t/L)(\partial W / \partial \eta)\} \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

また、式(2)を式(5)に代入すれば、次式の関係式で表される。

$$\{\varepsilon\} = \sum_{\ell=1}^R [B]_{mn} \{\Delta\}_{\ell} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $[B]_{mn}$ はひずみマトリックスである。

等方性、等質の円筒パネルの構成式は、次式で与えられる。

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 $\{\sigma\} = \{\sigma_r, \sigma_y, \sigma_{\theta}, \tau_{ry}, \tau_{\theta r}, \tau_{y\theta}\}^T$ 、また弾性マトリックス、 $[D]$ は、次式で示される。

$$[D] = D_0 \begin{Bmatrix} 1 & D_1 & D_1 & 0 & 0 & 0 \\ D_1 & 1 & D_1 & 0 & 0 & 0 \\ D_1 & D_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_2 \end{Bmatrix} \dots (8)$$

ただし、 $D_1 = \nu/(1-\nu)$ 、 $D_2 = (1-2\nu)/2(1-\nu)$ 、 $D_0 = E(1-\nu)/(1+\nu)/(1-2\nu)$ であり、 E はヤング係数、 ν はポアソン比である。

したがって、等厚、等方性な円筒パネルのひずみエネルギー、 U_p と運動エネルギー、 T は、それぞれ次式で与えられる。

$$U_p = (t^2 L \phi / 2) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \{ \varepsilon \} [D] \{ \varepsilon \} d\xi \\ + 1/(\delta-1) \} d\xi d\eta d\zeta \\ = (1/2) \sum_{\ell=1}^R \sum_{s=1}^S \{ \Delta \} \ell [K] \ell s \{ \Delta \} s \dots (9)$$

$$T = (\rho \omega^2 t^2 L \phi / 2) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \{ U^2 + V^2 \\ + W^2 \} \{ \xi + 1/(\delta-1) \} d\xi d\eta d\zeta \\ = (\omega^2 / 2) \sum_{\ell=1}^R \sum_{s=1}^S \{ \Delta \} \ell [M] \ell s \{ \Delta \} s \dots (10)$$

ここで、 $[K] \ell s$ と $[M] \ell s$ はそれぞれ剛性マトリックスと質量マトリックスであり、次式で与えられる。

$$[K] \ell s = (t^2 L \phi) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} [B]_{mn} [D] [B]_{ij} \\ \times \{ \xi + 1/(\delta-1) \} d\xi d\eta d\zeta \dots (11)$$

$$[M] \ell s = (\rho t^2 L \phi) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} [S]_{mn} [S]_{ij} \\ \times \{ \xi + 1/(\delta-1) \} d\xi d\eta d\zeta \dots (12)$$

ただし、 ρ は円筒パネルの密度であり、 ω は円振動数(rad/sec)である。

いま、2つの相対する円弧辺の境界面($\eta = \eta_{ic}$)で任意の幾何学的境界条件を考慮するため、仮想バネ法を用いる。すなわち、 $\eta = \eta_{ic}$ の境界面で、それぞれ変位 U, V, W 及び $\partial V / \partial \eta$ に対応する仮想バネ係数、 $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ を導入すれば、これらのバネによるひずみエネルギー、 U_b は、次式で与えられる。

$$U_b = (L \phi / 2) \sum_{ic=1}^{N_c} \int_0^1 \int_0^1 \{ \alpha U^2 + \beta V^2 + \gamma W^2 \\ + \mu (\partial V / \partial \eta)^2 \} d\eta d\zeta |_{\eta=\eta_{ic}} \dots (13)$$

ただし、 N_c は境界辺の数である。なお、固定辺、単純支持辺と自由辺の境界面で定義される幾何学的境界条件は

次式のように仮定される。

- (i) 固定: $\alpha = \beta = \gamma = \infty$ ($U=V=W=0$)
- (ii) 単純支持: $\alpha = \gamma = \mu = \infty$ ($U=W=\partial V / \partial \eta = 0$)
- (iii) 自由: $\alpha = \beta = \gamma = \mu = 0$ (14)

