

菱形板の曲げについて

ON BENDING OF RHOMBIC PLATES

小林 治俊^{*}, 石川 一美^{**}, GEOFFREY JOHN TURVEY^{***}

Harutoshi KOBAYASHI, Kazumi ISHIKAWA and Geoffrey John TURVEY

^{*} 工博 大阪市立大学助教授 工学部土木工学科 (〒558 大阪市住吉区杉本3-3-138)^{**} RAD コンストラクション (〒553 大阪市福島区福島1-5-16 第2中島ビル)^{***} Ph.D. Senior Lecturer, Engineering Department, Lancaster University
(Bailrigg, Lancaster LA1 4YR, U.K.)

An analytical method is developed for the bending response of rhombic plates by using trigonometric series obtained from the governing differential equation represented in the skew coordinates. Two different boundary conditions are considered, i.e., all edges clamped and all edges simply supported. Convergency properties of the present series solution and comparison of present results with other analytical results including Morley's one using a corner function are shown in detail. Present series solution can represent the singularities of bending moments at the obtuse corner pointed out by Williams.

Key Words: rhombic plate, bending, series solution, corner singularity

1. はじめに

斜板は、橋梁スラブに代表されるように種々な工学的目的に用いられている基本的な構造要素である。従来その基礎方程式は複雑で解析的に解くことが難しいとされ、差分法やエネルギー法などの近似解法により解が求められており、現在では有限要素法による解析が多いようである。

斜板は斜角の増大とともに鈍角部での曲げモーメントの集中性が顕著になるため、斜角の増大に伴い解析精度の低下が生じ、各種の近似解に相当なバラツキのあることがよく知られている。このような近似解の精度の確認には、コーナー関数を用いた Morley [1-3] の解やフーリエ級数法による Iyengar ら [4] の解析解をベンチマークにすることが多い。特に Morley は単純支持菱形板に対し Williams [5] が理論的に指摘した鈍角部において曲げモーメントが集中する特異性をコーナー関数を用いた解析により示しており、この特異性を表現できるかどうかは斜板の解法のよしあしを判断する一つの基準と言える。有限要素法による解析においてもこの特異性の表現が難点であり、良好な結果を得ているものとして著者らの知る限りでは、Morley の変分原理 [6] に基づく Rossow [7] の解析などわずしか見当たらないが、要素開発の際には shear locking test とともにこの特異

性を議論することが通例である [例えば、文献 8, 9]。また、エネルギー法による解析においてもコーナー部での境界条件の規定に特別の配慮を行っている [10]。

ところで斜板の基礎式に基づく級数解析は矩形板に比較するときわめて少ない。すなわち、Lardy [11] が初めて単純支持板への適用を示し、Krettnner [12], Quinlan [13] なども級数解の取り扱い方を示したが、数値計算は行っていない。級数解を広範に数値計算したものとしては前述の Iyengar らの研究がある。しかし、彼らは斜角の変化に伴う板中央のたわみ、曲げモーメントなどを算出しているが、Morley が示した鈍角部における曲げモーメントの集中性を示していないし、級数解の収束性についても十分に言及しているとは言えない。

斜板の級数解析は無限連立方程式を解くことに帰着されるが、解の収束性や性質を確かめベンチマークに耐えることのできる数値解を求めておくことは現在においても意味あることと考えられる。本研究では、四辺固定、四辺単純支持の菱形板を対象に級数解を用いた結果を既存の種々な解析解との精度の比較を行うとともに曲げモーメントの特異性（集中性）について検討する。

2. 級数解

本文では菱形板を対象としているが、解析手順は斜板

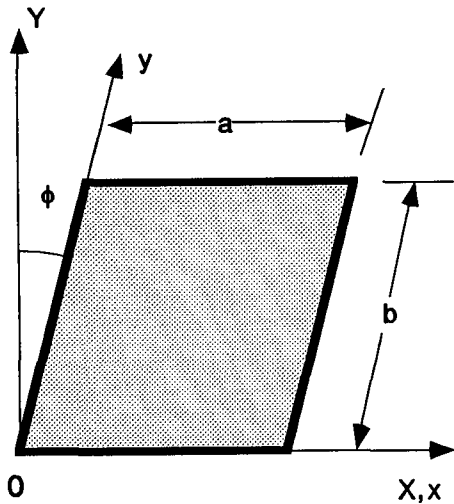


図-1 斜板の座標系

一般に適用出来る。図1は斜板の座標系であり、斜角 ϕ の関数として $c=\cos\phi$, $s=\sin\phi$ と置き、直角座標系 (X, Y) での諸式を斜交座標系 (x, y) で表す。たわみ w の基礎式は、 D , ν , q をそれぞれ板の曲げ剛性、ポアソン比、荷重強度として次のように表される。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 4s \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(1+2s^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - 4s \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = c^4 \frac{q}{D} \quad (1)$$

曲げモーメント、ねじりモーメントは、

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{D}{c^2} \left[(c^2 + \nu s^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\nu s \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ M_y &= -\frac{D}{c^2} \left[(\nu c^2 + s^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2s \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ M_{xy} &= -\frac{D(1-\nu)}{c} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \quad (2a, b, c)$$

つぎに境界条件は、固定、単純支持条件に対して次のように規定できる。

$x=0, a$ において、

$$\text{固定: } w = \partial w / \partial x - s \partial w / \partial y = 0 \quad (3a)$$

$$\text{単純支持: } w = \Delta w = 0 \quad (3b)$$

$y=0, b$ において、

$$\text{固定: } w = \partial w / \partial y - s \partial w / \partial x = 0 \quad (4a)$$

$$\text{単純支持: } w = \Delta w = 0 \quad (4b)$$

ここに、 Δ は斜交座標系でのラプラシアンである：

$$\Delta = \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2s \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \quad (5)$$

