

## 水中線状構造物の三次元自由振動解析

## THREE DIMENSIONAL FREE VIBRATION ANALYSIS OF SUBMERGED FLOATING LINE STRUCTURES

田尻太郎\*、三上隆\*\*、角田與史雄\*\*

Taro TAJIRI, Takashi MIKAMI and Yoshio KAKUTA

\*工修 北海道大学大学院工学研究科 博士後期課程(土木工学専攻)(〒060 札幌市北13条西8)

\*\*工博 北海道大学教授 工学部土木工学科(〒060 札幌市北13条西8)

This paper deals with the three dimensional free vibration problem of submerged floating line structures with elastic legs. In this analysis the structure is modelled by finite elements and the effects of fluid are represented by added mass at fluid-structure interface, for which the boundary element method is used. A numerical study is carried out to show the effects of the rigidity of legs, structure length and the number of legs on the free vibration characteristics of structures, such as frequencies, modes and added mass.

Key Words: submerged floating structure, free vibration, FEM, BEM

## 1. はじめに

我国の経済および社会の発展に伴い、広域的な地域の活性化を図るため、全国各地で様々なプロジェクトが構想されている。このような社会の動きに対応して、特に国土の狭い我国は、新たな海洋構造物の開発が重要な課題である。海洋構造物のうち、固定式構造物や浮体式構造物に対する研究は数多くなされているが<sup>1) 2) 3) 4) 5) 6) 7) 8) 9) 10)</sup>、本研究で取り上げた浮力を利用して水中に位置する構造物の研究は、比較的少ない<sup>11)</sup>。また解析においては、例えば浮体式構造物については一般に、構造全体あるいは一部を剛体とみなし、構造断面内における二次元解析が多い。

著者らは文献<sup>12)</sup>において構造の剛性を考慮した構造一流体連成問題を取り上げ、二次元断面内における水中構造物の自由振動特性を検討した。そこで本研究では二次元断面の奥行き方向の運動に注目して、係留索に支持された水中線状構造物を取り上げ、波浪や地震下の動特性を把握する上で欠かせない固有振動問題を、構造物の剛性を考慮した構造一流体系の連成振動問題として解析し、構造の全長、係留索剛性等の基本的振動特性(固有振動数、固有モード、付加質量)に与える影響の検討を行った。なお解析には文献<sup>12)</sup>と同じ手法を用い、構造物に対しては梁要素を用いた有限要素法で、流体に対しては外部級数解との接続を伴うハイブリッド境界要素法で定式化した。

ここでの流体の取扱い、非圧縮性渦無し完全流体に限る。本研究の問題は文献<sup>13)</sup>のCategory-Cに属し、流

体の粘性、圧縮性等の影響は少ないと考えられる。

## 2. 固有振動数方程式

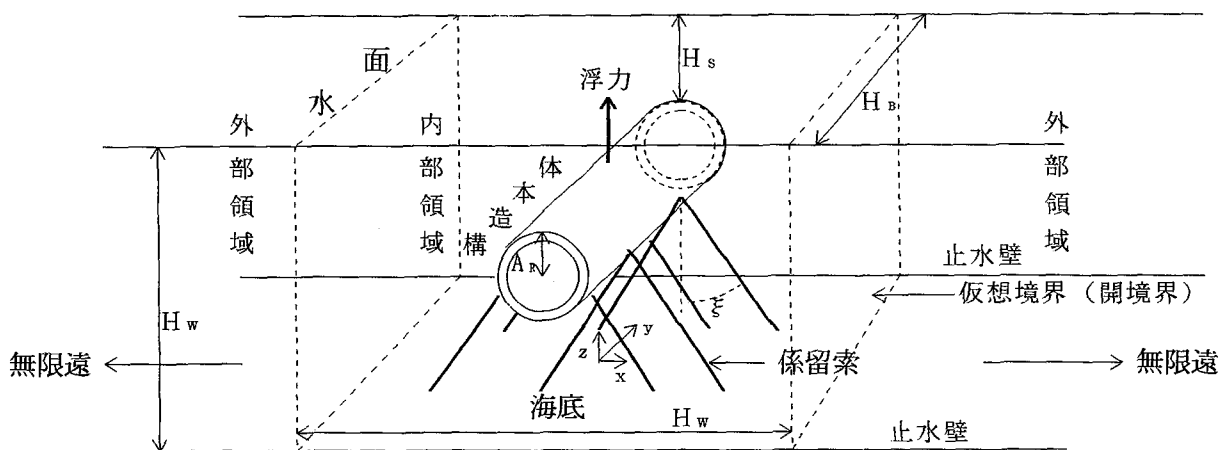
解析モデルは図-1に示したものをを用いる。構造本体には水中構造物の基本的動特性を評価する目的で中空円断面を用い、それを軸直交方向の断面内で左右対称な係留索で支持して外力に抵抗する。図で $H_w$ は水深、 $H_b$ は構造の全長(水路幅)、 $H_s$ は設置水深、 $\alpha$ は係留索設置角であり、 $A_r$ は円断面の半径である。また構造本体の長手方向の両端は、適切な支持条件を持つものとする。なお以下の定式化で、構造の運動は微小振動、流体は3次元の非圧縮性渦無し完全流体として、係留索と流体の連成効果は無視した。水面での自由表面条件は、速度ポテンシャル値を0とする条件を用い、係留索と構造本体、係留索と地盤との連結は剛結とした。

