

対称アングルプライ積層長方形板の動的安定性

DYNAMIC STABILITY OF A SYMMETRIC ANGLE-PLY LAMINATED RECTANGULAR PLATE

高橋和雄*・江島裕章**・佐藤栄司***・瀬戸真樹****

Kazuo TAKAHASHI, Hiroaki ESHIMA, Eiji SATO and Masaki SETO

*正会員 工博 長崎大学教授 工学部社会開発工学科(〒852 長崎市文教町1-14)

**正会員 工修 (株)熊谷組

***学生員 長崎大学大学院工学研究科

****正会員 (株)エイトコンサルティング

The free vibration, buckling and dynamic stability of a laminated rectangular plate are reported for various fiber orientations of laminates, boundary conditions, configuration of a laminate and influence of coupling in this paper. This problem is solved by using the Hamilton method to drive time variables. The trial functions are assumed by functions which satisfy the geometric boundary conditions.

At first, vibration and buckling properties are shown for three types of materials, five boundary conditions and configuration of a laminated fiber orientation. Then, dynamic unstable regions are discussed.

Keywords : laminated rectangular plate, vibration, buckling, Rayleigh-Ritz method, dynamic unstable regions, Hamilton method

1. まえがき

繊維強化プラスチック(FRP)を用いた複合材料からなる積層板は、比強度、比剛性が大きく優れた力学特性を示す。このため、各層の材質、積層数、および積層角を変化させることによって、様々な機能をもつ構造部材の設計が可能になる。現在、航空、宇宙産業、船体、ガスタンク、スポーツ用品など、幅広い分野において利用され、今後は、大規模な構造物や大型宇宙構造物等の構造重量が問題となる部門への活用が考えられている¹⁾。このため、近年、積層板に関する研究は盛んに行われ、静力学や振動に関する力学特性は、かなり明らかにされてきた^{1) 2) 3)}。しかし、積層板は、力学的に異方性を示し、支配方程式に異方性板の特性と曲げモーメントとねじりモーメントのカップリング項が含まれるため、等方性板と比べて解析が複雑となる。そのため、軽構造では動的安定性は重要な課題となるにもかかわらず、動的安定性まで取り扱った研究はきわめて少ない。したがって、偏微分方程式で表される運動方程式を直接解いて、係数励振振動系の基礎式に変換することが不可能であり、動的安定解析の一般的解法は適用できない。単純共振のみ取り扱ったBertらの研究⁴⁾が見受けられるが、結合共振まで取り扱った研究はないようである。

そこで、著者らは単純共振と結合共振が同時に得られる動的安定解析の厳密な解法⁵⁾を用いて、中央面対称に積層した積層長方形板の動的安定特性を明らかにすることを意図している。すでに、カップリング項を無視した場合をGalerkin法を用いて解析した⁶⁾。Galerkin法では試行関数を幾何学的な境界条件と力学的な境界条件を同時に満足するように選ぶことが必要である。このため、カップリング項を考慮する場合や自由辺を含む場合に適用することは困難である。そこで、本研究では、幾何学的な境界条件のみを満足する試行関数を用いて解が得られるRayleigh-Ritz法⁷⁾を用いた解析を行う。まず、固有振動解析および座屈解析を行い、次いで、得られた固有振動形を用いてHamiltonの原理によって、動的安定問題の時間に関する運動方程式を誘導する。得られた運動方程式に、著者等によって提案された固有値問題に変換する方法⁸⁾により2倍サイズの行列の固有値問題に変換して解析を行う。

数値解析において、単純支持、固定および自由端の組合せからなる5種類の境界条件のもとに、異方性の異なる3つの材料を用い、中央面に対称に積層した長方形板の固有振動特性、座屈特性および動的不安定領域に及ぼす異方性の影響、積層角の影響および積層数の影響を明らかにするものである。

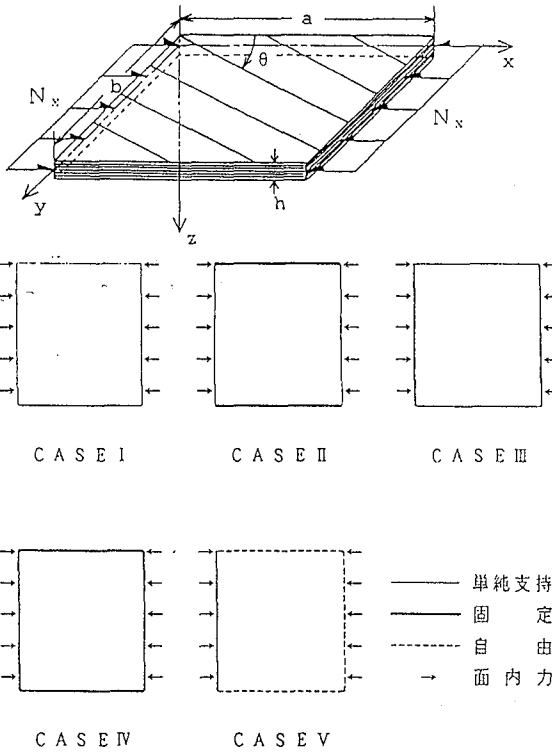


Fig. 1 Geometry of a laminated plate.

2. 変形によるエネルギーおよび解法

(1) 固有振動解析および座屈解析

Fig. 1 に示すような、中央面对称に積層された積層長方形板の x 方向に一様分布の静的面内力 N_x が作用する場合を考える。面外せん断変形を無視した中央面对称積層長方形板の曲げひずみによるエネルギー $V(w)$ は、次式のようになる⁸⁾。

$$V(w) = \frac{1}{2} \iint_A \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4 D_{16} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 4 D_{26} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 4 D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dA \quad (1)$$

ここに、 $D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{16}, D_{26}, D_{66}$: 板剛度、 w : たわみ、 x, y : 平板中央面の座標系、上式における D_{16}, D_{26} は曲げねじりカップリングを表わす板剛度

次に、運動エネルギー $T(w)$ および x 軸方向の面内力がなす仕事 $U(w)$ は次式のように与えられる。

$$T(w) = \frac{1}{2} \rho h \iint_A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dA \quad (2)$$

$$U(w) = \frac{1}{2} N_x \iint_A \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dA \quad (3)$$

ここに、 ρ : 板の密度、 h : 板厚、 t : 時間

積層長方形板の境界条件は次の 5 種類を考える。

CASE I: 全周単純支持

CASE II: 荷重対辺単純支持、他対辺固定

CASE III: 荷重対辺固定、他対辺単純支持

Table 1 Constants of material.

材 料	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}
(1) EGLASS/EP ($E_2/E_1=0.41$)	60.7	24.8	11.99	0.23
(2) BORON/EP ($E_2/E_1=0.09$)	209	19	6.4	0.21
(3) GRAPHITE/EP ($E_2/E_1=0.06$)	138	8.96	7.1	0.30

Table 2 Bending rigidities of a laminated composite plate : $L=3$.