以下、本文では $w(a-x, b-y)=w(x, y)$ となる斜交対称の場合を取り扱うので、上の境界条件は四辺で満たす必

要はなく、 $x=0, y=0$ の二辺で満足させればよい。

さて基礎式(1)の解を求めるため、まず特解 w_p を次の二重級数で表す。

$$w_p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} [A_{mn} \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) + B_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y)] \quad (6)$$

ここで、 $\alpha_m = (2m-1)\pi/a$, $\beta_n = (2n-1)\pi/b$ であり、 q_{mn} は次式より求められる荷重展開係数である。

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y)$$

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) dx dy \quad (7a, b)$$

係数 A_{mn} , B_{mn} は式(6),(7)を式(1)へ代入して次のように決まる。

$$A_{mn} = \frac{-4s \alpha_m \beta_n (\alpha_m^2 + \beta_n^2)}{[(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 - 4s^2 \alpha_m^2 \beta_n^2]^2} \frac{c^4}{D} \quad (8a)$$

$$B_{mn} = \frac{[(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 + 4s^2 \alpha_m^2 \beta_n^2]}{[(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 - 4s^2 \alpha_m^2 \beta_n^2]^2} \frac{c^4}{D} \quad (8b)$$

得られた係数 A_{mn} , B_{mn} を代入した式(6)の二重級数は、後の数値計算を考慮して、収束の早い次の単級数に直しておく[12, 13]：

$$w_p(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [\Theta_n(x) \cos(\beta_n y) + \Psi_n(x) \sin(\beta_n y)]$$

または、

$$w_p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} [\Theta_m^*(y) \cos(\alpha_m x) + \Psi_m^*(y) \sin(\alpha_m x)] \quad (9a, b)$$

上式中の x または y の関数 $\Theta_n(x)$, $\Psi_n(x)$, $\Theta_m^*(y)$, $\Psi_m^*(y)$ の具体的表示式を、等分布荷重の場合について付録(A1)に示す。

つぎに式(1)の同次解 w_h も斜交対称性を有するものを採用し、 $x^*=x-(a/2)$, $y^*=y-(b/2)$ とおけば、次のように求められる。

$$\begin{aligned} w_h(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \{ & [A_m \text{Ch}(\alpha_m c y^*) + B_m y^* \text{Sh}(\alpha_m c y^*)] \\ & \times \cos[\alpha_m (s y^* + x^*)] \\ & + [C_m \text{Sh}(\alpha_m c y^*) + D_m y^* \text{Ch}(\alpha_m c y^*)] \\ & \times \sin[\alpha_m (s y^* + x^*)] \} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \{ & [E_n \text{Ch}(\beta_n c x^*) + F_n x^* \text{Sh}(\beta_n c x^*)] \\ & \times \cos[\beta_n (s x^* + y^*)] \\ & + [G_n \text{Sh}(\beta_n c x^*) + H_n x^* \text{Ch}(\beta_n c x^*)] \\ & \times \sin[\beta_n (s x^* + y^*)] \} \end{aligned} \quad (10)$$

ただし、 $\text{Ch}(x)=\cosh(x)$, $\text{Sh}(x)=\sinh(x)$ である。

たわみ w の一般解は $w=w_p+w_h$ で与えられるので、まず式(9),(10)を式(3),(4)の境界条件式に代入して整理する。その際式(9a),(9b)の特解はそれぞれ x

=一定, y =一定の境界条件式に適用する. つぎに, 含まれる非周期関数を特解の表示式に対応して $\cos(\alpha_m x)$, $\sin(\alpha_m x)$, $\cos(\beta_n y)$, $\sin(\beta_n y)$ などのフーリエ級数に展開すれば, 各境界条件より未定係数 $A_m, B_m, \dots, G_n, H_n$ に関する2組の条件式を導くことができ, 都合8組の無限連立方程式を得る. ここではその詳細を省略し, 結果のみを付録(A2)に記載する. 得られた無限連立方程式を $4(m+n)$ 元の連立方程式として解くが, m, n を変化させ, たわみ等の数値解の収束を確かめながら解を確定する.

3. 数値計算結果

ここでは等分布荷重(荷重強度 q_0)を受ける四辺固定および四辺単純支持の菱形板($a=b$)について数値計算を行い, Iyengar ら[4]の級数解を含む他の解析解との比較を行う. なお, ポアソン比は $\nu=0.3$ とし, 級数は $m=n$ として計算した. たわみ, 曲げモーメントなどは特に断わらないかぎり, 次の無次元量 w^*, M_1^*, M_2^*, M_n^* を用いる.

$$w=w^*10^{-3}\times q_0a^4/D$$

$(M_1, M_2, M_n) = (M_1^*, M_2^*, M_n^*) 10^{-2}\times q_0a^2$
ただし, M_1, M_2 は主モーメント, M_n は固定辺モーメントである.

(1) 級数の収束性

斜角 ϕ が $15^\circ, 45^\circ, 75^\circ$ の場合について, 板中央での級数の収束状況を表1に示している. 斜角が増大すれば収束は遅くなり, $\phi=15^\circ, 45^\circ$ では固定板の場合が単純支持板の場合よりわずかに収束が速いようである. しかし, 有効数字3桁程度を得るには, 斜角が極端に大きくない限り $m=n=5\sim10$ で収束値が得られるものと判断してよい. なお, $\phi=0^\circ$ の場合は正方形板であり, ここでは示さないが既存の厳密解と一致した結果を得た.