したがって、厚い円筒パネルの全ポテンシャルエネルギー、 Π は、

$$\Pi = U_p + U_b - T \dots (15)$$

で与えられる。ポテンシャルエネルギー最小の原理を用いると、次式の基礎方程式が得られる。

$$\partial \Pi / \partial \{ \Delta \} \ell = \sum_{\ell=1}^R \sum_{s=1}^S \{ [K] \ell s \{ \Delta \} s \\ - \omega^2 [M] \ell s \} = 0 \dots (16)$$

剛性マトリックス $[K] \ell s$ と質量マトリックス $[M] \ell s$ は、次式のようなサブマトリックスから構成されている。

$$[K] \ell s = \begin{Bmatrix} [K_{uu}] & [K_{uv}] & [K_{uw}] \\ [K_{vu}] & [K_{vv}] & [K_{vw}] \\ [K_{wu}] & [K_{wv}] & [K_{ww}] \end{Bmatrix} \ell s,$$

$$[M] \ell s = \begin{Bmatrix} [M_{uu}] & 0 & 0 \\ 0 & [M_{vv}] & 0 \\ 0 & 0 & [M_{ww}] \end{Bmatrix} \ell s \dots (17)$$

これらのサブマトリックス $[K_{ij}]$ と $[M_{ij}]$ は、Appendixに示してある。

ここで、円筒軸方向の直線辺がダイアフラムタイプの単純支持条件($\xi=0, 1; U=V=\partial W / \partial \xi=0$)を仮定すれば、この場合の固有関数は、それぞれ次式で与えられる。

$$Z \ell(\xi) = \sin(\ell \pi \xi),$$

$$Z \ell(\xi) = \cos(\ell \pi \xi); \ell=1, 2, \dots, R \dots (18)$$

したがって、これらの固有関数の直交性により、級数の連成項が消えるので、式(16)は、次式のようにになる。

$$\sum_{\ell=1}^R \{ [K] \ell \ell - \omega^2 [M] \ell \ell \{ \Delta \} \ell \} = 0 \dots (19)$$

ここで、 $[K] \ell \ell$ と $[M] \ell \ell$ の大きさは、 $3 \times (k-1+M_r) \times (k-1+M_y)$ である。 $k-1$ はスプライン次数であり、 M_r と M_y は曲面プリズム要素の分割数である。

3. 数値計算例及び考察

ここでは、厚肉円筒パネルの振動解析への本手法の適用性を示すために、円筒軸に平行な2辺が単純支持され、円弧辺の2辺が任意の境界条件をもつ円筒パネルの振動解析を行い、解の収束性や精度に与えるスプライン次数とプリズム要素の分割数の影響について検討する。また、円筒パネルの振動特性に与えるシェル厚比、 t/R_c 、シェル長比、 L/R_c 、偏平角、 ϕ やポアソン比、 ν などの影響について示す。ただし、計算結果は振動数パラメータ、 $n^* = \omega t \sqrt{\rho/E}$ を用いて表している。

Table 1には、周辺単純支持された円筒パネル($\phi=45^\circ$, $L/Rc=1.0$, $\nu=0.3$)の振動数パラメータ, $n^*=\omega t\sqrt{\rho/E}$ の収束性に与えるスプライン次数, $k-1$ とプリズム要素の分割数, $Mr=My$ の影響が示してある。ここで、スプライン次数は2次と3次を用い、プリズムの分割数は4から12まで変化させている。また、シェル厚比, t/Rc は0.1と0.4を仮定している。これより、プリズム要素の分割数を増大させると、高次の振動数まで一定値への一様な収束状態が得られている。また、スプライン次数を高めると少ない分割数でも安定した収束値が得られている。