曲げ剛性	材 料	$\theta=0^\circ$	$\theta=15^\circ$	$\theta=30^\circ$	$\theta=45^\circ$	$\theta=60^\circ$	$\theta=75^\circ$	$\theta=90^\circ$
D_1^*	(1) EGLASS/EP	1.0000	0.9324	0.7682	0.5924	0.4725	0.4202	0.4086
	(2) BORON/EP	1.0000	0.8809	0.5982	0.3128	0.1437	0.0936	0.0909
	(3) GRAPHITE/EP	1.0000	0.8860	0.6122	0.3271	0.1447	0.0762	0.0649
D_2^*	(1) EGLASS/EP	0.4086	0.4202	0.4725	0.5924	0.7682	0.9324	1.0000
	(2) BORON/EP	0.0909	0.0936	0.1437	0.3128	0.5982	0.8809	1.0000
	(3) GRAPHITE/EP	0.0649	0.0762	0.1447	0.3271	0.6122	0.8860	1.0000
D_3^*	(1) EGLASS/EP	0.0940	0.1219	0.1779	0.2059	0.1779	0.1219	0.0940
	(2) BORON/EP	0.0191	0.0722	0.1936	0.2518	0.1936	0.0722	0.0191
	(3) GRAPHITE/EP	0.0195	0.0708	0.1734	0.2248	0.1735	0.0708	0.0145
D_4^*	(1) EGLASS/EP	0.0000	0.1133	0.1634	0.1369	0.0737	0.0236	0.0000
	(2) BORON/EP	0.0000	0.1985	0.2755	0.2104	0.0890	0.0119	0.0000
	(3) GRAPHITE/EP	0.0000	0.1906	0.2698	0.2165	0.1051	0.0259	0.0000
D_5^*	(1) EGLASS/EP	0.0000	0.0236	0.0737	0.1369	0.1634	0.1133	0.0000
	(2) BORON/EP	0.0000	0.0119	0.0890	0.2104	0.2755	0.1985	0.0000
	(3) GRAPHITE/EP	0.0000	0.0259	0.1051	0.2165	0.2698	0.1906	0.0000
D_6^*	(1) EGLASS/EP	0.1933	0.2212	0.2772	0.3052	0.2772	0.2212	0.1933
	(2) BORON/EP	0.0305	0.0887	0.2050	0.2632	0.2050	0.0887	0.0305
	(3) GRAPHITE/EP	0.0511	0.1025	0.2052	0.2565	0.2052	0.1025	0.0511

CASE IV: 全周固定

CASE V: 1 辺固定、他 3 辺自由 (片持ち板)

たわみを次式のように仮定する。

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} W_{mn}(x, y) \exp(i \omega t) \quad (4)$$

ここに、 A_{mn} : 未定定数、 ω : 固有円振動数、 $W_{mn}(x, y)$: 幾何学的な境界条件を満たす関数、 $W_{mn}(x, y) = h_m(x) \bar{h}_n(y)$

(Appendix A 参照)

Rayleigh-Ritz法を適用すると

$$\frac{\partial}{\partial A_{rs}} (V - T - U) = 0 \quad (5)$$

$$(R=1, 2, 3, \dots, K, S=1, 2, 3, \dots, K)$$

式(5)に式(1)、(2)、(3)を代入し、偏微分を実行した後、積分をしてまとめると、次式のように行列表示される。

$$([E] - \lambda^4 [F] - \lambda_{cr} [G]) \{A\} = \{0\} \quad (6)$$

ここに、

$$\lambda^4 = \rho h \omega^2 \frac{b^4}{D_1^0}, \quad \lambda_{cr} = N_x \frac{b^2}{D_1^0}$$

$$[E]: E(S+(R-1)K, N+(M-1)K) = E_{MRNS},$$

$$[F]: F(S+(R-1)K, N+(M-1)K) = F_{MRNS},$$

$$[G]: G(S+(R-1)K, N+(M-1)K) = G_{MRNS},$$

$$\{A\}: \{A_{11} A_{12} \dots A_{1K} A_{21} A_{22} \dots A_{KK}\}^T$$

(Appendix B 参照)

ここに、 D_1^0 : すべての層の θ が 0° のときの D_{11} の板剛度

式(6)で $\lambda_{cr}=0$ とおけば、自由振動の固有値 λ が得られ、 $\lambda=0$ とおけば座屈固有値 λ_{cr} が得られる。数値計算においては、式(6) を行列の固有値問題として解くこと

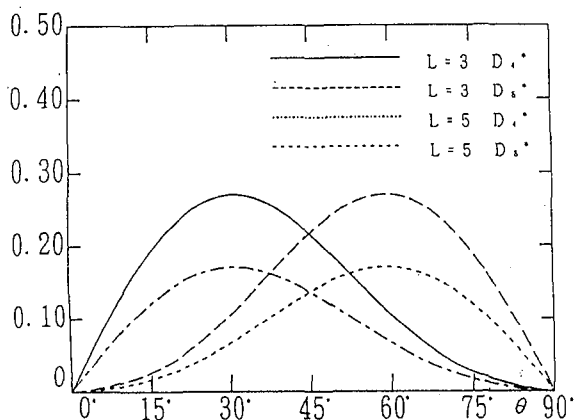


Fig. 2 Coupling bending rigidities.

ができる。

(2) 動的安定解析

一定面内力 N_{x0} の代わりに変動面内力 $N_{x0} + N_{x1} \cos \Omega t$ が作用する場合を考える。

面内力のなす仕事 $U(w)$ は、

$$U(w) = \frac{1}{2} (N_{x0} + N_{x1} \cos \Omega t) \iint_A \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dA \quad (7)$$

ここに、 N_{x0} : 静的面内力、 N_{x1} : 変動面内力の振幅、 Ω : 変動面内力の円振動数

たわみを次式のように仮定する。

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_{mn}(t) W_{mn}(x, y) \quad (8)$$

ここに、 $\bar{T}_{mn}(t)$: 時間に関する未知の関数、

$W_{mn}(x, y)$: 幾何学的境界条件を満足する座標関数で、固有振動解析で得られた固有振動形を用いる。

運動方程式を誘導するために Hamilton の原理を適用する。すなわち、

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \{ T - (V - U) \} dt = 0 \quad (9)$$

ここに、 $\delta \bar{T}_{mn}(t_1) = \delta \bar{T}_{mn}(t_2) = 0$

式(9)の変分を行い、 $\delta w(x, y, t)$ が任意の大きさであることから時間に関する運動方程式が得られる。次いで時間および面内力を無次元化しまとめると、

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\bar{A}_{mn}^{kl} \ddot{\bar{T}}_{mn} + \left\{ \frac{1}{\lambda^0 v_1^4} \bar{B}_{mn}^{kl} - \frac{\lambda^0 b}{\lambda^0 v_1^4} \right\} \right. \\ \left. (\bar{N}_{x0} + \bar{N}_{x1} \cos \bar{\omega} \tau) \bar{C}_{mn}^{kl} \bar{T}_{mn} \right] = 0 \quad (10)$$

ここに、 $\tau = \omega_{11}^0 t$ 、 $\bar{\omega} = \Omega / \omega_{11}^0$ 、 $\bar{N}_{x0} = N_{x0} / N_{cr}$ 、 $\bar{N}_{x1} = N_{x1} / N_{cr}$ 、 $\lambda^0 b = N_{cr} b^2 / D_1^0$ 、 N_{cr} : 座屈面内力、 $\lambda^0 v_1^4 = \rho h b^4 \omega_1^2 / D_1^0$: $\theta = 0^\circ$ の 1 次の振動固有値、 ω_{11}^0 : $\theta = 0^\circ$ の 1 次の固有円振動数。

式(10)を行列表示すると次式が得られる。

$$[A] \{\ddot{T}\} + [B] \{T\} + (\bar{N}_{x0} + \bar{N}_{x1} \cos \bar{\omega} \tau) [C] \{T\} = \{0\} \quad (11)$$

ここに、 $\{T\} = \{\bar{T}_{11} \bar{T}_{12} \cdots \bar{T}_{1k} \bar{T}_{21} \bar{T}_{22} \cdots \bar{T}_{2k} \cdots \bar{T}_{kk}\}^T$

$[A]$: $A\{j+(i-1)k, n+(m-1)k\} = \bar{A}^{ij}_{mn}$ 、

$[B]$: $B\{j+(i-1)k, n+(m-1)k\} = \bar{B}^{ij}_{mn} / \lambda^0 v_1^4$

$$[C]: C\{j+(i-1)k, n+(m-1)k\} = -\bar{C}^{ij}_{mn} \lambda^0 b / \lambda^0 v_1^4 \\ (i, j, m, n = 1, \dots, k)$$

$\bar{A}^{ij}_{mn}$ 、 $\bar{B}^{ij}_{mn}$ 、 $\bar{C}^{ij}_{mn}$ (Appendix C 参照)