(2) 固定菱形板

表2に固定菱形板に対する本解と他の解析解との比較を示しており, 最初に板の中央点の諸量について検討する. Iyengar ら[4]の結果は, 本解と同じ級数解で $m=n=6$ とした値である. 本解とわずかに違っているが, これは特解を二重級数のまま計算した結果によるものと考えられる. また Iyengar らは文献[14]では, たわみ

表-1 級数の収束状況(板中央)

Skew angle ϕ	$m=n$	Clamped rhombic plate			Simply supported rhombic plate		
		w^*	M_1^*	M_2^*	w^*	M_1^*	M_2^*
15°	3	1.1230	2.2797	2.0216	3.6380	4.7970	4.2604
	4	1.1229	2.2798	2.0215	3.6376	4.7972	4.2599
	5	—	—	—	3.6374	—	4.2596
	10	—	—	—	3.6373	—	4.2594
	15	—	—	—	—	—	—
45°	5	0.37700	1.4441	0.97561	1.3176	3.2269	2.1907
	10	0.37687	1.4442	0.97514	1.3172	—	2.1899
	15	0.37686	—	0.97511	1.3172	—	2.1898
	20	—	—	0.97510	1.3172	—	2.1898
	25	—	—	—	1.3171	—	2.1898
	30	—	—	—	—	—	2.1898
	35	—	—	—	—	—	2.1898
	40	—	—	—	—	—	2.1897
	45	—	—	—	—	—	—
	50	—	—	—	—	—	—
75°	5	0.0094436	0.24412	0.11071	0.039313	0.63334	0.28307
	10	0.0093389	0.24322	0.10844	0.039291	0.63276	0.28344
	15	0.0093249	0.24317	0.10807	0.039287	0.63277	0.28338
	20	0.0093208	0.24315	0.10797	0.039285	—	0.28336
	25	0.0093191	0.24314	0.10793	0.039284	—	0.28335
	30	0.0093182	0.24314	0.10791	0.039284	—	0.28335
	35	0.0093177	0.24313	0.10790	0.039284	—	0.28335
	40	0.0093174	—	0.10790	0.039284	—	0.28334
	45	0.0093173	—	0.10789	0.039284	—	—
	50	0.0093171	—	0.10789	0.039284	—	—
	55	0.0093170	—	0.10789	0.039284	—	—
	60	0.0093170	—	0.10788	0.039283	—	—

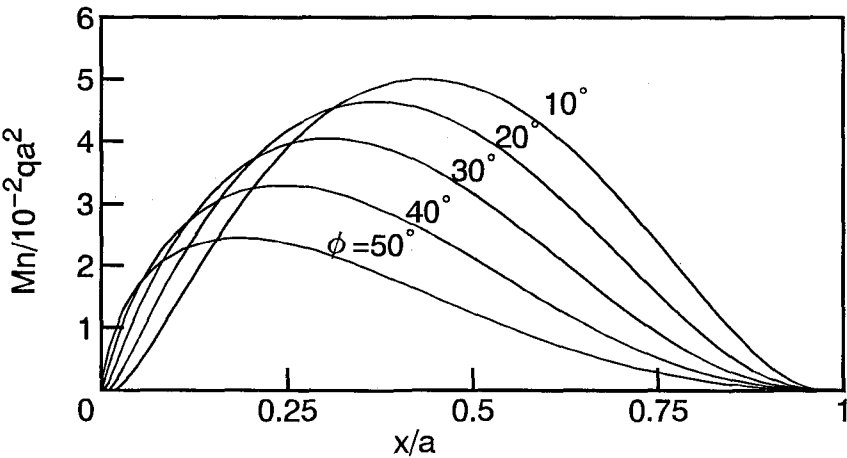
式に両端固定の梁の固有関数（振動モード関数）から成る二重級数を用いて板の周辺条件を満足させるとともに基礎式に Galerkin 法を適用した解を得ているが、この場合は斜角が増大すれば精度が悪くなるようである。

Morley [3] は、固定板も単純支持板同様に合モーメ

ントとたわみに関する独立した二つの 2 階偏微分方程式に帰着できる変分原理[6] を開発し、これを本問題に適用している。表中、method 1 は合モーメント表示式の支配式からの解であり、method 2 はコーナー関数を用いた結果であるが双方はよく一致しており、本解とも良

表－2 固定菱形板の解の比較

Skew angle ϕ	Reference	Values at centre			Max. edge moment M_n^*	Distance from obtuse corner
		w^*	M_1^*	M_2^*		
15°	Present	1.1229	2.2798	2.0215	-4.8515	0.402
	Iyengar et al. [4]	1.1231	2.279	2.021	-4.838	—
	Iyengar et al. [14]	1.1230	2.292	2.033	-4.7488	0.4
	Morley [3] method 1	1.123	2.280	2.021	-4.85	0.40
	Kale et al. [15]	1.1230	—	—	—	—
30°	Present	0.76900	1.9786	1.5440	-4.0540	0.305
	Iyengar et al. [4]	0.7694	1.978	1.544	-4.108	—
	Iyengar et al. [14]	0.7687	1.972	1.544	-4.0024	0.31
	Morley [3] method 1	0.769	1.979	1.544	-4.06	0.31
	method 2	0.770	1.979	1.542	-4.07	0.30
	Kale et al. [15]	0.76927	—	—	—	—
45°	Present	0.37686	1.4442	0.97510	-2.8854	0.214
	Iyengar et al. [4]	0.3769	1.444	0.9750	-2.870	—
	Iyengar et al. [14]	0.3761	1.431	0.9723	-2.9883	0.2
	Morley [3] method 1	0.377	1.444	0.976	-2.98	0.20
	method 2	0.377	1.444	0.976	-2.90	0.21
	Kale et al. [15]	0.38276	—	—	—	—
60°	Present	0.10823	0.80292	0.45389	-1.5847	0.128
	Iyengar et al. [4]	0.1081	0.8028	0.4548	-1.628	—
	Iyengar et al. [14]	0.1073	0.7915	0.4498	-1.783	—
	Kale et al. [15]	0.12189	—	—	—	—
75°	Present	0.0093170	0.24313	0.10789	-0.48237	0.0599
	Iyengar et al. [14]	0.00902	—	—	—	—
	Kale et al. [15]	0.011687	—	—	—	—