本手法の解析精度を確認するために、周辺単純支持された厚肉円筒パネルの振動解析を行い、Soludatosら¹³⁾の厳密な解と比較した結果がTable 2に示されている。これより、非常に良く一致した結果が得られている。また、本手法の薄肉円筒パネルの振動解析への適用を考えて、周辺単純支持された薄い偏平円筒パネル($\phi=30^\circ$, $t/Rc=0.0099476$, $L/Rc=0.52356$, $\lambda=1.00763$)の精度比較をTable 3に示してある。比較のために、古典シェル理論に基づく有限帯板法⁷⁾、Rayleigh-Ritz法⁸⁾、スプライン帯板法²⁾や一次せん断変形シェル理論^{9, 10)}による結果も示してある。これより、本手法で得られた解が他の方法と比較して、低次の振動数から高次の振動数までよく一致した結果が得られているが、古典シェル理論による結果と比較してやや小さな値が示されている。

Table 4には、周辺単純支持された円筒パネル($\phi=45^\circ$, $L/Rc=1.0$, $\nu=0.3$)の振動数パラメータ, $n^*=\omega t\sqrt{\rho/E}$ に与えるシェル厚比, t/Rc の影響が示されている。比較のために、一次せん断変形理論に基づくSandersとDonnellのシェル理論を用いて計算した結果も示してある。これより、シェル厚が増大すると、3次元弾性理論と一次せん断変形理論による結果に差異が見られ、一次せん断変形理論の適用限界が、シェル厚比で0.2以内である。

Table 1. Convergence study of frequency parameter, $n^*=\omega t\sqrt{\rho/E}$ of simply supported cylindrical shell panels; $\phi=45^\circ$, $L/Rc=1.0$ and $\nu=0.3$

t/Rc ($\lambda=R_o/R_i$)	k-1	Mr=My	DOF*	Mode				
				1st	2nd	3rd	4th	5th
0.1 (1.1053)	2	4	108	0.079001	0.17530	0.19589	0.24817	0.27350
		8	300	0.078837	0.16545	0.19582	0.24817	0.26763
		10	432	0.078832	0.16524	0.19582	0.24817	0.26751
		12	588	0.078830	0.16517	0.19582	0.24816	0.26747
	3	4	147	0.078831	0.16574	0.19582	0.24817	0.26782
		8	363	0.078828	0.16512	0.19582	0.24816	0.26743
		10	507	0.078827	0.16512	0.19582	0.24815	0.26743
		12	675	0.078827	0.16512	0.19582	0.24814	0.26743
	4	4	108	0.78343	0.99213	1.2880	1.4071	1.6597
		8	300	0.78294	0.99212	1.2876	1.3907	1.6582
		10	432	0.78292	0.99212	1.2876	1.3903	1.6581
		12	588	0.78291	0.99211	1.2876	1.3902	1.6581
0.4 (1.5000)	2	4	147	0.78292	0.99212	1.2876	1.3913	1.6581
		8	363	0.78291	0.99212	1.2876	1.3900	1.6581
		10	507	0.78291	0.99212	1.2876	1.3900	1.6581
		12	675	0.78291	0.99212	1.2876	1.3900	1.6581

DOF*=the numbers of unknown parameters in the present method.

Table 2. Comparison of the natural frequencies, $n^*=\omega L\sqrt{\rho/E}$ of simply supported circular cylindrical panel; $\nu=0.3$

ϕ (°)	L/Rc	t/Rc	Ro/Ri	t/L	Mode			
					1st	2nd	3rd	4th
30	0.517638	0.1	1.105263	0.193185	1.20328	3.14682	5.25541	5.76108
					*1.20325	3.14682	5.25539	5.76102
	0.3	1.352941	0.579556	2.21292	2.21292	3.14991	4.62052	5.00861
					*2.21292	3.14991	4.62052	5.00858
	1.0	0.1	1.105263	0.1	0.80964	3.15331	5.23679	5.78461
					*0.80963	3.15331	5.23675	5.78457
60	0.3	1.352941	0.3	1.52806	3.16159	5.11234	5.56169	
					*1.52805	3.16159	5.11234	5.56168
	1.0	0.1	1.105263	0.070711	0.89466	3.15294	5.15984	5.78911
					*0.89464	3.15292	5.15983	5.78907
	0.3	1.352941	0.212132	1.21998	3.15903	5.09827	5.57240	
					*1.21997	3.15903	5.09826	5.57237

* the results are calculated by Soldatos and Hadjigeorgiou[13] using the analytical method.