$[A]$ および $[B]$ は対角行列となるが、不安定領域の性質を表す係数励振行列 $[C]$ は一般に対角行列とはならない。しかし、積層角 θ および境界条件によっては行列要素 $C\{j+(i-1)k, n+(m-1)k\}$ が零となるものがある。このような場合行列を並べ替えることによって行列の分割ができ、式(11)の自由度を減らして計算することが可能である。

式(11)は連立の Mathieu の方程式であり、その一般解を次式のように仮定する⁵⁾。

$$\{T\} = \exp(\lambda \tau) \left[\frac{1}{2} b_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \{ a_p \sin(p \bar{\omega} \tau) + b_p \cos(p \bar{\omega} \tau) \} \right] \quad (12)$$

ここに、 λ : 未定係数、 b_0 、 a_p 、 b_p : 未知のベクトル

式(12)を式(11)に代入して、調和バランス法を適用することにより 2 倍サイズの固有値問題に変換して系の安定の判別を行う。

$$\begin{bmatrix} [0] & [I] \\ [M_2]^{-1}[M_0] & -[M_2]^{-1}[M_1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \quad (13)$$

ここに、

$$\{Y\} = \lambda \{X\}, \{X\} = \{b_0 \ b_1 \ b_2 \cdots a_1 \ a_2 \cdots\}^T,$$

$[M_0]$ 、 $[M_1]$ 、 $[M_2]$: 係数行列

式(13)は、非対称行列の固有値問題の基礎式である。つまり、与えられた加振振動数 $\bar{\omega}$ と変動面内力の振幅 $\bar{N}_{x1}$ の組み合わせに対して、得られた固有値 λ の値がすべて負ならば一般解中の $\exp(\lambda \tau)$ が時間とともに収束するため安定、逆に一つでも正ならば発散してしまうために、不安定であるという条件から安定性が評価される。

3. 材料定数および曲げ剛性

本研究では、比較的異方性の度合いが小さい EGLASS/EP と異方性の度合いが大きい GRAPHITE/EP および BORON/EP の 3 種類の材料を使用し解析を行う。各材料定数の値は、Table 1 に示す文献¹⁾で使用されている値を用いる。

Table 2 は、Table 1 で示した 3 種類の材料を、中央面対称に 3 層積層した板の曲げ剛性を文献⁸⁾の計算式を用い求めたものである。各材料とも、繊維の傾き $\theta = 0^\circ$ の時の曲げ剛性 D_{11} (Appendix B 参照) で無次元化している。

4. 固有振動特性

本研究では、積層数 $L=3$ 、 $L=5$ および $L=\infty$ ($D_4^*=D_5^*=0$, カップリング無視) の積層板について数値計算を行う。Fig. 2 に材料 GRAPHITE/EP の $L=3$ および $L=5$ の

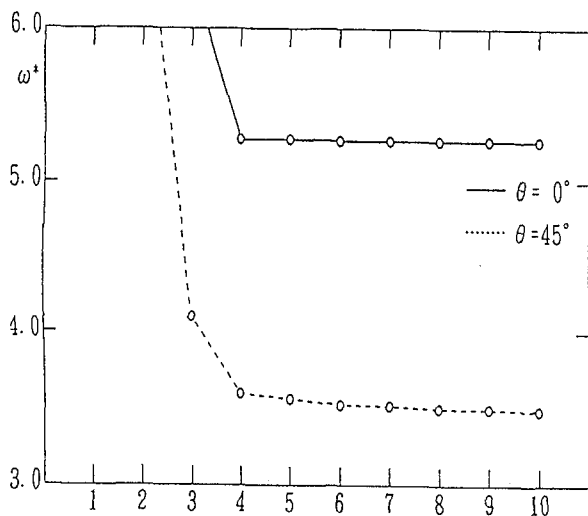


Fig. 3 Convergence of frequency : L=3 GRAPHITE/EP and 4th mode.

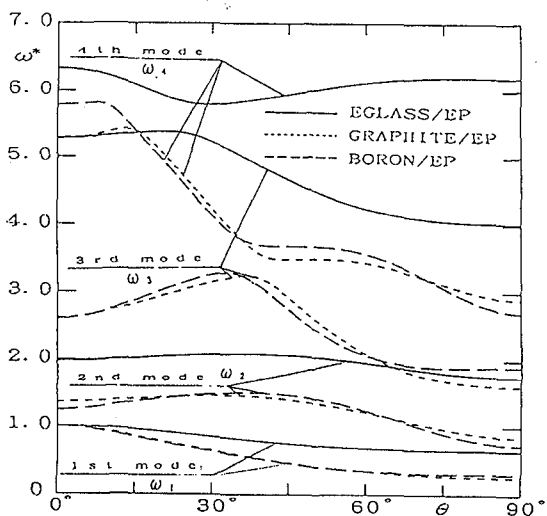


Fig. 4 Natural frequencies of laminated plate with fiber angle θ : L=3 and CASE V.

積層角の変化による曲げねじりカップリングの変化を示す。 D_4^* は積層角 $\theta=60^\circ$ 付近で最大となり、 D_5^* は積層角 $\theta=30^\circ$ 付近で最大となる。また、積層数の増加によりカップリングの影響は小さくなり、積層数 l が十分に大きい場合は、カップリングを無視した場合に相当する。

(a) 収束状況

Fig. 3 に、各種の境界条件および材料の組合せの中で最も収束性の悪いCASE V、 $L=3$ の材料GRAPHITE/EP、積層角($\theta=0^\circ$ 、 $\theta=45^\circ$)の4次振動の固有振動数の収束状況を示す。縦軸には、板剛度 D_{11} の等方性板の1次の固有振動数で無次元化した無次元固有振動数 ω^* 、横軸には一般解の級数項 K をとり、10項までの解の収束性を調べた。積層角 $\theta=0^\circ$ の解が $\theta=45^\circ$ よりも収束性はよい。積層角 θ が存在する場合は収束性はやや悪くなるが、項数が3～4項で収束する。よって、本研究では、計算精度および計算時間を考慮し、10項近似解を採用し

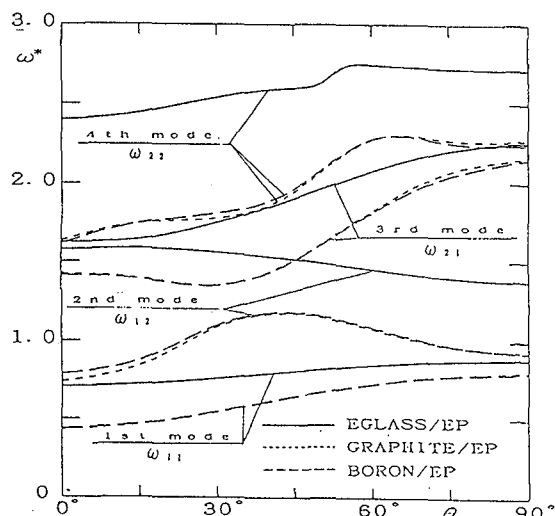


Fig. 5 Natural frequencies of laminated plate with fiber angle θ : L=5 and CASE II.

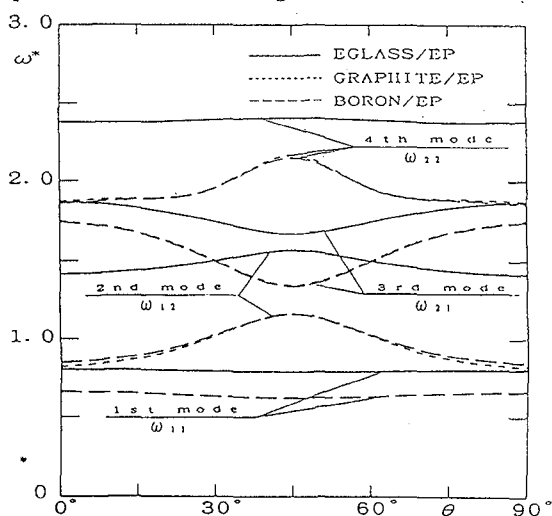


Fig. 6 Natural frequencies of laminated plate with fiber angle θ : L=5 and CASE IV.

