

等価介在物法を用いた平面骨組構造物の弾塑性解析

ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF PLANAR FRAMES BY USING EQUIVALENT INCLUSION METHOD

山口栄輝*, 堀宗朗**, 久保喜延***

Eiki YAMAGUCHI, Muneo HORI and Yoshinobu KUBO

* Ph. D 九州工業大学助教授 工学部設計生産工学科 (〒804 福岡県北九州市戸畑区仙水町1-1)

** Ph. D 東京大学助教授 工学部土木工学科 (〒113 東京都文京区本郷7-3-1)

*** 工博 九州工業大学助教授 工学部設計生産工学科 (〒804 福岡県北九州市戸畑区仙水町1-1)

With the advancement of structural theory and computational method, it is no longer an intractable task to conduct elastic-plastic analysis. However, it is yet to be practical to carry out elastic-plastic analysis in day-to-day design, mainly because the computational speed of machines widely used in design offices is not sufficient. Thus various efforts have been made to develop algorithm so as to reduce computational time. The equivalent inclusion method, which has been well-developed in the field of micromechanics, provides an efficient way to deal with inhomogeneous body by replacing it with homogeneous one. Eigenstrain is introduced so that the deformation of the homogeneous body is equivalent to that of the original inhomogeneous body. In the present research, this method combined with the finite element method is applied to the elastic-plastic analysis of frame structures. First, formulation and numerical algorithm are shown. Then numerical problems are solved to illustrate and demonstrate its effectiveness. Computational advantage over the conventional procedure is discussed.

Key Words: equivalent inclusion method, elastic-plastic analysis, frame structures, FEM

1. 緒言

解析理論および解析手法の進歩により、弾塑性解析も比較的容易に行えるようになってきた。弾塑性有限要素解析について丁寧に解説し、プログラムリストを掲載した書物も存在している¹⁾。しかしながら、日常業務に弾塑性解析を取り入れる段階にはまだまだ至っていない。その大きな原因の一つに計算時間の問題がある。現在広く出回っているPCやEWSのレベルでは、実構造物の弾塑性解析を行うには所詮無理がある。このような状況を背景に、計算速度を上げる種々の試みが精力的に行われている²⁾。

現実の弾塑性解析では、塑性領域が大きく拡大するまでの計算を必要としない場合が多い。典型的な例として、鋼骨組構造物の弾塑性解析が挙げられる。塑性ヒンジの概念に基づいた塑性設計法(Plastic Design)³⁾が鋼骨組構造物に適用できることから、塑性域が限定されることは明らかであろう。しかしなが

ら、有限要素法による通常の弾塑性解析では、たとえ小さな領域であっても剛性が変化すれば、それに応じて構造系全体の剛性マトリックスを新たに作成し、有限要素方程式を構築し直して計算を行う必要がある。有限要素解析では計算時間の多くが有限要素方程式の解法、すなわち連立一次方程式の解法に費やされる。このことを考えれば、通常の有限要素解析の枠組みの中では、塑性域が限定されることが明らかな場合でも、それを利用して計算速度を大幅に向上させるのは困難である。

材料定数が異なる領域を扱うことを目的に、マイクロメカニクスの分野で発展してきた手法に等価介在物法(equivalent inclusion method)がある⁴⁾。本研究では、この手法を用いることにより、構造系全体の有限要素方程式を解かずに弾塑性解析を行う手法を提案する。この解析法では、基本的に塑性域のみを対象として解析を行うことになるため、塑性域が限定される問

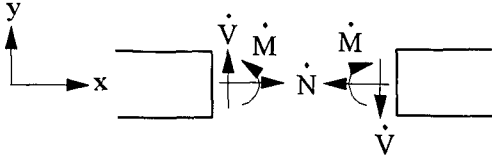


図-1 断面力増分の定義と正の向き

題で特に有用である。本研究では、平面骨組構造物の解析を対象として、等価介在物法を用いた弾塑性解析法の基本概念を示すとともに、数値解析例を通してその有効性について考察する。