図－2 固定菱形板の固定辺上の曲げモーメント分布

好な一致が見られる。最後に Kale ら[15] の値は、基礎式の同次式から得られる固有関数と荷重展開に用いる梁の固有関数との組合せによる解であるが、斜角の増大と共に精度が悪くなっている。

つぎに固定辺モーメント M_0 の精度を検討すると、表より最大値については板中央での結果と同様なことが言える。図 2 は固定辺モーメントの分布で、斜角 ϕ を $10^\circ \sim 50^\circ$ の範囲で 10° 毎に変化させて描いたものである。Morley [3] は前述の method 1, method 2 の双方にて $\phi = 30^\circ, 45^\circ$ に対する結果を示しており、最大値およびそれが起こる位置は本結果とほとんど同じとみなしてよいが、鋭角部でモーメントの分布曲線の乱れが見られる。岡村ら [16] は矩形板の級数解と選点法を組み合わせた方法により $\phi = 45^\circ$ の場合を、また Warren [17] はコーナー関数と選点法により $\phi = 60^\circ$ の場合のモーメント分布を示しており、コーナー部を含めて本解と同様な結果を得ている。したがって、滑らかな分布曲線である本結果は正しいモーメント分布を示しているものと考えられる。

(3) 単純支持菱形板

数値解の比較を表 3 に示している。Iyengar ら[4] の結果も級数解であるが、本解との違いは先の固定菱形板の場合と同様に用いた級数の項数の違いと特解に二重級数を用いたことによる結果と思われる。Morley の数値はコーナー関数と最小自乗法の組み合わせによるもので

あり、本解とよく一致している。また Sampath ら [18] もコーナー関数を用いているが、Morley の結果とはわずかに違いが認められる。ただし、Sampath らの数値は Rajaiah らの文献 [19] より引用したため詳細は不明である。その Rajaiah らは等角写像を用いた数値を示しているが、本解と最もよく一致した結果を示している。

さて、斜板の鈍角部で交差する二つの境界辺が、単純支持-単純支持、単純支持-自由、固定-単純支持、固定-自由の場合には、鈍角がある角度以上になれば鈍角部に曲げモーメントの特異性(集中性)が生じることが理論的に Williams [5] により指摘されている。これによれば単純支持板では鈍角が 90° 以上、すなわちどの単純支持斜板にも特異性が生じる。まえがきで述べたように、この特異性を表現できるかどうかは斜板の解法のよしあしを判断する一つの基準である。Morley [1] は $\phi = 60^\circ$ の場合の結果を示しており、この場合には鈍角部近傍において $r^{4/5}$ の特異性を持ち、鈍角部で曲げモーメントは発散する。ただし、 r は鈍角部からの距離。図 3 は、斜角が $\phi = 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ$ である場合の菱形板の短軸上の曲げモーメント分布である。 $\phi = 60^\circ$ の場合の分布曲線で点線によるものは、級数の項数を $m=n=10$ とした結果であり、実線による他の分布曲線は、 $m(=n) \geq 30$ とした結果である。なお比較のため Morley の解を白丸と黒丸で示している。図よりわかるように級数の項数が少ない場合、板の中央部分では収束値が得られているが、鈍角部に近づくにつれて正解との差が大き

表-3 単純支持菱形板の解の比較

Skew angle ϕ	Reference	Values at centre		
		w^*	M_1^*	M_2^*
10°	Present	3.8691	4.8561	4.4879
	Iyengar et al. [4]	3.875	4.858	4.495
	Morley [1]	3.87	4.86	4.48
	Sampath et al. [18]	3.877	4.858	4.497
	Rajaiah et al. [19]	3.869	4.856	4.488
30°	Present	2.5601	4.2534	3.3291
	Iyengar et al. [4]	2.596	4.283	3.383
	Morley [1]	2.56	4.25	3.33
	Sampath et al. [18]	2.563	4.284	3.342
	Rajaiah et al. [19]	2.560	4.253	3.329
45°	Present	1.3171	3.2269	2.1897
	Iyengar et al. [4]	1.361	3.288	2.282
	Sampath et al. [18]	1.327	3.230	2.210
	Rajaiah et al. [19]	1.317	3.226	2.190
60°	Present	0.40785	1.9062	1.0857
	Morley [1]	0.408	1.91	1.08
	Sampath et al. [18]	0.4114	1.908	1.099
	Rajaiah et al. [19]	0.4077	1.905	1.086
75°	Present	0.039284	0.63277	0.28334