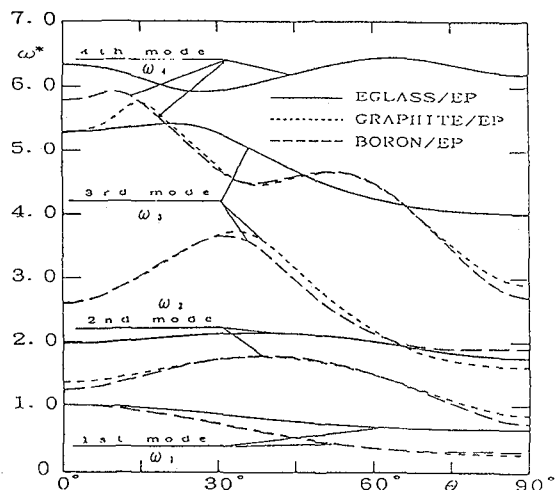


Fig. 7 Natural frequencies of laminated plate with fiber angle θ : L=5 and CASE V.

た計算を行う。

(b) 異方性の影響

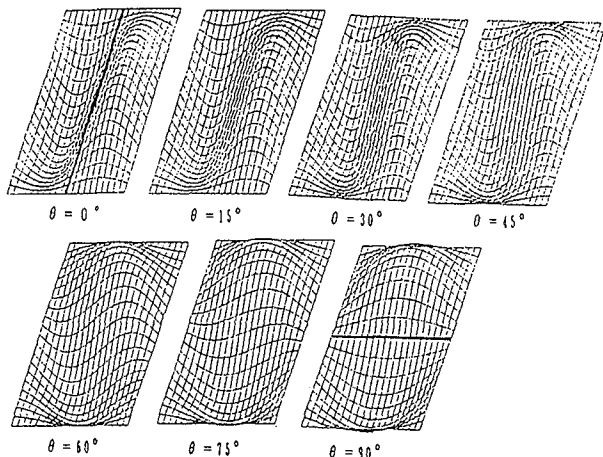


Fig. 8 Vibration modes of laminated composite plate : $L=3$, GRAPHITE/EP and CASE I.

Fig. 4～7に、 $L=3$ をもつCASE Vおよび $L=5$ をもつCASE II、CASE IV、CASE Vの正方形板の1次から4次の固有振動曲線を示す。図中の縦軸 ω^* は、板剛度 D_{11} の等方性板の1次の固有振動数で無次元化した無次元固有振動数、横軸 θ は積層角である。次数の下に記してある ω_{ij} の i, j の値は、それぞれ $\theta=0^\circ$ の時の x 軸方向、 y 軸方向の半波数である。CASE Vは、半波数による表示ができないため、低い次数から ω_i ($i=1, 2, 3, \dots$)と表す。

各境界条件とも異方性が大きいGRAPHITE/EP、BORON/EPが異方性が比較的小さいEGLASS/EPよりも固有振動数は小さい。これは、振動数の無次元化を各境界条件、各材料の積層角 $\theta=0^\circ$ の繊維方向の板剛度 D_{11} の等方性板で行うためである。

(c) 積層数の影響

Fig. 4とFig. 7に示す $L=3$ および $L=5$ をもつCASE Vを比較すると、積層数の多い $L=5$ が積層角の変化による固有振動数の変動は大きい。これは、積層数が増えると、曲げねじりカップリングの影響が小さくなるためである。

(d) 積層角の影響

全ての境界条件で、積層数が多く異方性が大きい材料は、積層角の変化による固有振動数の変動が大きい。この変動は、CASE Vが最も顕著であるが、積層数や境界条件の影響よりも次数の違いにより、変動に差が表われる。CASE I～CASE IVは積層角の変化により x 軸方向の半波数と y 軸方向の半波数が異なる振動数で変動が大きく、CASE Vは高次の振動数で変動が大きい。

また、Table 2に示すように繊維の傾き $\theta=45^\circ$ を対称にして x 軸方向の板剛度 D_{11} と y 軸方向の板剛度 D_{22} およびカップリング曲げ剛性の D_{16} と D_{26} が入れ替わる。このため、各境界条件とも $\theta=45^\circ$ 付近で固有振動形の遷移がある。Fig. 8に材料GRAPHITE/EPの $L=3$ をもつCASE Iの振動モードを示す。積層角 $\theta=0^\circ$ では($M=2, N=1$)のモードであるが、積層角の変化により振動形が変化し $\theta=90^\circ$ では($M=2, N=1$)になる。このように、CASE I～CASE IVは、 x 軸方向の半波数 i と y 軸方向の半

波数 j が遷移する。CASE Vでは、このような遷移の特徴は見られず、振動数の近いもの同士で遷移することを確認している。

(e) 境界条件の影響

Fig. 5に示すCASE IIの繊維角を $\theta=90^\circ$ から $\theta=0^\circ$ に書き替えるとCASE IIIの固有振動曲線となる。CASE IおよびFig. 6に示すCASE IVは、全周辺の支持の拘束条件が同じであるため、積層角の変化による固有振動数の変動は $\theta=45^\circ$ で対称となる。また、Fig. 4とFig. 7に示すCASE Vは、積層角 $\theta=30^\circ \sim 45^\circ$ の間で固有振動数の変動が著しい。

5. 座屈特性

Fig. 9～12に、 $L=3$ のEGLASS/EPを持つCASE II、CASE III、CASE Vおよび、 $L=3$ のGRAPHITE/EPを持つCASE IIIの座屈曲線を示す。図中の縦軸には座屈固有値 λ 、横軸には縦横比 β をとる。CASE I～CASE IVの M, N はそれぞれ x 軸方向、 y 軸方向の半波数の数を表す。CASE Vは座屈波形が片持ばりの場合とよく似た形となり半波数による表示はできない。

(a) 異方性の影響

境界条件が同じFig. 10とFig. 11により異方性の影響を示す。強い繊維方向の板剛度を基準に無次元化を行うため、異方性の大きな材料は、異方性の小さい材料よりも座屈固有値は小さい。これは、Table 1に示す(E_2/E_1)の値が小さいほど顕著である。

(b) 積層数の影響

積層数の影響については、図面では示していないが、異方性の大小、境界条件に無関係に積層数の増加により座屈固有値が大きくなることを確認している。

(c) 積層角の影響

CASE I～CASE IVは x 軸に平行な辺に拘束をもち、積層角 $\theta=45^\circ$ 付近で座屈固有値は最大値を示す。しかし、Fig. 12に示すCASE Vは、 x 軸に平行な辺に拘束がないため、 $\theta=0^\circ$ で、座屈固有値は最大値を示し、積層角を増大すると減少する。また、CASE I～CASE IVは、 β に対して特定の座屈波数($M=1, 2, 3, \dots, N=1$)を持つ。この波数 M は積層角が大きくなると増加する。これは、異方性が大きい材料で、 x 軸に平行な辺が固定のCASE II、CASE IVにおいて顕著である。CASE Vは、縦横比が増大しても座屈波形は片持ちばりの場合と同様な波形となり、 β の増大と共に単調に減少する。

(d) 境界条件の影響

積層板の境界条件の違いによる座屈特性は、等方性板と同じである。全周辺固定のCASE IVの座屈固有値が最も大きく、CASE Vが最も小さい。単純支持と固定端の組合せからなるCASE IIとCASE IIIでは、周辺支持の拘束条件は同じだが、 x 軸と平行な辺の拘束が大きいCASE IIの座屈固有値が大きい。

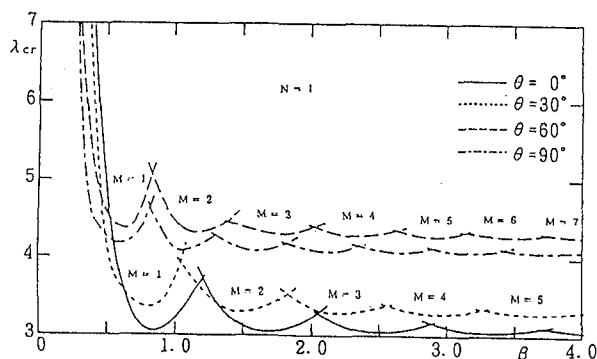


Fig. 9 Buckling curves of laminated composite plate : L=3, EGLASS/EP and CASE II.