流体との連成下にある構造の固有振動数方程式の導出にあたっては、図-1の構造本体と係留索を、図-2に示した梁要素の有限要素法で離散化する。梁の曲げの変位関数には3次関数を、軸方向とねじりの変位関数には1次関数を用いる。

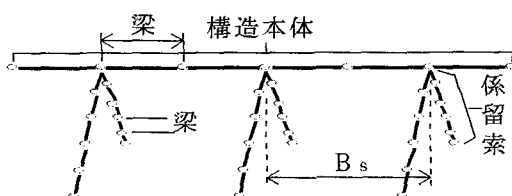
流体の影響を考慮した構造の運動方程式は、次式となる。

$$(-\omega^2[M] + ([K] + [K_e]))\{X\} = \{F\} \quad (1)$$

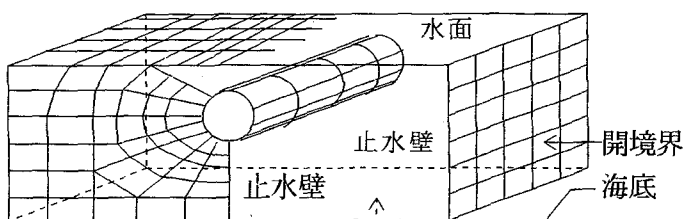
ここで $\omega$ は固有円振動数、 $[M]$ は整合質量マトリックス、 $[K]$ は剛性マトリックス、 $[K_e]$ は係留索に作用する初期張力から定まる幾何学的剛性マトリックスであり、初期張力は構造全体の自重と浮力より求めた。



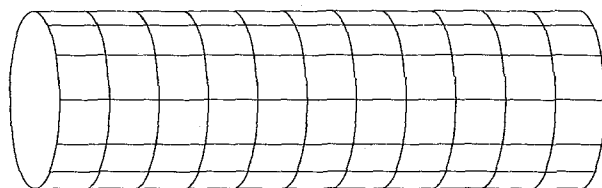
図一1 解析モデル



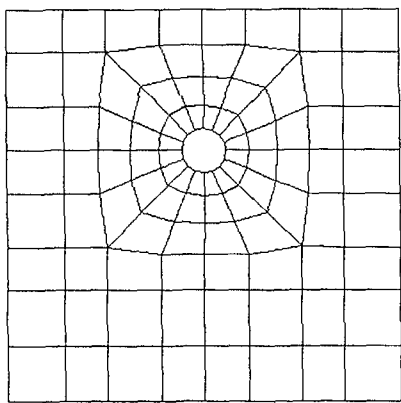
図一2 構造のモデル化



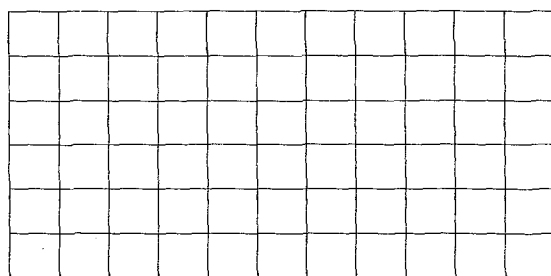
図一3 内部領域表面の境界要素分割



構造本体の要素分割



止水壁の要素分割



水面・海底・開境界の要素分割

図一4 境界要素分割

{X} と {F} は、構造の変位ベクトルと流体動圧力による等価節点力であるが、ここでは自由振動問題に限定しているため、その振幅を表している。

流体の定式化にあたっては、図一1の解析領域の  $x$  方向が無限遠へ開いた開領域となるため、図一1に示すように解析領域を構造付近の内部領域と、その外側の外部領域に分割する<sup>2) 3) 4) 12)</sup>。外部領域には解析解を用い、内部領域には境界要素法を用いる。