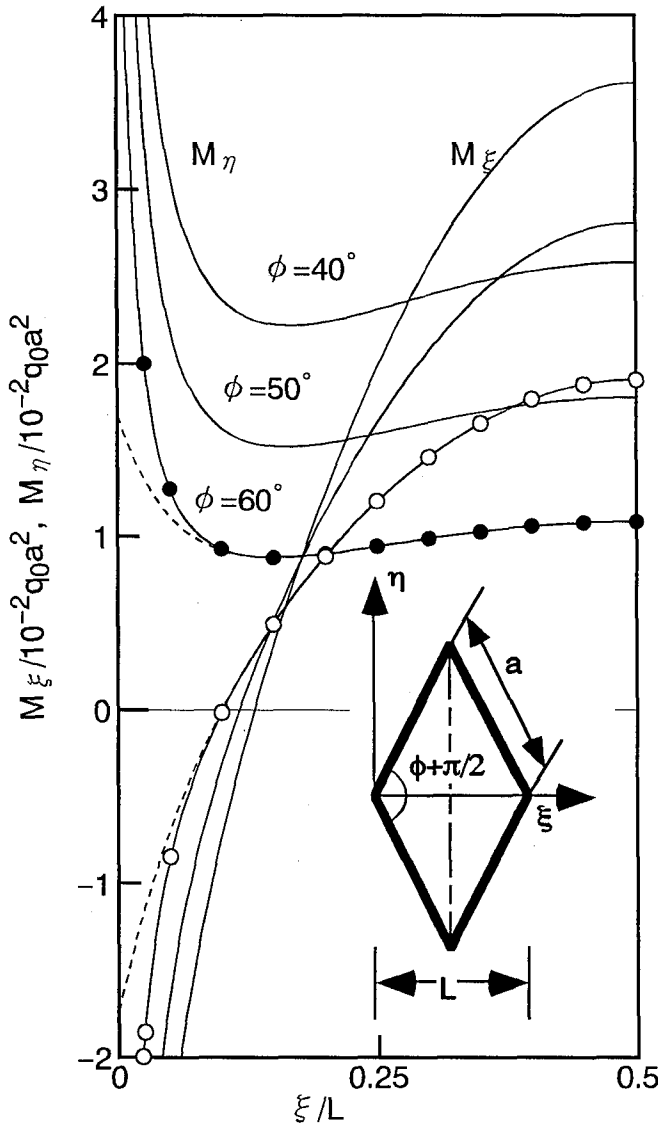


図-3 単純支持菱形板のモーメント分布(----: $m=10$,
—: $m \geq 30$; ○, ●: Morley [1])

くなり、鈍角部での曲げモーメントは有限値に留まる。しかし、項数を増やすにしたがって発散する傾向を示すようになる。本解は図示したいずれの斜角に対しても鈍角部のごく近傍を除いては収束結果を得た。図は鈍角部近傍において曲げモーメントが集中・発散する特異性を示しており、したがって鈍角部では理論的に曲げモーメントは発散するが、本解は鈍角部のごく近傍を除いては正しいモーメント分布を示しているものと推察できる。

4. むすび

本文は、これまで詳しく示されなかった斜板の級数解の収束性や精度を検討する目的で、四辺固定および四辺単純支持の菱形板に等分布荷重が作用する場合を種々な斜角に対して数値計算を行い、既存の級数解を含む種々な解析解との精度の比較を行い本級数解の正確さを示す

とともに、より精密な数値解を提示した。特に、理論的に Williams が指摘し、Morley がコーナー関数を用いて示した鈍角部での曲げモーメントの集中性は、これまで級数解では示されなかったが、本級数解でこれを表すことができることを示した。

以上のように本級数解析で提示した結果は、今後の菱形板の曲げ解析での有限要素法を含む種々な近似解法のベンチマークに供されるべきものと考えられる。

付録

A1. 関数 $\Theta_n(x)$, $\Psi_n(x)$, $\Theta_m^*(y)$, $\Psi_m^*(y)$

全面等分布荷重 q_0 に対する荷重展開係数は、

$$q_{mn} = 16q_0 / mn\pi^2 \quad (A1)$$

であり、これに対する式 (9a) の関数 $\Theta_n(x)$, $\Psi_n(x)$ は、次のように表すことができる [12].

$$\begin{aligned} \Theta_n(x) &= \frac{2q_0c}{Db\beta_n^5\theta_1} \left[\frac{c\beta_na(sK_3 - cL_3)}{\theta_1} \right. \\ &\quad \left. - c\beta_nx(sK_1 + cL_1) + 2c^3L_2 + s(1+2c^2)K_2 \right] \\ \Psi_n(x) &= \frac{2q_0c}{Db\beta_n^5\theta_1} \left[\frac{c\beta_na(cK_4 - sL_4)}{\theta_1} \right. \\ &\quad \left. + c\beta_nx(cK_2 - sL_2) - 2c^3K_1 + s(1+2c^2)L_1 + 2c^3\theta_1 \right] \end{aligned} \quad (A2)$$

ここに、 $K_i(x)$, $L_i(x)$, θ_i は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} K_1(x) &= \text{Ch}(c\beta_nx)\cos[s\beta_n(a-x)] \\ &\quad + \text{Ch}[c\beta_n(a-x)]\cos(s\beta_nx) \\ K_2(x) &= \text{Sh}(c\beta_nx)\cos[s\beta_n(a-x)] \\ &\quad - \text{Sh}[c\beta_n(a-x)]\cos(s\beta_nx) \\ K_3(x) &= \theta_2\text{Ch}(c\beta_nx)\cos(s\beta_nx) \\ &\quad + \text{Sh}(c\beta_na)\sin(s\beta_na)\text{Sh}(c\beta_nx)\sin(s\beta_nx) \\ K_4(x) &= -\theta_2\text{Sh}(c\beta_nx)\cos(s\beta_nx) \\ &\quad - \text{Sh}(c\beta_na)\sin(s\beta_na)\text{Ch}(c\beta_nx)\sin(s\beta_nx) \\ L_1(x) &= \text{Sh}(c\beta_nx)\sin[s\beta_n(a-x)] \\ &\quad + \text{Sh}[c\beta_n(a-x)]\sin(s\beta_nx) \\ L_2(x) &= \text{Ch}(c\beta_nx)\sin[s\beta_n(a-x)] \\ &\quad - \text{Ch}[c\beta_n(a-x)]\sin(s\beta_nx) \\ L_3(x) &= \theta_2\text{Sh}(c\beta_nx)\sin(s\beta_nx) \\ &\quad - \text{Sh}(c\beta_na)\sin(s\beta_na)\text{Ch}(c\beta_nx)\cos(s\beta_nx) \\ L_4(x) &= \theta_2\text{Ch}(c\beta_nx)\sin(s\beta_nx) \\ &\quad - \text{Sh}(c\beta_na)\sin(s\beta_na)\text{Sh}(c\beta_nx)\cos(s\beta_nx) \end{aligned}$$