Table 3. Comparison of the natural frequencies, ω (rad/s) of simply supported cylindrical thin panel ($L=1.0$, $Rc=1.91$, $t=0.019$, $E=1.0$ and $\rho=1.0$) ; $\phi=30^\circ$, $t/Rc=0.009947644$, $L/Rc=0.523560209$, $\lambda=1.00763$ and $\nu=0.3$

Theory and method	1st	2nd	3rd	4th	5th
3D-elasticity theory					
Present method	0.28171	0.29871	0.50334	0.51915	0.56362
The first-order shear deformation theory (Sanders' shell theory)					
Spline strip method[10]	0.2818	0.2987	0.5035	0.5192	0.5635
Thin shell theory					
Spline strip method[2]	0.2821	0.3009	0.5050	0.5233	0.5701
Finite strip method[7]	0.285	0.305	0.512	0.530	0.573
Rayleigh-Ritz method[8]	0.2808	0.2999	0.5047	0.5227	0.5710

Table 4. The effect of t/Rc on the first five frequency parameters, $n^*=\omega t\sqrt{\rho/E}$ of simply supported cylindrical panels ; $\phi=45^\circ$, $L/Rc=1.0$ and $\nu=0.3$

t/Rc ($\lambda=R_o/R_i$)	Theory	Mode				
		1st	2nd	3rd	4th	5th
0.05 (1.0513)	3D-elasticity	0.025805	0.053135	0.053635	0.075980	0.086038
	Sanders[10]	0.025814	0.053193	0.053230	0.075857	0.086062
	Donnell[10]	0.026380	0.053592	0.054035	0.076647	0.086338
0.1 (1.1053)	3D-elasticity	0.078827	0.16512	0.19582	0.24815	0.26743
	Sanders	0.078696	0.16493	0.19462	0.19469	0.26561
	Donnell	0.081525	0.16687	0.19475	0.19774	0.26882
0.2 (1.2222)	3D-elasticity	0.26125	0.49675	0.51400	0.62920	0.64313
	Sanders	0.25852	0.38854	0.51142	0.61838	0.64502
	Donnell	0.27052	0.38900	0.51990	0.62993	0.64242
0.4 (1.5000)	3D-elasticity	0.78291	0.99212	1.2876	1.3900	1.6581
	Sanders	0.75754	0.77049	1.3031	1.3533	1.5400
	Donnell	0.77340	0.80390	1.2861	1.3886	1.5422

Table 5には、厚肉円筒パネル ($L/Rc=1.0$, $t/Rc=0.2$, $\lambda=1.222$, $\nu=0.3$)の振動数パラメータ, $n^*=\omega t\sqrt{\rho/E}$ に与える偏平角, ϕ とシェル厚比の影響について示してある。ここで、偏平角は、 15° から 90° まで変化させている。偏平角が変化するとシェル厚比も変わるので、 t/L と t/B で定義してある。ただし、 $B=\phi Rc$ は中央曲面での円弧辺の長さである。比較のために、一次せん断変形シェル理論による解析結果も示してある。これより、振動数パラメータに与える偏平角の影響が顕著にみられ、また厚肉シェル問題への一次せん断変形シェル理論の適用は、シェル厚比に大きく依存している。また、一次せん断変形理論の適用限界は、シェル厚比で0.2以内になっている。

Table 6には、それぞれ2つの相対する円弧辺の境界面で、固定された場合 (SS-CC)、単純支持された場合 (SS-SS)と自由な場合 (SS-FF)の厚肉円筒パネル($L/Rc=1.0$, $\nu=0.3$)の振動数パラメータ, $n^*=\omega t\sqrt{\rho/E}$ が示してある。ここで、偏平角は 30° から 90° に変化させている。これより、境界条件は、円筒パネルの振動数に大きな影響を与えている。