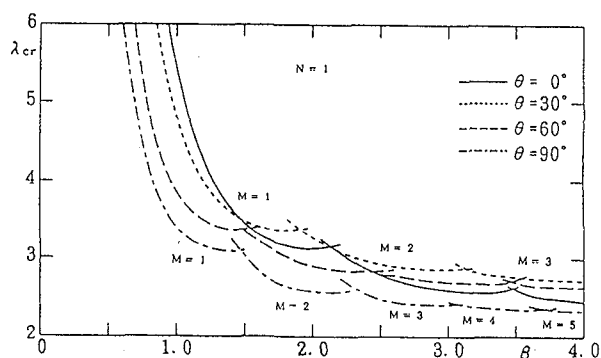


Fig. 10 Buckling curves of laminated composite plate : L=3, EGLASS/EP and CASE III.

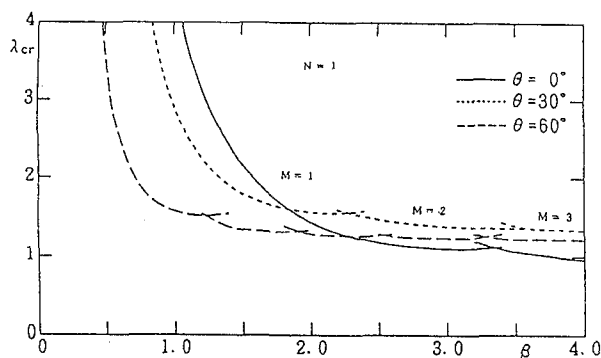


Fig. 11 Buckling curves of laminated composite plate : L=3, GRAPHITE/EP and CASE III.

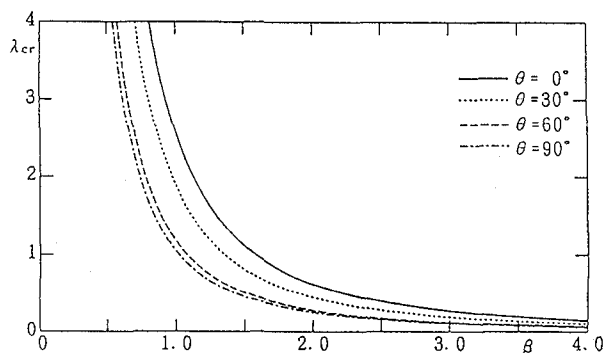


Fig. 12 Buckling curves of laminated composite plate : L=3, EGLASS/EP and CASE V.

Table 3 Division of parametric excitation matrix.

	Division of matrix		combination resonance	
	$\theta = 0^\circ$	$\theta \neq 0^\circ$	$\theta = 0^\circ$	$\theta \neq 0^\circ$
CASE I	16 [1 × 1]	2 [8 × 8]	無	有
CASE II	16 [1 × 1]	2 [8 × 8]	無	有
CASE III	4 [4 × 4]	2 [8 × 8]	有	有
CASE IV	4 [4 × 4]	2 [8 × 8]	有	有
CASE V	2 [8 × 8]	1 [16 × 16]	有	有

Boundary condition	Angle θ	Matrix [C]	Number of division
CASE I	Zero	Diagonal matrix	16
CASE II		$C_{ij} = 0$ ($i \neq j$)	
CASE III	Zero	$\begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix}$ [C _{ij}]	4
CASE IV		4×4	
CASE I ~ IV	Arbitrary	$\begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix}$ [C _{ij}]	2
CASE V	Zero	8×8	
CASE V	Arbitrary	$C_{ij} \neq 0$	1

6. 動的安定解析

(a) 行列の分割

本研究では $k=4$ を用いて数値計算を行う。この場合、係数励振行列[C]は 16×16 次の正方行列となる。Table 3 に示すようにに積層角 $\theta = 0^\circ$ のCASE I, CASE IIは係数励振行列が対角行列となる。 $\theta = 0^\circ$ のCASE III, CASE IVは対角行列とならないが、行列要素の4分の3に零要素が含まれるため、行列要素を入れ替えることで $[4 \times 4]$ の4つの小行列に分割できる。また、 $\theta = 0^\circ$ のCASE Vおよび $\theta \neq 0^\circ$ のCASE I ~ CASE IVは、行列要素の半分に零要素であるため $[8 \times 8]$ の2つの小行列に分割できる。この場合、小行列は行列要素 C_{ij} の $i+j$ が偶数の小行列と、奇数の小行列に分割できる。 $\theta \neq 0^\circ$ のCASE Vは、行列要素に全く零要素が含まれないため、小行列に分割できない。

(b) 不安定領域の種類

Fig. 13 ~ 15に、材料GRAPHITE/EPの $L=3$ をもつCASE I ($\theta = 0^\circ$, $\theta = 30^\circ$)および、材料EGLASS/EPの $L=3$ をもつCASE IV ($\theta = 0^\circ$)の正方形板の変動面内力の振幅を変化させたときの動的不安定領域を示す。縦軸 N_{cr} は、変動面内力を各材料の $\theta = 0^\circ$ 、の座屈面内力 N_{cr} で無次元化した無次元変動面内力、横軸 ω は励振振動数を各境界条件の $\theta = 0^\circ$ の1次の固有振動数で無次元化した無次元励振振動数である。図中では、右上がりの斜線部が単純共振、右下がりの斜線部が結合共振を意味する。ここで、単純共振 $2\omega_{ij}/q$ ($q=1, 2, \dots$)と結合共振($\omega_{ij} +$

$\omega_{m,n}/q (q=1, 2, \dots)$ のうち $q=1$ を主不安定領域, $q \geq 2$ を副不安定領域と呼ぶ⁵⁾。本研究では、無次元変動面内力の振幅 N_{x1} が 0.5 のときに、不安定領域の幅が 0.1 以下のものは無視している。このため、不安定領域の幅が広い $q=1$ の主不安定領域のみプロットされ、 $q \geq 2$ の副不安定領域は非常に狭いためプロットされていない。これは、一様に分布する面内力 $N_{x1} \cos \Omega t$ を受ける長方形板の動的不安定領域の特徴で、積層板特有の性質ではない。

Fig. 13 に示す荷重対辺が単純支持の CASE I および CASE II は、積層角 $\theta = 0^\circ$ では、係数励振行列が対角行列となり 1 自由度に変換できる。このため、単純共振による動的不安定領域しか現われない。しかし、係数励振行列が対角行列とならない CASE I および CASE II の $\theta = 0^\circ$ 以外では、Fig. 14 および Fig. 15 に示すよう結合共振による動的不安定領域が発生する。この結合共振による動的不安定領域は、Table 3 に示す零でない小行列内の要素の組合せの種類だけ発生する^{9) 10)}。このため、行列の分割数が少ないほど、結合共振の組合せは多い。CASE I ~ CASE IV は、 $\theta \neq 0^\circ$ で係数励振行列が 2 つの非零要素からなる小行列に分割でき、 $\omega_{ij} + \omega_{kl} (i \neq k \text{ かつ } j \neq l \text{ は除く})$ の形で発生する。CASE V は、 $\theta \neq 0^\circ$ で行列の分割ができないため、すべての組合せの結合共振が発生する。しかし、固有振動数が離れている結合共振は単純共振の不安定領域に比べ非常に狭い。このため、 $N_{x1} = 0.5$ において、結合共振による不安定領域は無視されるほど狭く、特定の接近した固有振動形をもつ結合共振が広い幅をもつ。