外部領域の速度ポテンシャルを  $\phi$  とすれば、

$$\nabla \phi(x, y, z) \cos \omega t = 0 \quad (2)$$

が成り立つ。ただし  $\nabla$  は、 $x, y, z$  に関するラプラシアンで、時間成分として  $\cos \omega t$  を仮定する。式(2)を変数分離で解き、止水壁・海底で法線流速 0、 $x = \pm \infty$  で静水及び、水面と無限遠のポテンシャル値を 0 に定めると、

$$\phi(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} e^{\pm kx} \cos ry \cos sz \quad (3)$$

が得られる。ここで  $r = m\pi/H_B$ ,  $s = (2n+1)\pi/(2H_w)$ ,  $k = (r^2 + s^2)^{1/2}$  である。 $A_{mn}$  は未定定数であり、内部領域の境界方程式を解くときに同

時に定まる。

内部領域の境界方程式は次式を用いた。

$$\frac{1}{2\pi} \alpha p(\xi, \eta, \rho) + \int_{\Gamma} p q^* ds - \int_{\Gamma} q p^* ds = 0 \quad (4)$$

ここで $\Gamma$ は内部領域の境界を表し、 $p, q$ は境界上のポテンシャル値と法線流速値、 $(\xi, \eta, \rho)$ は基本解の特異点、 $\alpha p(\xi, \eta, \rho)$ は自由項である。基本解 $p^*$ には単純基本解を用いている。式(4)を図-3に例示した境界要素で離散化し、境界条件及び、図-1の開境界において式(3)を考慮すると、無限遠までの境界条件を含んだ離散化方程式(5)が得られる。実際に用いた境界要素分割は、図-4に示す。

$$[H] \{Y\} = -[B] \{q\} \quad (5)$$

式(5)において $[H]$ と $[B]$ は、境界方程式(4)を離散化して得られるマトリックス、 $\{q\}$ は構造表面での未知の外法線流速値からなるベクトル、 $\{Y\}$ はそれ以外の全ての境界未知数からなるベクトルとなる。

次に構造一流体の連続条件は、構造速度の内法線成分の構造表面での積分が、同じ領域の流体法線速度の表面積分に等しくなるので、構造節点変位の形状関数と流速値の形状関数(境界要素のものをを用いた)及び、構造表面の内法線単位ベクトルとから定まる行列 $[D]$ を導入すれば、

$$\{q\} = \omega [D] \{X\} \quad (6)$$

と書ける。最後に構造への動圧力にはベルヌーイ式の2次の項と静水圧の部分省略した、

$$f = -\omega \rho_0 p \quad (7)$$

を用いる。式(7)で $p$ は構造の各節点におけるポテンシャル値、 $f$ は同じ点の圧力値、 $\rho_0$ は流体密度である。構造の運動方程式は梁要素に基づくので、構造本体の断面において式(7)の合力をとり梁への分布荷重におきかえ、それに梁の形状関数をかけて等価節点力に変換する。圧力分布を表す形状関数(境界要素の形状関数を用いた)と梁の形状関数及び、断面形状より定まる行列を $[T]$ として<sup>14)</sup>、

$$\{F\} = -\omega \rho_0 [T] \{p\} \quad (8)$$

となる。ここで $\{F\}$ は構造への等価節点力ベクトル、 $\{p\}$ は構造表面でのポテンシャル値からなるベクトルである。式(1)、(5)、(6)、(8)により、流体を考慮した固有振動数方程式は、