Table 7は、円筒パネル ($\phi=45^\circ$, $L/Rc=1.0$, $t/Rc=0.2$, $\lambda=1.222$)の振動数パラメータ, $n^*=\omega t\sqrt{\rho/E}$ に与えるポアソン比の影響が示してある。ここで、ポアソン比は0.0, 0.15と0.3を仮定している。これより、振動数パラメータに与えるポアソン比の影響は顕著にみられ、また境界条件にも依存している。ポアソン比の増大とともに振動数パラメータは減少してくる。

4. あとがき

本研究では、曲線コンクリート橋のウェアやシェルターなどに用いられる厚肉円筒パネルの振動解析へのSpline Prism法の適用性について検討し、振動数パラメータに与えるシェル厚比、半径比や偏平角などの影響を明らかにした。本文で得られた主な結果をまとめると以下ようになる。

- 1) 高次のSpline Prismモデルを用いれば、少ないプリズム要素数でも高次の振動数まで安定した収束性が示され、また精度の高い解析結果が得られた。
- 2) シェル厚比が増大するに従い振動数パラメータは増大するが、その影響は固定辺を持つ場合に大きくみられる。また、一次せん断変形シェル理論を用いて求めた解と比較してシェル厚比が大きくなるほど差が大きくなり、また一次せん断変形理論の適用限界が確認された。
- 3) 厚肉円筒パネルの振動特性は、偏平角や境界条件に大きく依存している。
- 4) 振動数パラメータに与えるポアソン比の影響は顕著にみられ、またポアソン比の増大とともに振動数パラメータは減少してくる。

最後に、本研究は文部省科学研究費 (一般研究(C))、内藤科学技術財団補助金と大同工業大学研究奨励金の援助を受けて行ったもので、ここに関係各位に謝意を表

Table 5. The effect of shallowness angle, ϕ on the frequency parameters, $n^* = \omega t\sqrt{\rho/E}$ of simply supported cylindrical panels: $L/Rc=1.0$, $t/Rc=0.2$, $\lambda=1.2222$ and $\nu=0.3$

ϕ	t/L	t/B		1st	2nd	Mode 3rd	4th	5th
15°	0.2	0.764	3D-elasticity	1.0905	1.229	1.442	1.485	1.537
			Sanders[10]	0.3885	0.7770	1.068	1.165	1.202
			Donnell[10]	0.3890	0.7778	1.078	1.166	1.214
30°	0.2	0.382	3D-elasticity	0.4247	0.6443	0.7447	0.8472	0.9454
			Sanders	0.3885	0.4184	0.6344	0.7770	0.8492
			Donnell	0.3890	0.4307	0.6461	0.7778	0.8465
45°	0.2	0.255	3D-elasticity	0.2613	0.4969	0.5140	0.6292	0.6431
			Sanders	0.2585	0.3885	0.5114	0.6184	0.6450
			Donnell	0.2705	0.3890	0.5199	0.6299	0.6424
60°	0.2	0.190	3D-elasticity	0.2101	0.3726	0.4247	0.4741	0.5537
			Sanders	0.2089	0.3885	0.4184	0.4713	0.5553
			Donnell	0.2189	0.3890	0.4307	0.4772	0.5531
90°	0.2	0.127	3D-elasticity	0.1931	0.2485	0.2613	0.4247	0.4470
			Sanders	0.1932	0.2585	0.3885	0.4184	0.4461
			Donnell	0.1992	0.2705	0.3890	0.4307	0.4492