(c) 積層角の影響

Fig. 16 ~ 21 に、材料 EGLASS/EP の $L=3$ をもつ CASE V、材料 GRAPHITE/EP の ($L=3, L=5, L=\infty$) をもつ CASE V、材料 GRAPHITE/EP の $L=3$ をもつ CASE II および材料 EGLASS/EP の $L=5$ をもつ CASE IV を用いた正方形板の繊維の傾きの変化による動的不安定領域の変動を示す。縦軸 $\bar{\omega}$ は励振振動数を $\theta = 0^\circ$ の 1 次の固有振動数で無次元化した無次元励振振動数、横軸 θ は積層角である。変動面内力の振幅には、積層角が $\theta = 0^\circ$ における $N_{x1} = 0.5$ の値を用いる。図中の $2\omega_{ij}$ において、 x 軸方向の半波数 i が y 軸方向の半波数 j よりも大きい動的不安定領域は広く、逆に y 軸方向の半波数 j が x 軸方向の半波数 i よりも大きい動的不安定領域は狭い。結合共振による不安定領域は、全ての境界条件において、積層角 $\theta = 45^\circ$ 付近で最も広くなる。

(d) 異方性の影響

Fig. 16 と Fig. 17 により異方性の影響を示す。異方性の大きな材料は、小さい材料に比べ、積層角の変化による方向の半波数が遷移する。このため半波数の大小が逆転し、動的不安定領域の幅が大きく変化する。CASE V は、CASE I ~ CASE IV のような固有振動形の遷移の特徴は見られないが、積層角が大きくなると動的不安定領域が広がる次数が多く見られる。

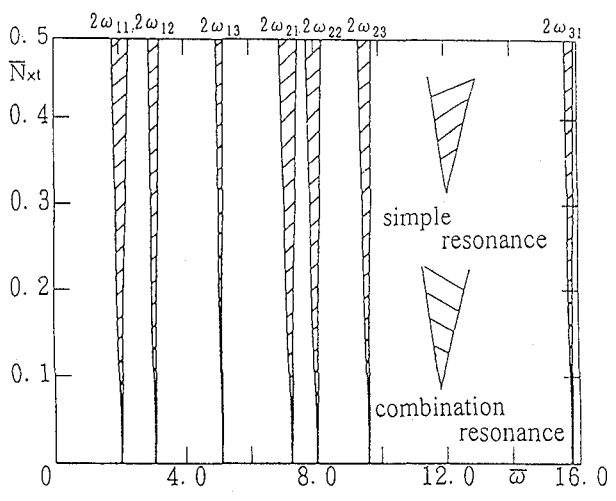


Fig. 13 Dynamic unstable regions : $L=3$ GRAPHITE/EP, CASE I and $\theta=0^\circ$.

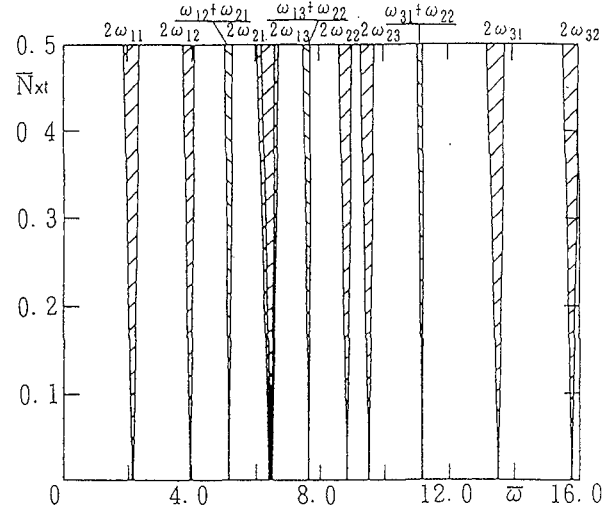


Fig. 14 Dynamic unstable regions : $L=3$ GRAPHITE/EP, CASE I and $\theta=30^\circ$.

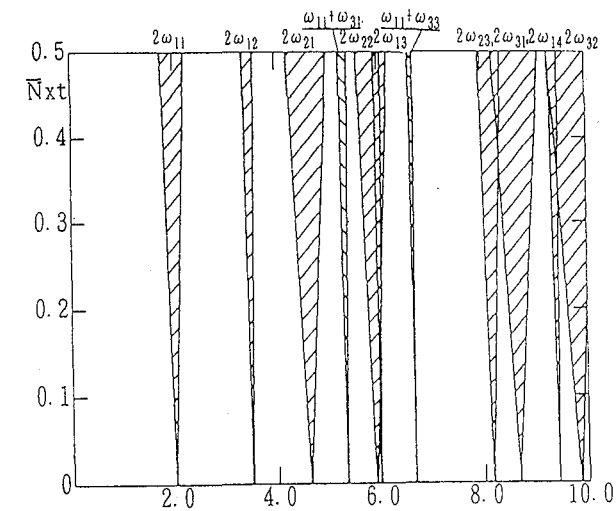


Fig. 15 Dynamic unstable regions : $L=3$ EGLASS/EP, CASE V and $\theta=0^\circ$.

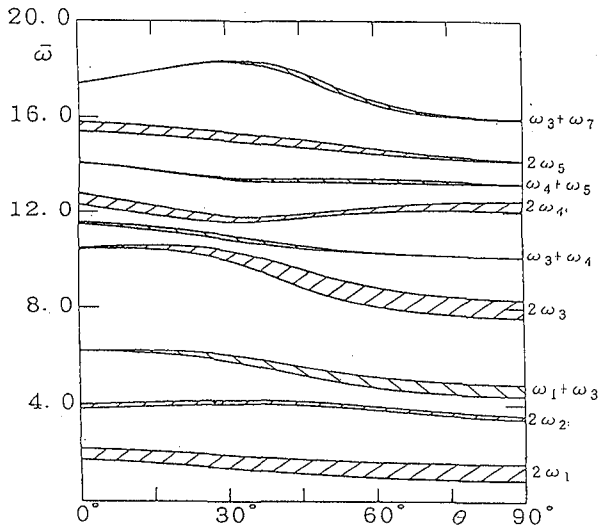


Fig. 16 Dynamic unstable regions with various fiber angle θ : $\beta=1.0$, CASEV, $L=3$ and EGLASS/EP.

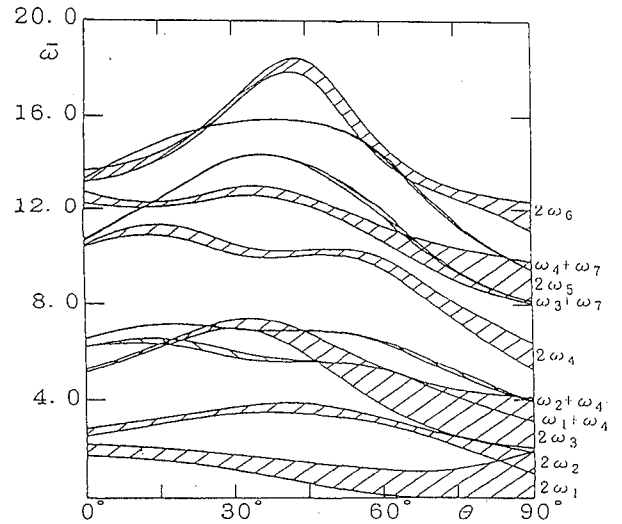


Fig. 19 Dynamic unstable regions with various fiber angle θ : $\beta=1.0$, CASEV, $L=\infty$ and GRAPHITE/EP.

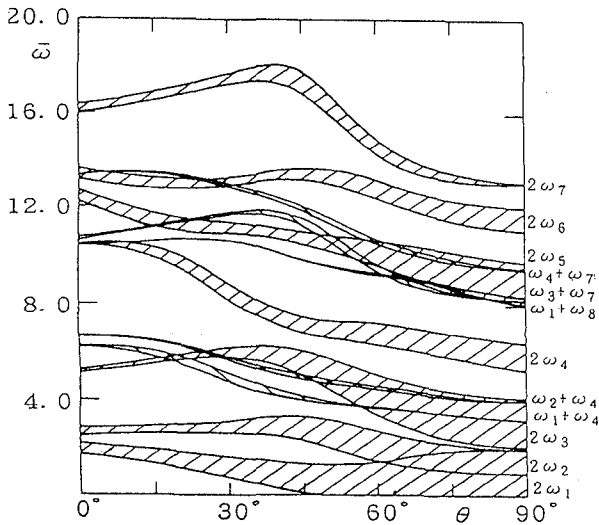


Fig. 17 Dynamic unstable regions with various fiber angle θ : $\beta=1.0$, CASEV, $L=3$ and GRAPHITE/EP.