$$(-\omega^2([M]+[M_c]) + ([K]+[K_c])) \{X\} = 0 \quad (9)$$

となるが、式(9)の付加質量マトリックス $[M_c]$ は、

$$[M_c] = \rho_0 [T] [h] [D] \quad (10)$$

と表される。ただし $[h]$ は、 $[H]^{-1}[B]$ の $\{p\}$ に対応する部分行列で、構造への動圧力は、

$$\{f\} = \omega^2 [h] [D] \{X\} \quad (11)$$

から計算される。 $\{f\}$ は、構造表面節点上の圧力分布を表すベクトルである。

### 3. 数値解析

パラメータ解析を行うために、次のような基準断面諸元を設けた。基準の諸元には\*をつけて表す。図-1の設置水深 $H_s^* = 60\text{m}$ 、水深 $H_w^* = 200\text{m}$ 、内部領域の $x$ 方向幅は $H_w^*$ 、構造本体断面半径 $A_R^* = 11.5\text{m}$ 、係留索設置角 $\xi^* = 30^\circ$ 、構造の全長(水路幅) $H_B^* = 200\text{m}$ 、図-2の係留索支間 $B_s^* = 50\text{m}$ とする。また構造本体のヤング率 $(E_1^*)$ と密度 $(\rho_1^*)$ はコンクリート、係留索のそれら $(E_2^*, \rho_2^*)$ は鋼材(3.2を除く)とし、構造本体と係留索の断面積、断面二次モーメントはそれぞれ、 $69\text{m}^2(A_1^*)$ 、 $0.09\text{m}^2(A_2^*)$ 、 $4190\text{m}^4(I_1^*)$ 、 $0.00967\text{m}^4(I_2^*)$ とする。パラメータには構造の全長 $H_B$ 、係留索の伸び剛性 $E_2 A_2$ と係留索支間 $B_s$ をとり、他は基準のものをを用いた。梁としての構造の境界条件は固定支持とした。さらに結果の整理にあたっては、係留索は伸び剛性、構造本体は曲げ剛性が支配的と考えて、式(12)の無次元化固有円振動数 $\Omega$ を用いる。ここで $\omega$ は式(9)における無次元化していない固有円振動数である。

$$\Omega = \omega \sqrt{\frac{H_B^4 \rho_1^* A_1^*}{E_1^* I_1^*}} \quad (12)$$

次に付加質量係数 $\lambda$ は、付加質量を考慮しない固有円振動数を $\Omega_0$ 、付加質量を考慮した固有円振動数を $\Omega$ とした時、