Table 6. The first six frequency parameters, $n^* = \omega t\sqrt{\rho/E}$ of cylindrical thick panels with some boundary conditions along the circumferential edges; $L/Rc=1.0$ and $\nu=0.3$

a) SS-CC								
$(\lambda=Rc/Ri)$	ϕ (°)	t/L	t/B	1st	2nd	Mode 3rd	4th	5th
0.1 (1.1053)	30	0.1	0.191	0.1398	0.2349	0.3610	0.3795	0.4471
	60	0.1	0.0955	0.09254	0.1398	0.1935	0.2349	0.2436
	90	0.1	0.0637	0.09557	0.09976	0.1398	0.1901	0.2016
0.2 (1.2222)	30	0.2	0.382	0.4533	0.6917	0.9049	0.9941	1.096
	60	0.2	0.191	0.2741	0.4533	0.5549	0.6857	0.6917
	90	0.2	0.127	0.2609	0.3134	0.4533	0.5382	0.5788
0.4 (1.5000)	30	0.4	0.764	1.240	1.687	1.844	2.202	2.360
	60	0.4	0.382	0.7346	1.240	1.327	1.412	1.418
	90	0.4	0.255	0.6675	0.8645	1.148	1.240	1.297
b) SS-CF								
$(\lambda=Rc/Ri)$	ϕ (°)	t/L	t/B	1st	2nd	Mode 3rd	4th	5th
0.1 (1.1053)	30	0.1	0.191	0.1042	0.1586	0.2557	0.3485	0.3569
	60	0.1	0.0955	0.03851	0.1042	0.1070	0.1586	0.2036
	90	0.1	0.0637	0.04078	0.05208	0.1042	0.1087	0.1154
0.2 (1.2222)	30	0.2	0.382	0.3601	0.5033	0.6986	0.7630	0.9932
	60	0.2	0.191	0.1224	0.3100	0.3601	0.4225	0.5034
	90	0.2	0.127	0.09827	0.1842	0.2914	0.3555	0.3589
0.4 (1.5000)	30	0.4	0.764	1.043	1.266	1.494	1.834	2.013
	60	0.4	0.382	0.3887	0.7612	0.9377	1.043	1.235
	90	0.4	0.255	0.2650	0.5833	0.6875	0.7975	0.8958
c) SS-FF								
$(\lambda=Rc/Ri)$	ϕ (°)	t/L	t/B	1st	2nd	Mode 3rd	4th	5th
0.1 (1.1053)	30	0.1	0.191	0.09717	0.1152	0.1780	0.2741	0.3291
	60	0.1	0.0955	0.02218	0.03448	0.09717	0.1152	0.1227
	90	0.1	0.0637	0.007896	0.01385	0.04212	0.05789	0.0971
0.2 (1.2222)	30	0.2	0.382	0.3404	0.3910	0.5581	0.6530	0.7770
	60	0.2	0.191	0.08509	0.1242	0.3150	0.3404	0.3626
	90	0.2	0.127	0.03090	0.05028	0.1573	0.2059	0.2264
0.4 (1.5000)	30	0.4	0.764	1.007	1.072	1.348	1.372	1.672
	60	0.4	0.382	0.3021	0.3709	0.6883	0.9791	1.007
	90	0.4	0.255	0.1169	0.1551	0.4997	0.5224	0.6011