$$\theta_1 = \text{Ch}(c\beta_na) + \cos(s\beta_na)$$

$$\theta_2 = \text{Ch}(c\beta_na)\cos(s\beta_na) + 1$$

(A3)

なお、式 (9b) の関数 $\Theta_m^*(y)$, $\Psi_m^*(y)$ は、上記諸量に

において (a, b, x, β_n) をそれぞれ (b, a, y, α_m) に置き換えることにより得ることができる。

A2. 境界条件式

(1) $w=0$ ($x=0$) より

$$[2E_n \text{Ch}(c\gamma_n) + F_n \text{Sh}(c\gamma_n)] \cos(s\gamma_n) + [2G_n \text{Sh}(c\gamma_n) + H_n \text{Ch}(c\gamma_n)] \sin(s\gamma_n) = 0 \quad (\text{A4a})$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} (4/\lambda) \sin(\delta_n) \sin(\varepsilon_m) (A_m \Phi_{1mn} + B_m \Phi_{2mn} \\ & \quad + C_m \Phi_{3mn} + D_m \Phi_{4mn}) \\ & - [2E_n \text{Ch}(c\gamma_n) + F_n \text{Sh}(c\gamma_n)] \sin(\delta_n) \sin(s\gamma_n) \\ & + [2G_n \text{Sh}(c\gamma_n) + H_n \text{Ch}(c\gamma_n)] \sin(\delta_n) \cos(s\gamma_n) \\ & = -4q_0 c (D\beta_n^5 \theta_1^2)^{-1} \{2c\gamma_n [sK_3(0) - cL_3(0)] \\ & \quad + \theta_1 [2c^3 L_2(0) + s(1+2c^2)K_2(0)]\} \end{aligned} \quad (\text{A4b})$$

(2) $\partial w / \partial x - s \partial w / \partial y = 0$ ($x=0$) より

$$\begin{aligned} & 2E_n c \gamma_n \text{Sh}(c\gamma_n) \sin(s\gamma_n) \\ & + F_n [\text{Sh}(c\gamma_n) + c\gamma_n \text{Ch}(c\gamma_n)] \sin(s\gamma_n) \\ & - 2G_n c \gamma_n \text{Ch}(c\gamma_n) \cos(s\gamma_n) \\ & - H_n [\text{Ch}(c\gamma_n) + c\gamma_n \text{Sh}(c\gamma_n)] \cos(s\gamma_n) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A5a})$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} (2/\lambda) \sin(\delta_n) \sin(\varepsilon_m) \times \\ & \quad \times \{2A_m c \varepsilon_m (c\Omega_{1mn} - s\Omega_{3mn}) \\ & \quad + B_m [2c \varepsilon_m (c\Omega_{2mn} - s\Omega_{4mn}) - s\Omega_{3mn}] \\ & \quad + 2C_m c \varepsilon_m (s\Omega_{1mn} + c\Omega_{3mn}) \\ & \quad + D_m [2c \varepsilon_m (s\Omega_{2mn} + c\Omega_{4mn}) + s\Omega_{1mn}]\} \\ & - \{2E_n c \gamma_n \text{Sh}(c\gamma_n) + F_n [\text{Sh}(c\gamma_n) + c\gamma_n \text{Ch}(c\gamma_n)]\} \\ & \quad \times \sin(\delta_n) \cos(s\gamma_n) \\ & - \{2G_n c \gamma_n \text{Ch}(c\gamma_n) + H_n [\text{Ch}(c\gamma_n) + c\gamma_n \text{Sh}(c\gamma_n)]\} \\ & \quad \times \sin(\delta_n) \sin(s\gamma_n) \\ & = 2q_0 c^3 (D\beta_n^4 \theta_1^2)^{-1} \{2\gamma_n [cK_3(0) + sL_3(0)] \\ & \quad - \theta_1 [2csL_2(0) + (1-2c^2)K_2(0)]\} \end{aligned} \quad (\text{A5b})$$

(3) $\Delta w = 0$ ($x=0$) より

$$F_n \text{Ch}(c\gamma_n) \cos(s\gamma_n) + H_n \text{Sh}(c\gamma_n) \sin(s\gamma_n) = 0 \quad (\text{A6a})$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} (2/\lambda) \sin(\delta_n) \varepsilon_m \sin(\varepsilon_m) (B_m \Phi_{1mn} + D_m \Phi_{3mn}) \\ & - \gamma_n \sin(\delta_n) [F_n \text{Ch}(c\gamma_n) \sin(s\gamma_n) \\ & \quad - H_n \text{Sh}(c\gamma_n) \cos(s\gamma_n)] \\ & = q_0 a c^2 (D\beta_n^3 \theta_1 \lambda)^{-1} [sK_2(0) + cL_2(0)] \end{aligned} \quad (\text{A6b})$$