$$\lambda = \Omega_0^2 / \Omega^2 - 1 \quad (13)$$

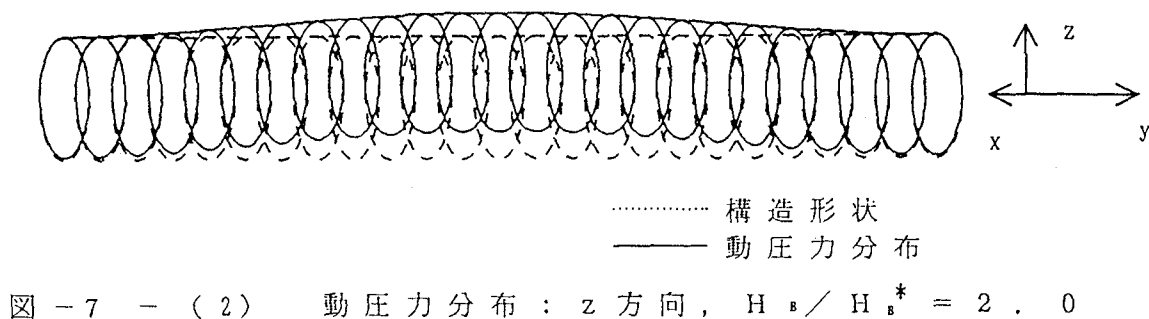
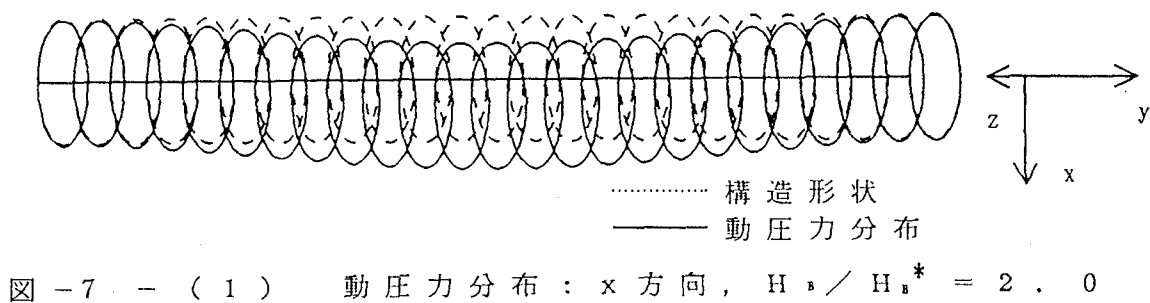
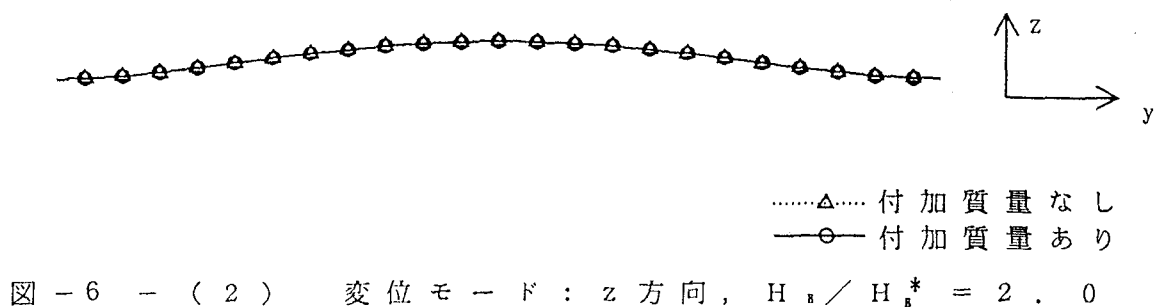
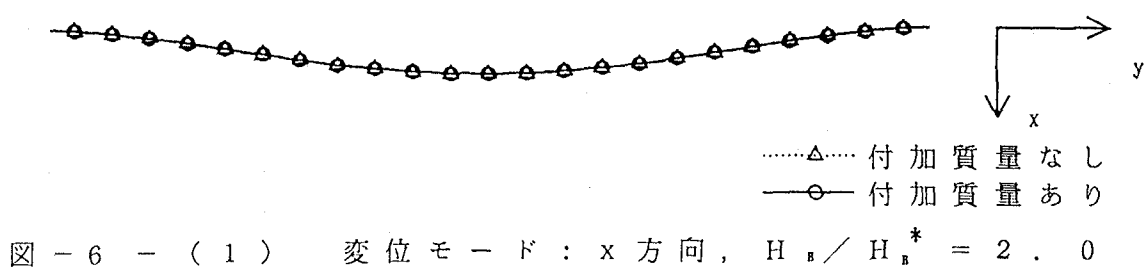
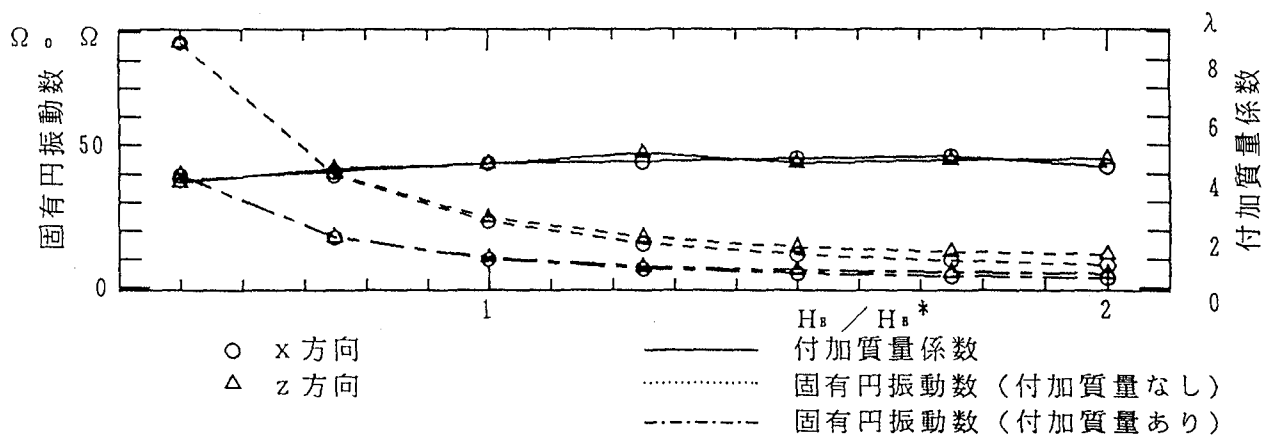
によって計算した。