します。数値計算には大同工業大学情報処理センターと名古屋大学大型計算機センターを利用させて頂きました。

APPENDIX

式(16)で与えられるサブ剛性マトリックスは、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 [K_{UU}] &= (L\phi D_o/t) \{ \overset{111}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_1 \\
 &\quad + D_1 \overset{010}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_1 + D_1 \overset{100}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_1 \\
 &\quad + \overset{00-1}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_1 + D_2(t/L)^2 \overset{001}{I_{mi}} \overset{110}{J_{nj}} A_1 \\
 &\quad + D_2(1/\phi)^2 \overset{00-1}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_2 \\
 [K_{UV}] &= (L\phi D_o/t) \{ \overset{101}{D_1(t/L)} \overset{010}{I_{mi}} \overset{010}{J_{nj}} A_1 \\
 &\quad + D_1(t/L) \overset{000}{I_{mi}} \overset{010}{J_{nj}} A_1 \\
 &\quad + D_2(t/L) \overset{011}{I_{mi}} \overset{100}{J_{nj}} A_1 \\
 [K_{UW}] &= (L\phi D_o/t) \{ D_1(1/\phi) \overset{100}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_3 \\
 &\quad + (1/\phi) \overset{00-1}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_3 \\
 &\quad + D_2(1/\phi) \overset{010}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_4 + D_2(1/\phi) \overset{00-1}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_4 \\
 [K_{VU}] &= (L\phi D_o/t) \{ D_1(t/L) \overset{000}{I_{mi}} \overset{100}{J_{nj}} A_1 \\
 &\quad + D_1(t/L) \overset{000}{I_{mi}} \overset{100}{J_{nj}} A_1 + D_2(t/L) \overset{101}{I_{mi}} \overset{010}{J_{nj}} A_1 \\
 [K_{VV}] &= (L\phi D_o/t) \{ (t/L)^2 \overset{001}{I_{mi}} \overset{110}{J_{nj}} A_1 \\
 &\quad + D_2 \overset{111}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_1 + D_2(1/\phi)^2 \overset{00-1}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_2 \\
 [K_{VW}] &= (L\phi D_o/t) \{ D_1(B/h)(1/\phi) \overset{000}{I_{mi}} \overset{100}{J_{nj}} A_3 \\
 &\quad + D_2(1/\phi)(t/L) \overset{000}{I_{mi}} \overset{010}{J_{nj}} A_5 \\
 [K_{WU}] &= (L\phi D_o/t) \{ D_1(1/\phi) \overset{010}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_6 \\
 &\quad + (1/\phi) \overset{00-1}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_6 + D_2(1/\phi) \overset{100}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_5 \\
 &\quad + D_2(1/\phi) \overset{00-1}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_5 \\
 [K_{WV}] &= (L\phi D_o/t) \{ D_1(t/L)(1/\phi) \overset{000}{I_{mi}} \overset{010}{J_{nj}} A_6 \\
 &\quad + D_2(t/L)(1/\phi) \overset{000}{I_{mi}} \overset{100}{J_{nj}} A_5 \\
 [K_{WW}] &= (L\phi D_o/t) \{ (1/\phi)^2 \overset{00-1}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_7 \\
 &\quad + D_2 \overset{111}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_8 \\
 &\quad + \overset{100}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_8 + \overset{010}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_8 \\
 &\quad + \overset{00-1}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_8 + (B/h)^2 \overset{001}{I_{mi}} \overset{110}{J_{nj}} A_8 \}
 \end{aligned}$$

Table 7. The effect of Poisson ratio, ν on frequency parameter, $n^* = \omega t \sqrt{\rho/E}$ of cylindrical panels; $\phi = 45^\circ$, $L/Rc = 1.0$, $t/Rc = 0.2$ and $\lambda = 1.2222$

Boundary conditions	ν	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
SS-PF	0.0	0.18100	0.25382	0.49829	0.52748	0.65390	0.72708
	0.15	0.17603	0.23880	0.47189	0.49479	0.62921	0.69109
	0.3	0.15729	0.20589	0.41234	0.42289	0.55618	0.60113
SS-SS	0.0	0.29864	0.59975	0.65714	0.73323	0.84988	0.96003
	0.15	0.29015	0.57886	0.59635	0.70629	0.77159	0.92083
	0.3	0.26125	0.49676	0.51400	0.62920	0.64313	0.81546
SS-CC	0.0	0.36626	0.69743	0.75499	0.94170	1.0096	1.0456
	0.15	0.35196	0.66496	0.72553	0.87187	0.96264	0.99847
	0.3	0.31340	0.58529	0.64470	0.74208	0.84703	0.88314

また、サブ質量マトリックスは、次式で表される。

$$[M_{UU}] = (\rho t^2 L \phi) \{ \overset{000}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_1 \}$$

$$[M_{VV}] = (\rho t^2 L \phi) \{ \overset{000}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_1 \}$$

$$[M_{WW}] = (\rho t^2 L \phi) \{ \overset{000}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_8 \}.$$