(4) $w=0$ ($y=0$) より

$$[2A_m \text{Ch}(c\zeta_m) + B_m \lambda \text{Sh}(c\zeta_m)] \cos(s\zeta_m) + [2C_m \text{Sh}(c\zeta_m) + D_m \lambda \text{Ch}(c\zeta_m)] \sin(s\zeta_m) = 0 \quad (\text{A7a})$$

$$\begin{aligned} & - [2A_m \text{Ch}(c\zeta_m) + B_m \lambda \text{Sh}(c\zeta_m)] \sin(\varepsilon_m) \sin(s\zeta_m) \\ & + [2C_m \text{Sh}(c\zeta_m) + D_m \lambda \text{Ch}(c\zeta_m)] \sin(\varepsilon_m) \cos(s\zeta_m) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \sin(\varepsilon_m) \sin(\delta_n) (E_n \Phi_{1nm} + F_n \Phi_{2nm} \\ & \quad + G_n \Phi_{3nm} + H_n \Phi_{4nm}) \\ & = -4q_0 c (D\alpha_m^5 \theta_1^2)^{-1} \{2c\zeta_m [sK_3^*(0) - cL_3^*(0)] \\ & \quad + \theta_1^* [2c^3 L_2^*(0) + s(1+2c^2)K_2^*(0)]\} \end{aligned} \quad (\text{A7b})$$

(5) $\partial w / \partial y - s \partial w / \partial x = 0$ ($y=0$) より

$$\begin{aligned} & 2A_m (c\zeta_m / \lambda) \text{Sh}(c\zeta_m) \sin(s\zeta_m) \\ & + B_m [\text{Sh}(c\zeta_m) + c\zeta_m \text{Ch}(c\zeta_m)] \sin(s\zeta_m) \\ & - 2C_m (c\zeta_m / \lambda) \text{Ch}(c\zeta_m) \cos(s\zeta_m) \\ & - D_m [\text{Ch}(c\zeta_m) + c\zeta_m \text{Sh}(c\zeta_m)] \cos(s\zeta_m) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A8a})$$

$$\begin{aligned} & - \{2A_m (c\zeta_m / \lambda) \text{Sh}(c\zeta_m) \\ & \quad + B_m [\text{Sh}(c\zeta_m) + c\zeta_m \text{Ch}(c\zeta_m)]\} \times \sin(\varepsilon_m) \cos(s\zeta_m) \\ & - \{2C_m (c\zeta_m / \lambda) \text{Ch}(c\zeta_m) \\ & \quad + D_m [\text{Ch}(c\zeta_m) + c\zeta_m \text{Sh}(c\zeta_m)]\} \times \sin(\varepsilon_m) \sin(s\zeta_m) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \sin(\varepsilon_m) \sin(\delta_n) \times \\ & \quad \times \{2E_n c \gamma_n (c\Omega_{1nm} - s\Omega_{3nm}) \\ & \quad + F_n [2c \gamma_n (c\Omega_{2nm} - s\Omega_{4nm}) - s\Omega_{3nm}] \\ & \quad + 2G_n c \gamma_n (s\Omega_{1nm} + c\Omega_{3nm}) \\ & \quad + H_n [2c \gamma_n (s\Omega_{2nm} + c\Omega_{4nm}) + s\Omega_{1nm}]\} \\ & = 2q_0 c^3 (D\alpha_m^4 \theta_1^2)^{-1} \{2\zeta_m [cK_3^*(0) + sL_3^*(0)] \\ & \quad - \theta_1^* [2csL_2^*(0) + (1-2c^2)K_2^*(0)]\} \end{aligned} \quad (\text{A8b})$$

(6) $\Delta w = 0$ ($y=0$) より

$$B_m \text{Ch}(c\zeta_m) \cos(s\zeta_m) + D_m \text{Sh}(c\zeta_m) \sin(s\zeta_m) = 0 \quad (\text{A9a})$$

$$\begin{aligned} & - \varepsilon_m \sin(\varepsilon_m) [B_m \text{Ch}(c\zeta_m) \sin(s\zeta_m) \\ & \quad - D_m \text{Sh}(c\zeta_m) \cos(s\zeta_m)] \\ & \sum_{n=1}^{\infty} 2 \sin(\varepsilon_m) \gamma_n \sin(\delta_n) (F_n \Phi_{1nm} + H_n \Phi_{3nm}) \\ & = q_0 a c^2 (D\alpha_m^3 \theta_1^*)^{-1} [sK_2^*(0) + cL_2^*(0)] \end{aligned} \quad (\text{A9b})$$

以上において使用した記号の内容を以下に示す。

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \beta_n a / 2, \quad \delta_n = \beta_n b / 2, \\ \varepsilon_m &= \alpha_m a / 2, \quad \zeta_m = \alpha_m b / 2, \quad \lambda = b/a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_2(0) &= -\text{Sh}(2c\gamma_n) \\ K_3(0) &= \text{Ch}(2c\gamma_n) \cos(2s\gamma_n) + 1 \\ L_2(0) &= \sin(2s\gamma_n) \\ L_3(0) &= -\text{Sh}(2c\gamma_n) \sin(2s\gamma_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_2^*(0) &= -\text{Sh}(2c\zeta_m) \\ K_3^*(0) &= \text{Ch}(2c\zeta_m) \cos(2s\zeta_m) + 1 \\ L_2^*(0) &= \sin(2s\zeta_m) \\ L_3^*(0) &= -\text{Sh}(2c\zeta_m) \sin(2s\zeta_m) \\ \theta_1^* &= \text{Ch}(2c\zeta_m) + \cos(2s\zeta_m) \end{aligned}$$