要素分割の収束性は、構造本体に対して係留索支間3分割以上、係留索5分割以上で、流体領域表面に対しては、止水壁48分割以上、開境界・水面とも36分割以上、構造表面は周×長軸方向で係留索支間あたり180分割以上で収束を確認した。また以後の図に付された $x, z$ は、図-1の座標系の $x$ 方向、 $z$ 方向の運動が卓越する最低次の固有円振動数に関する結果を意味する。

#### 3.1 付加質量に関する構造の全長の影響

図-5に、構造の全長 $H_B$ の変化に対する固有円振動数と付加質量係数を示す。横軸は、パラメータにとった全長 $H_B$ と基準の全長 $H_B^*$ との比 $H_B/H_B^*$ を表し、縦軸は固有円振動数または付加質量係数である。このとき係留索は、 $H_B$ に比例して設置箇所を増やす。

図-5より付加質量係数はほぼ一定値であるが、全長の減少(構造本体の曲げ剛性の増加)とともに若干の減少傾向にある。図-6-(1)、(2)は、 $H_B/H_B^* = 2.0$ の変位モードで、構造本体天端部の変位を示した。モード図は、 $H_B$ の変化、付加質量の有無に関わらずほとんど変化せず、付加質量係数がほぼ一定であることに対応している。図-6-(1)、(2)の運動に対する動圧力が図-7-(1)、(2)である。構造形状からの外法線方向に押す力の縦距を表わしている。長軸方向の動圧力分布は、変位モードに比例する形となる。一断