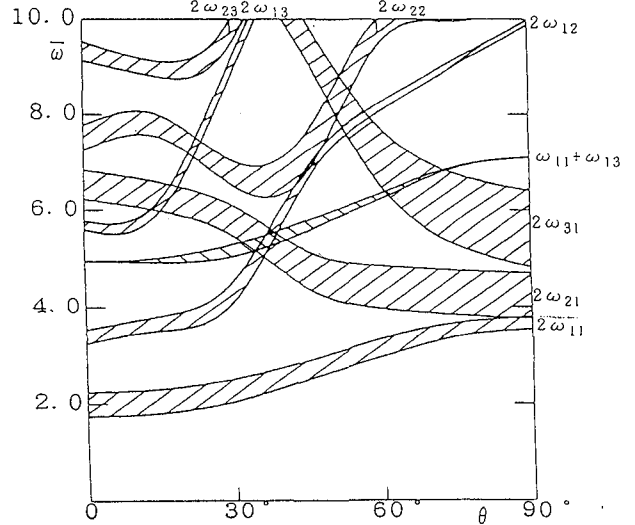


Fig. 20 Dynamic unstable regions with various fiber angle θ : $\beta=1.0$, CASEV, $L=3$ and GRAPHITE/EP.

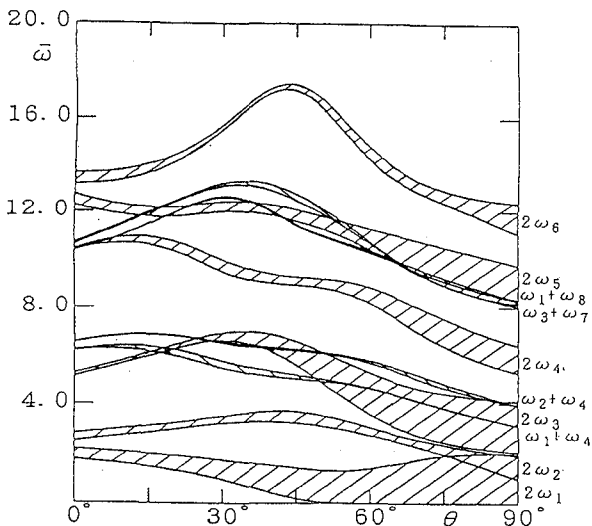


Fig. 18 Dynamic unstable regions with various fiber angle θ : $\beta=1.0$, CASEV, $L=5$ and GRAPHITE/EP.

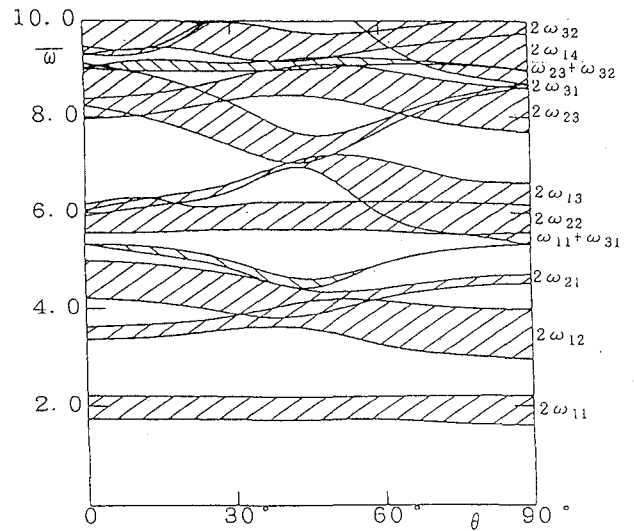


Fig. 21 Dynamic unstable regions with various fiber angle θ : $\beta=1.0$, CASEV, $L=3$ and EGLASS/EP.

7. 結論

本論文では、異方性の異なる3種類の材料を用い、中央対称に積層した長方形板を対象に5つの異なる境界条件について固有振動特性、座屈特性および動的安定特性を明らかにした。

(1) 全ての境界条件において、積層数が多く異方性の大きな材料は、積層角の変化による固有振動数の変動が大きい。また、振動数の無次元化を各材料の等方性板の1次の固有振動数で行う場合には、異方性の大きな材料ほど固有振動数は小さい。

(2) 積層角の変化により振動形が遷移する固有振動が表われる。片持ち板においては、振動数の近いもの同士で遷移し、他の境界条件においては、各軸方向の半波数が入れ替わる。

(3) 片持ち板以外の境界条件は、縦横比が増大すると、座屈荷重に平行な辺の半波数が増加し、この半波数ごとに極値をもつ。波数の増加は、積層角が大きいほど顕著である。片持ち板の座屈曲線は、縦横比の増大と共に単調に減少する。

(4) 異方性の大きな材料は積層角の変化による動的不安定領域の変動が著しい。

(5) 積層数の増加により積層角の変化による動的不安定領域の変動は著しく大きい。

(6) 積層角の変化により、振動形が遷移する次数は、動的不安定領域の幅が大きく変化する。

(7) 積層角の変化により、全ての境界条件に結合共振による動的不安定領域が発生する。幅の広い不安定領域を持つものは固有振動数が近いものに限られ、積層角45°付近で最も広がる。

なお、数値計算には、長崎大学総合情報処理センターのVP-1200を使用したことを付記する。

参考文献

- 1) 福田: 異方性の積極利用(I), 日本複合材料学会誌, 14-1, pp. 20-25, 1988.
- 2) 一ノ宮・成田・丸山: FRP積層された片持ち長方形板の定常応答, 日本機械学会論文集(C編), 56-532, pp. 1897-1902, 1989.8.
- 3) 松本・鈴木: 対称積層構造材の振動特性解析法の研究, 日本機械学会論文集(C編), 56-532, pp. 7-13, 1990.12.
- 4) C.W. Bert and V. Birman: Dynamic Instability of Shear Deformable Antisymmetric Angle-ply Plates, Int. J. Solids Struct., Vol. 23, No. 7, pp. 1053-1061, 1987.
- 5) Takahashi, K.: Instability of Parametric Dynamic Systems with Non-uniform Damping, Journal of Sound and Vibration, Vol. 85, pp. 257-262, 1982.
- 6) 江島・横山・高橋・夏秋: 対称積層長方形板の動的安定

性, 構造工学論文集, Vol. 39A, pp. 13-21, 1993.

7) 林: 軽構造の理論とその応用(上), 日本科学技術連盟, pp. 134-141, 1966.

8) 福田・野村・武田: 複合材料の構造力学, 日刊工業新聞社, pp. 23-105, 1987.

9) Hsu, C.H.: On the Parametric Excitation of Dynamic systems Having Multiple Degrees of Freedom, Journal of Applied Mechanics, Vol. 30, pp. 367-372, 1963.

10) Hsu, C.H.: Further Results on Parametric Excitation of a Dynamic System, Journal of Applied Mechanics, Vol. 32, pp. 373-377, 1965.