2. 定式化および解析手順

弾塑性問題は、基本的には増分境界値問題⁵⁾である。本研究では曲げ変形が卓越した平面梁の挙動を対象とし、塑性変形は曲げ挙動にのみ生じるとする。文献6)の弾性梁の誘導過程を参考にすれば、次の方程式系が容易に導かれる。

$$\text{つりあい式} \quad \dot{N} + \dot{p}_x = 0, \quad \dot{V} + \dot{p}_y = 0, \quad \dot{M} + \dot{V} = 0 \quad (1)$$

$$\text{ひずみ-変位関係式} \quad \dot{\epsilon} = \dot{u}', \quad \dot{\kappa} = \dot{v}'' \quad (2)$$

$$\text{構成式} \quad \dot{N} = EA\dot{\epsilon}, \quad \dot{M} = C\dot{\kappa} \quad (3)$$

$$\text{境界条件} \quad \bar{N} = n_x \dot{N}, \quad \bar{V} = n_x \dot{V}, \quad \bar{M} = n_x \dot{M} \quad (4)$$

$$\bar{u} = \dot{u}, \quad \bar{v} = \dot{v}, \quad \bar{\theta} = \dot{\theta} \quad (5)$$

ここに、 $\dot{N}$ 、 $\dot{V}$ 、 $\dot{M}$ 、 $\dot{\epsilon}$ 、 $\dot{\kappa}$ 、 $\dot{u}$ 、 $\dot{v}$ 、 $\dot{\theta}$ 、 $\dot{p}_x$ 、 $\dot{p}_y$ は軸力増分、せん断力増分、曲げモーメント増分、直ひずみ増分、曲率増分、x方向変位増分、y方向変位増分、たわみ角増分、x方向分布荷重増分、y方向分布荷重増分である。なお、x軸は梁の軸線方向にとり、プライムはこのx軸に関する微分を表す。図-1に断面力増分の定義と正の向きを示す。境界条件におけるバーの付いた量は与えられた境界量であることを示し、 n_x は境界に立てた外向き単位法線ベクトルである。また EA 、 C はそれぞれ伸び剛性、曲げ剛性であり、後者の値は、曲げモーメントの大きさに依存する。具体的には、塑性曲げモーメント M_y を境にその値が変化することになる。

以下では、まず従来の骨組構造物の弾塑性有限要素解析法について簡単に記し、次いで本研究で提案する手法を記述する。

2.1 従来の解析法

支配方程式を、変位のみを未知数として書き改めると次のようになる。

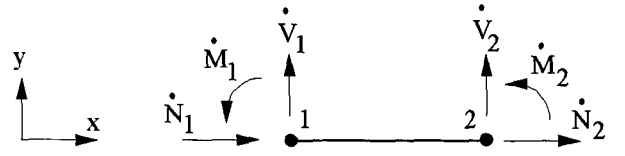


図-2 梁要素

$$(EA\dot{u}')' + \dot{p}_x = 0, \quad -(C\dot{v}'')' + \dot{p}_y = 0 \quad (6)$$

また力学的境界条件は

$$\bar{N} = n_x EA\dot{u}', \quad \bar{V} = -n_x (C\dot{v}'')', \quad \bar{M} = n_x C\dot{v}'' \quad (7)$$

で表される。

この問題の重み付き残差方程式は次式で与えられる。

$$G = \int_L [(EA\dot{u}')' + \dot{p}_x] \dot{w}_u dx + \int_L [-(C\dot{v}'')' + \dot{p}_y] \dot{w}_v dx \\ + \{(\bar{N} - n_x EA\dot{u}') \dot{w}_u + \{\bar{V} + n_x (C\dot{v}'')'\} \dot{w}_v \\ + (\bar{M} - n_x C\dot{v}'') \dot{w}_v'\} \big|_{on \partial L} = 0 \quad (8)$$

ここに、 $\dot{w}_u$ 、 $\dot{w}_v$ は重み関数である。これらは、任意の関数であるが、変位が与えられた境界では零となる。また L 、 ∂L はそれぞれ梁の領域と境界を表す。部分積分を施すことにより、いわゆる弱形式の方程式が次のように得られる。

$$G = - \int_L EA\dot{u}' \dot{w}_u' dx - \int_L C\dot{v}'' \dot{w}_v'' dx + \int_L (\dot{p}_x \dot{w}_u + \dot{p}_y \dot{w}_v) dx \\ + [\bar{N} \dot{w}_u + \bar{V} \dot{w}_v + \bar{M} \dot{w}_v'] \big|_{on \partial L} = 0 \quad (9)$$