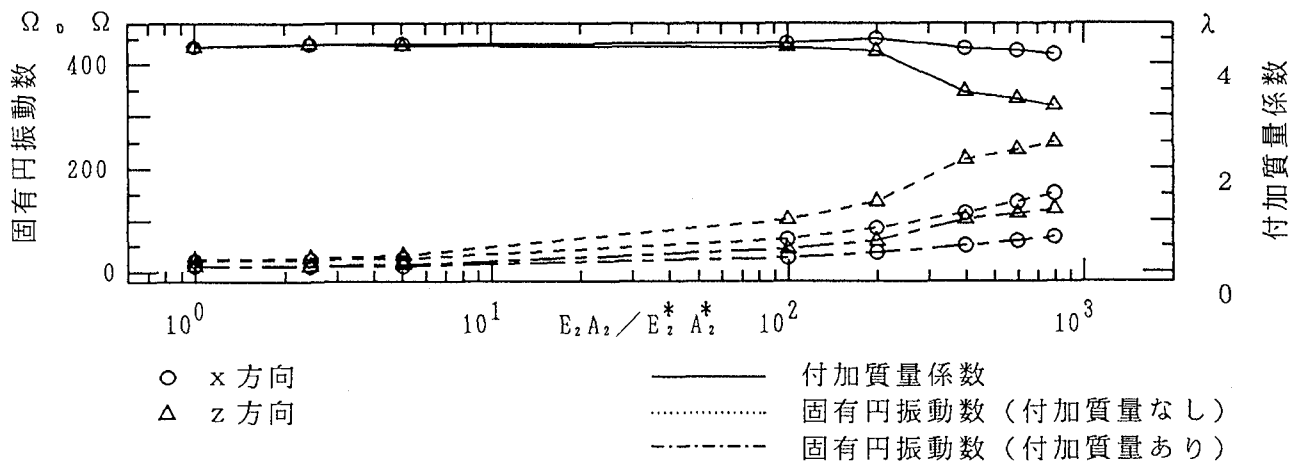


図-8 係留索剛性に対する固有円振動数と付加質量係数

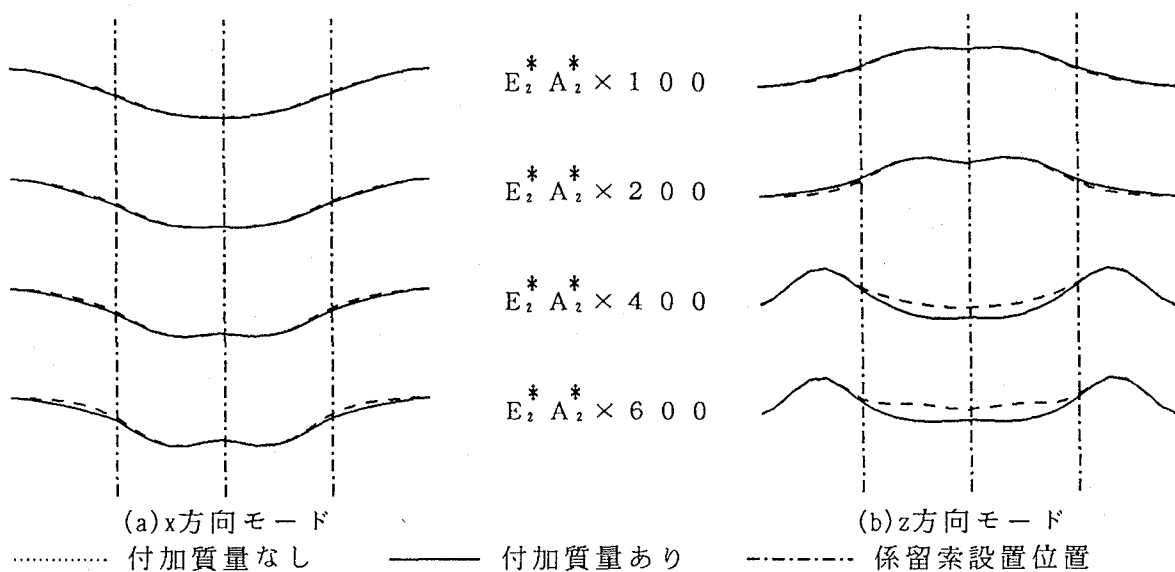


図-9 係留索剛性に対する変位モード

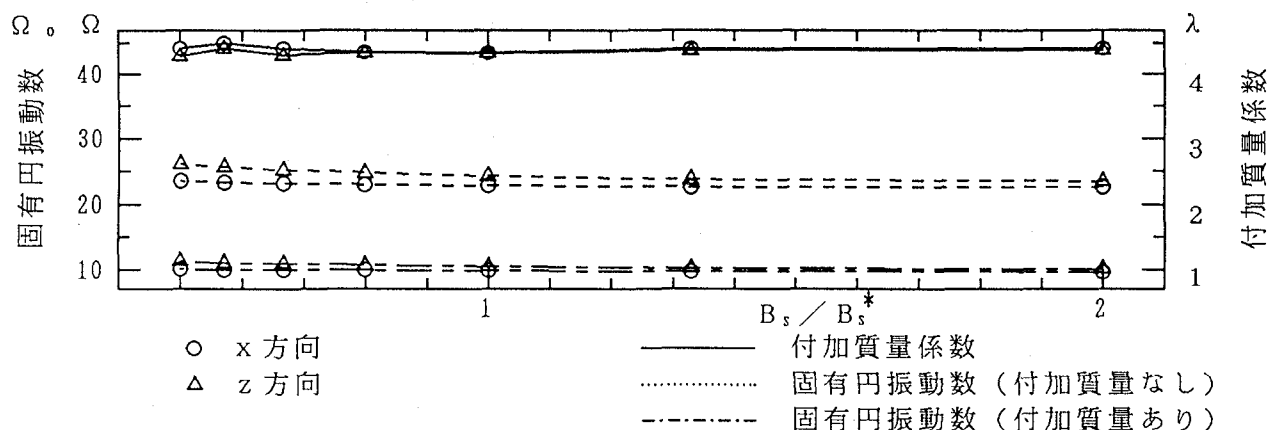


図-10 係留索支間に対する付加質量係数と固有円振動数

面上では周方向に対して、ほぼ正弦または余弦的な分布をなし、法線流速に比例し、水面と海底の影響は少ないことを確認できる。

### 3.2 付加質量係数に関する係留索の剛性の影響

ここでは構造本体の剛性、構造の全長、係留索設置個数等を一定とし、固有振動数・付加質量への係留索の伸び剛性 $E_2A_2$ の影響を調べる。3.1 では構造本体の曲げ剛性の増加とともに、付加質量係数は僅かだが減少する傾向にあった。そこでここでは、基準伸び剛性を1倍～800倍の範囲で変化させる。図-8はその時の固有円振動数及び付加質量係数である。図-9に、各剛性に対する変位モードを示す。図-8及び9より、x方向のモード図は剛性がかなり大きくても余り変化せず、付加質量係数も目立った変化を起こさない。それに対してz方向のモード図は、係留索伸び剛性が200倍を境に大きく変化し、付加質量の有無による違いも現れる。図-9で一点鎖線は係留索設置位置を表すが、これにより変位モードの変化は、係留索の影響であることがわかる。これは構造本体長軸方向単位長さ当たりの係留索伸び剛性が、z方向のほうが大きく、かつ構造本体は係留索設置位置で、弾性支持された構造とみなせるからである。ただし付加質量の有無によって変位曲線に違いは生じるが、両者は全体として似た形状となる。またこのとき、付加質量係数は係留索の伸び剛性の増加とともに、減少する傾向にある。