Appendix A 幾何学的境界条件を満足する座標関数

$$h_m(\xi) = \sin m\pi\xi \quad (\text{CASE I, II})$$

$$h_m(\xi) = \{\cos(M-1)\pi\xi - \cos(M+1)\pi\xi\} \quad (\text{CASE III, IV})$$

$$h_m(\xi) = \cos \lambda_{ma}\xi - \cosh \lambda_{ma}\xi + \alpha_m(\sin \lambda_{ma}\xi - \sinh \lambda_{ma}\xi) \quad (\text{CASE V})$$

$$\bar{h}_n(\eta) = \sin N\pi\eta \quad (\text{CASE I, III})$$

$$\bar{h}_n(\eta) = \{\cos(N-1)\pi\eta - \cos(N+1)\pi\eta\} \quad (\text{CASE II, IV})$$

$$\bar{h}_1(\eta) = 1 \quad \bar{h}_2(\eta) = \sqrt{3}(1-2\eta)$$

$$\bar{h}_n(\eta) = \cosh \mu_{nb}\eta + \cos \mu_{nb}\eta - \beta_n(\sinh \mu_{nb}\eta + \sin \mu_{nb}\eta) \quad (n \geq 3) \quad (\text{CASE V})$$

$$\alpha_m = \frac{\sin \lambda_{ma} - \sinh \lambda_{ma}}{\cos \lambda_{ma} + \cosh \lambda_{ma}} \quad \beta_n = \frac{\cosh \mu_{nb} - \cos \mu_{nb}}{\sinh \mu_{nb} - \sin \mu_{nb}}$$

Appendix B 振動、座屈解析の定積分 E_{MRNS} , F_{MRNS} , G_{MRNS}

$$E_{MRNS} = \frac{D_1^*}{\beta^4} I^{22}_{MR} I^{00}_{NS} + \frac{D_3^*}{\beta^2} \{I^{02}_{MR} I^{20}_{NS} + I^{20}_{MR} I^{02}_{NS}\} + D_2^* I^{00}_{MR} I^{22}_{NS} + 2 \frac{D_4^*}{\beta^3} \{I^{12}_{MR} I^{10}_{NS} + I^{21}_{MR} I^{01}_{NS}\} + 2 \frac{D_5^*}{\beta} \{I^{10}_{MR} I^{12}_{NS} + I^{01}_{MR} I^{21}_{NS}\} + 4 \frac{D_6^*}{\beta^2} I^{11}_{MR} I^{11}_{NS}$$

$$F_{MRNS} = I^{00}_{MR} I^{00}_{NS}, \quad \lambda^4 = \rho h \omega^2 \frac{b^4}{D_1^0}$$

$$G_{MRNS} = \frac{1}{\beta^2} I^{11}_{MR} I^{00}_{NS}, \quad \lambda_{cr} = N_x \frac{b^2}{D_1^0}$$

$$(M, N, R, S = 1, 2, \dots, K)$$

$I^{00}_{MR}, I^{00}_{NS}, \dots : h_m, h_r, \bar{h}_n, \bar{h}_s$ およびその微分からなる定積分

ここに、 $\xi = x/a, \eta = y/b, \beta = a/b$ (縦横比)、 $D_1^* =$

$$D_{11}/D_1^0, D_2^* = D_{22}/D_1^0, D_3^* = D_{12}/D_1^0, D_4^* =$$

$$D_{16}/D_1^0, D_5^* = D_{26}/D_1^0, D_6^* = D_{66}/D_1^0$$

$$I^{00}_{MR} = \int_0^1 h_m h_r d\xi, \quad I^{01}_{MR} = \int_0^1 h_m h_{1r} d\xi,$$

$$I^{02}_{MR} = \int_0^1 h_m h_{2r} d\xi, \quad I^{10}_{MR} = \int_0^1 h_1 h_r d\xi,$$

$$\begin{aligned}
I^{11}_{MR} &= f_0^i h_{1M} h_{1R} d\xi, & I^{12}_{MR} &= f_0^i h_{1M} h_{2R} d\xi, \\
I^{20}_{MR} &= f_0^i h_{2M} h_{1R} d\xi, & I^{21}_{MR} &= f_0^i h_{2M} h_{2R} d\xi, \\
I^{22}_{MR} &= f_0^i h_{2M} h_{2R} d\xi \\
I^{00}_{NS} &= f_0^i \bar{h}_N \bar{h}_S d\xi, & I^{01}_{NS} &= f_0^i \bar{h}_N \bar{h}_{1S} d\xi, \\
I^{02}_{NS} &= f_0^i \bar{h}_N \bar{h}_{2S} d\xi, & I^{10}_{NS} &= f_0^i \bar{h}_{1N} \bar{h}_S d\xi, \\
I^{11}_{NS} &= f_0^i \bar{h}_{1N} \bar{h}_{1S} d\xi, & I^{12}_{NS} &= f_0^i \bar{h}_{1N} \bar{h}_{2S} d\xi, \\
I^{20}_{NS} &= f_0^i \bar{h}_{2N} \bar{h}_S d\xi, & I^{21}_{NS} &= f_0^i \bar{h}_{2N} \bar{h}_{1S} d\xi, \\
I^{22}_{NS} &= f_0^i \bar{h}_{2N} \bar{h}_{2S} d\xi
\end{aligned}$$

h_{1M} 、 h_{2M} 、 h_M の1回、2回微分

$\bar{h}_{1N}$ 、 $\bar{h}_{2N}$ 、 $\bar{h}_N$ の1回、2回微分

Appendix C 動的安定解析の定積分 $\overline{A}_{mn}^{kl}$, $\overline{B}_{mn}^{kl}$, $\overline{C}_{mn}^{kl}$

$$\overline{A}_{mn}^{kl} = f_0^i f_0^l W_{mn} W_{kl} d\xi d\eta$$

$$\overline{B}_{mn}^{kl} = f_0^i f_0^l \left\{ \frac{D_1^*}{\beta^4} W_{mn, \xi\xi} W_{kl, \xi\xi} + D_2^* W_{mn, \eta\eta} W_{kl, \eta\eta} \right.$$

$$+ \frac{D_3^*}{\beta^2} \{ W_{mn, \xi\xi} W_{kl, \eta\eta} + W_{mn, \eta\eta} W_{kl, \xi\xi} \}$$

$$+ 2 \frac{D_4^*}{\beta^3} \{ W_{mn, \xi\xi} W_{kl, \xi\eta} + W_{mn, \xi\eta} W_{kl, \xi\xi} \}$$

$$+ 2 \frac{D_5^*}{\beta} \{ W_{mn, \eta\eta} W_{kl, \xi\eta} + W_{mn, \xi\eta} W_{kl, \eta\eta} \}$$

$$+ 4 \frac{D_6^*}{\beta^2} W_{mn, \xi\eta} W_{kl, \xi\eta} \} d\xi d\eta$$

$$\overline{C}_{mn}^{kl} = f_0^i f_0^l \frac{1}{\beta^2} W_{mn, \xi} W_{kl, \xi} d\xi d\eta$$

ここに、

$$W_{mn} = \sum_{i=1} \sum_{j=1} a_{ij}^{mn} h_m(\xi) \bar{h}_n(\eta)$$

$$W_{mn, \xi\xi} = \sum_{i=1} \sum_{j=1} a_{ij}^{mn} h_{2m}(\xi) \bar{h}_n(\eta)$$

$$W_{mn, \eta\eta} = \sum_{i=1} \sum_{j=1} a_{ij}^{mn} h_m(\xi) \bar{h}_{2n}(\eta)$$

$$W_{mn, \xi\eta} = \sum_{i=1} \sum_{j=1} a_{ij}^{mn} h_{1m}(\xi) \bar{h}_{1n}(\eta)$$

$$W_{mn, \xi} = \sum_{i=1} \sum_{j=1} a_{ij}^{mn} h_{1m}(\xi) \bar{h}_n(\eta)$$

$$W_{kl, \xi\xi} = \sum_{i=1} \sum_{j=1} a_{ij}^{kl} h_{2k}(\xi) \bar{h}_l(\eta)$$

$$W_{kl, \eta\eta} = \sum_{i=1} \sum_{j=1} a_{ij}^{kl} h_k(\xi) \bar{h}_{2l}(\eta)$$

$$W_{kl, \xi\eta} = \sum_{i=1} \sum_{j=1} a_{ij}^{kl} h_{1k}(\xi) \bar{h}_{1l}(\eta)$$

$$W_{kl, \xi} = \sum_{i=1} \sum_{j=1} a_{ij}^{kl} h_{1k}(\xi) \bar{h}_l(\eta)$$

(1994年9月14日受付)