ただし、 I_{mi} と J_{nj} は、次式で示される。

$$I_{mi} = \int_0^1 N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\xi) \{ \xi + 1/(\delta - 1) \} d\xi d\xi$$

$$J_{nj} = \int_0^1 N_{n,k}(\eta) N_{n,k}(\eta) \{ \xi + 1/(\delta - 1) \} d\xi d\xi$$

ここで、 t, u は、それぞれ導関数の次数である。また、 C は乗数である。また、 A_i は、次式で定義される。

$$A_1 = \int_0^1 Z \iota(\xi) Z p(\xi) d\xi,$$

$$A_2 = \int_0^1 Z \iota(\xi) Z \dot{p}(\xi) d\xi$$

$$A_3 = \int_0^1 Z \iota(\xi) \ddot{Z} p(\xi) d\xi$$

$$A_4 = \int_0^1 Z \iota(\xi) \ddot{Z} p(\xi) d\xi$$

$$A_5 = \int_0^1 \overline{Z} \iota(\xi) Z p(\xi) d\xi$$

$$A_6 = \int_0^1 \overline{Z} \iota(\xi) Z \dot{p}(\xi) d\xi$$

$$A_7 = \int_0^1 \overline{Z} \iota(\xi) \ddot{Z} p(\xi) d\xi$$

$$A_8 = \int_0^1 \overline{Z} \iota(\xi) \ddot{Z} p(\xi) d\xi$$

ただし、 $\cdot$ は導関数である。

参考文献

- 1). Leissa, A. W. : The vibrations of shells. NASA Rep. SO-288, NASA, Washington, D.C., 1973.
- 2). Mizusawa, T. : Application of spline strip method to analyse vibration of open cylindrical shells. Int. J. Num. Meth. Eng., **26**, 663-676, 1988.
- 3). Reddy, J. N. and Liu, C. F. : A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells. Int. J. Eng. Sci. **25**, 319-330, 1985.
- 4). 水澤富作、高木信治: Spline Prism法を用いた長方形厚板の振動解析について, 構造工学論文集, Vol. 39A, pp. 1-12, 1993.
- 5). 高木信治, 水澤富作: Spline Prism法を用いた扇形厚板の三次元解析について, 構造工学論文集, Vol. 40A, pp. 1-12, 1994.
- 6). Zienkiewicz, O. C. and Too, J. J. M. : The finite prism in analysis of thick simply supported bridge boxes. Procs ICE **53**, 147-172, 1972.
- 7). Cheung, Y. K. : Finite strip method in structural analysis. New York: Pergamon Press, 1977.
- 8). Peng-Cheng, S. and Jian-Guo, W. : Vibration analysis of flat shells by using B-spline functions, Comput. & Struct. **25**, 1-10, 1987.
- 9). 水澤富作、鬼頭博史: Spline帯板法を用いたクロス・プライ積層円筒シェルの振動解析について, 日本鋼構造協会構造工学における数値解析法シンポジウム論文集 **18**, 337-342, 1994.
- 10). 水澤富作、鬼頭博史、竹内哲也: 一次せん断変形理論を用いた積層円筒パネルの振動解析について. 平成5年度土木学会中部支部研究発表会講演概要集, **1-48**, 95-96, 1994.
- 11). Nelson, R. B., Dong, S. B. and Kalra, R. D. : Vibrations and waves in laminated orthotropic circular cylinders, J. Sound and Vibr., **18**, 429-444, 1971.
- 12). Noor, A. K. and Rarig, P. L. : Three-dimensional solutions of laminated cylinders, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. **3**, 319-334, 1974.
- 13). Soldatos, K. P. and Hadjigeorgiou, V. P. : Three-dimensional solution of the free vibration problem of homogeneous isotropic cylindrical shells and panells, J. Sound Vibr. **137**, 369-384, 1990.

(1994年 9月14日受付)