### 3.3 付加質量係数に関する係留索の配置の影響

次に係留索と構造本体の剛性、構造の全長を一定として、等間隔に配置した係留索の設置箇所を増やす。図-10によれば、付加質量係数は係留索支間 $B_s$ の減少（係留索全体の伸び剛性の増加）とともに、ここでも僅かではあるが減少する傾向にある。なお変位モードは図-6と同じであり、付加質量の有無もモード図に影響しなかった。

## 4. まとめ

FEMとBEMを用いて水中線状構造物の固有振動解析を取り上げ、構造全長・係留索伸び剛性・係留索支間によるパラメータ解析を行った。その結果として、次のような傾向がみられる。

- 1) 付加質量係数は、構造の剛性が増加し、変形しにくくなるとともに減少する傾向にある。
- 2) 当研究の断面諸元内では、付加質量を考慮した場合としない場合の変位曲線は、ほぼ同じ傾向を持ち、構造と流体のエネルギーを評価して固有振動数を求める、レイリー法などの活用も可能と考えられる。

また今後、断面変形を考慮し、水深等の設置条件を広範囲に変化させて検討を行う予定である。

謝辞

査読にあたっての方々の貴重な御意見に感謝致します。

## 参考文献

- 1) 榎本享編、波と漂砂と構造物 第二章, pp.51～148, 技報堂出版 1991.
- 2) 瀬戸秀幸, 水面波動問題における開境界処理と数値計算法, 日本造船学会誌第638号, pp.2～16, 日本造船学会, 1982.
- 3) 井島武夫・周宗仁, グリーンの公式による二次元水面波の境界値問題の解析, 土木学会論文報告集第252号, pp.57～71, 土木学会, 1976.
- 4) 井島武夫・吉田明德・山本督夫, 任意断面浮体の2次元係留運動と波の変形, 土木学会論文報告集第272号, pp.53～63, 土木学会, 1978.
- 5) 清川哲志・大山巧, ハイブリッド法による軸対称構造物に作用する流体力および周辺場の解析, 土木学会論文集第345号/Ⅱ-1, pp.131～141, 土木学会, 1984.
- 6) 小林昭夫・増田光一・高木儀昌・佐久田昭・加藤渉, Hybrid型境界要素法を用いた海洋構造物に作用する流体力解析について, 第一回境界要素法シンポジウム研究発表論文集, pp.25～30, 1984.
- 7) 松井徹哉・加藤賢治・白井貴志, 境界要素法による海洋波の回折・発散問題の解析, 第一回境界要素法シンポジウム研究発表論文集, pp.31～36, 1984.
- 8) 加藤賢治・松井徹哉, 境界要素法による波浪中の近接浮体群に働く流体力解析, 境界要素法論文集第2巻, pp.185～190, 1985.
- 9) 川上哲太郎・北原道弘, 積分方程式法による構造物—流体系の動的応答解析, 境界要素法論文集第2巻, pp.191～196, 1985.
- 10) K. KAKUDA and N. TOSAKA, NUMERICAL ANALYSIS OF COUPLED FLUID-ELASTICITY SYSTEMS USING THE BOUNDARY ELEMENT METHOD, Boundary Elements, pp.1005～1016, Springer-Verlag, 1983.
- 11) Pro. of The Third Symposium on Strait Crossing, Alesund, 1994.
- 12) 田尻太郎・三上隆・芳村仁, FEMとBEMを用いた水中構造物の自由振動解析, 構造工学論文集 Vol.40 A, pp.29～37, 1994年3月.
- 13) ZIENKIEWICZ, O.C. and BETTES, P., FLUID-STRUCTURE DYNAMIC INTERACTION AND WAVE FORCES. AN INTRODUCTION TO NUMERICAL TREATMENT, International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol.13, No.1, pp.1～15, 1978.
- 14) 鷲津久一郎監修, 境界要素法—基礎と応用 第10章, pp.231～243, 丸善株式会社, 1982.

(1994年9月14日受付)