$$\Omega_{1mn}, \Phi_{1mn} = I_1(P, Q) \pm I_1(P, Q')$$

$$\Omega_{2mn}, \Phi_{2mn} = I_2(P, Q) \pm I_2(P, Q')$$

$$\Omega_{3mn}, \Phi_{3mn} = I_3(P, Q) \pm I_3(P, Q')$$

$$\Omega_{4mn}, \Phi_{4mn} = I_4(P, Q) \pm I_4(P, Q')$$

$$\Omega_{1nm}^*, \Phi_{1nm}^* = I_1(R, S) \pm I_1(R, S')$$

$$\Omega_{2nm}^*, \Phi_{2nm}^* = I_2(R, S) \pm I_2(R, S')$$

$$\Omega_{3nm}^*, \Phi_{3nm}^* = I_3(R, S) \pm I_3(R, S')$$

$$\Omega_{4nm}^*, \Phi_{4nm}^* = I_4(R, S) \pm I_4(R, S')$$

$$P = c \zeta_m, Q, Q' = s \zeta_m \pm \delta_n$$

$$R = c \gamma_n, S, S' = s \gamma_n \pm \varepsilon_m$$

$$I_1(u, v) = \frac{\lambda}{2} \left[\frac{u \operatorname{Sh}(u) \cos(v) + v \operatorname{Ch}(u) \sin(v)}{u^2 + v^2} \right]$$

$$I_2(u, v) = \frac{\lambda^2}{4} \left[\frac{u \operatorname{Ch}(u) \cos(v) + v \operatorname{Sh}(u) \sin(v)}{u^2 + v^2} - \frac{(u^2 - v^2) \operatorname{Sh}(u) \cos(v) + 2uv \operatorname{Ch}(u) \sin(v)}{(u^2 + v^2)^2} \right]$$

$$I_3(u, v) = \frac{\lambda}{2} \left[\frac{u \operatorname{Ch}(u) \sin(v) - v \operatorname{Sh}(u) \cos(v)}{u^2 + v^2} \right]$$

$$I_4(u, v) = \frac{\lambda^2}{4} \left[\frac{u \operatorname{Sh}(u) \sin(v) - v \operatorname{Ch}(u) \cos(v)}{u^2 + v^2} - \frac{(u^2 - v^2) \operatorname{Ch}(u) \sin(v) - 2uv \operatorname{Sh}(u) \cos(v)}{(u^2 + v^2)^2} \right] \quad (A10)$$

ただし、 $\Phi_{1nm}^* \sim \Phi_{4nm}^*$, $\Omega_{1nm}^* \sim \Omega_{4nm}^*$ を算定する場合、 $I_1 \sim I_4$ において $\lambda = 1$ と置く。

参考文献

1. Morley, L. S. D. (1962) Bending of Simply Supported Rhombic Plate under Uniform Normal Loading, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **15**, 413-426.
2. Morley, L. S. D. (1963) *Skew Plates and Structures*, Pergamon Press, Oxford.
3. Morley, L. S. D. (1964) Bending of Clamped Rectilinear Plates, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **17**, 293-317.
4. Iyengar, K. T. Sundra Raja, et al. (1971) Some Studies on Skew Plates, *Aero. J.* **75**, 130-132.
5. Williams, M. L. (1961) Surface Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates under Bending, *Proc. 1st U.S. Nat. Cong. Appl. Mech.*,

pp. 325-329.

6. 小松定夫(1986)構造解析学Ⅲ－弾性連続体の解析－, 丸善, pp. 173-179.
7. Rossow, M. P. (1977) Efficient C⁰ Finite Element Solution of Simply Supported Plates of Polygonal Shape, *J. Appl. Mech.* **44**, 347-349.
8. Butalia, T. S., et al. (1990) Performance of Heterosis Element for Bending of Skew Rhombic Plates, *Comput. Struct.* **34**, 23-49.
9. Madenci, E. and Barut, A. (1994) A Free-Formulation-Based Flat Shell Element for Nonlinear Analysis of Thin Composite Structures, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **37**, 3825-3842.
10. Wang, C. M., et al. (1992) Buckling of Skew Plates and Corner Condition for Simply Supported Edges, *J. Engng. Mech.* **118**, 651-662.
11. Lardy, P. (1949) Die strenge Lösung des Problems der schiefwinkligen Platte, *Schweiz. Bauztg.* **67**, 207-209.
12. Krettner, J. (1954) Beitrag zur Berechnung schiefwinkligen Platten, *Ing.-Arch.* **22**, 47-54.
13. Quinlan, P. M. (1962) The λ -method for Skew Plates, *Proc. 4th U.S. Nat. Cong. Appl. Mech.*, pp. 735-750.
14. Iyengar, K. T. Sundra Raja and Srinivasan, R. S. (1967) Clamped Skew Plate under Uniform Normal Loading, *J. Royal Aero. Soc.* **71**, 139-140.
15. Kale, C. S., et al. (1972) Analysis of a Clamped Skew Plate under Uniform Loading, *AIAA J.* **10**, 695-697.
16. 岡村宏一, 石川一美, 古市享 (1993) 曲げ, あるいは面内力を受ける大形の任意4辺形平板要素の剛性方程式, *土木学会論文集*, No. 465/I-23, pp. 67-76.
17. Warren, W. E. (1964) Bending of Rhombic Plates, *AIAA J.* **2**, 166-168.
18. Sampath, S. G. and Rao, A. K. (1966) Some Problems in the Flexure of Thin Rectilinear Plates, Department of Aeronautical Engineering, Indian Institute of Science, Bangalore, Report 112S.
19. Rajaiah, K. and Rao, A. K. (1974) Exact Analysis of Simply Supported Rhombic Plates under Uniform Pressure, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **76**, 381-388.

(1994年9月14日受付)