図-2に示す、一般によく用いられる梁要素⁷⁾をここでも使用する。 $\dot{u}$ 、 $\dot{v}$ の形状関数はそれぞれ1次多項式、3次多項式であり、対応する重み関数にも同じ形状関数を用いるガラーキン法を採用すれば、式(9)より要素接線剛性マトリックス $[K^e]$ が求められる。各要素内で剛性が一定の場合、 $[K^e]$ および対応する節点変位増分ベクトル $\{\dot{u}^e\}$ は次の通りである。

$$[K^e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12C}{L^3} & \frac{6C}{L^2} & 0 & -\frac{12C}{L^3} & \frac{6C}{L^2} \\ 0 & \frac{6C}{L^2} & \frac{4C}{L} & 0 & -\frac{6C}{L^2} & \frac{2C}{L} \\ sym. & & & \frac{EA}{L^3} & 0 & 0 \\ 0 & & & 0 & \frac{12C}{L^3} & -\frac{6C}{L^2} \\ 0 & & & 0 & -\frac{6C}{L^2} & \frac{4C}{L} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\{\dot{U}^e\} = \{\dot{u}_1 \quad \dot{v}_1 \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{u}_2 \quad \dot{v}_2 \quad \dot{\theta}_2\}^T \quad (11)$$

ただし、式(10)の L^e は要素の長さである。なお、上記の式はすべて局所座標系に関するものであり、全体座標系と局所座標系が一致しない場合には適当な変換⁷⁾が必要となる。

これらの式を用いて、式(9)より全体系の離散化された重み付き残差方程式を構築し、重み関数の任意性を考慮すれば、次の有限要素方程式が得られる。

$$\{\dot{F}\} = [K] \{\dot{U}\} \quad (12)$$

$\{\dot{F}\}$ 、 $[K]$ 、 $\{\dot{U}\}$ はそれぞれ全体系の節点力増分ベクトル、接線剛性マトリックス、節点変位増分ベクトルである。各荷重ステップにおいて式(12)の連立一次方程式を解き、変位等を更新することにより解析を行うことになる。

2.2 等価介在物法を適用した解析法

等価介在物法は、不均質材料を均質材に置き換えて解析する手法である。問題の等価性を保証するためにアイゲン応力（あるいはアイゲンひずみ）を導入する⁴⁾。均質材料への置き換えにより、数学的な取り扱いが容易になることがこの手法の利点であり、応用力学、中でも特にマイクロメカニクス分野でよく用いられている。

等価介在物法を本研究の増分境界値問題に適用すれば、式(3b)の構成式を次式に取り替えることになる。

$$\dot{M} = EI \dot{\kappa} + \dot{M}^* \quad (13)$$

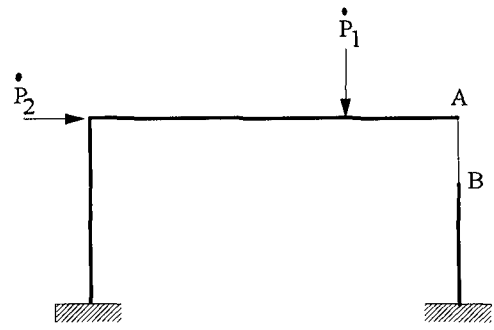
ここに、 EI は弾性挙動時の曲げ剛性である。また $\dot{M}^*$ はアイゲン応力に相当するもので、ここではアイゲン曲げモーメント増分と呼称する。この構成式を用いた場合、曲げに関する変位表示の支配方程式、境界条件は次のようになる。

$$\text{支配方程式} \quad -(EI \dot{v}'')' - \dot{M}^* + \dot{p}_y = 0 \quad (14)$$

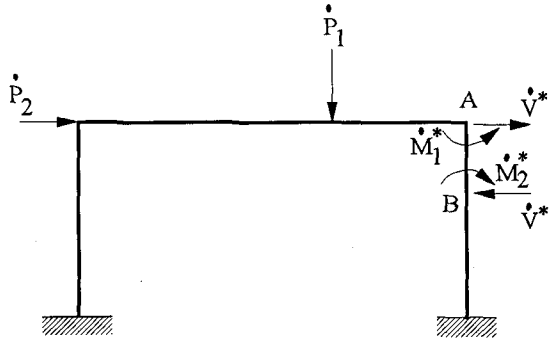
$$\text{境界条件} \quad \bar{V} = -n_x \{(EI \dot{v}'')' + \dot{M}^*\} \quad (15a)$$

$$\bar{M} = n_x (EI \dot{v}'' + \dot{M}^*) \quad (15b)$$

前節と同様にして有限要素方程式を誘導すれば、要素接線剛性マトリックス $[K^e]$ の C が定数の EI に代わり、さらに、次の要素等価節点アイゲン力増分ベクトルが導出される。



(a)



(b)

図-3 門形ラーメン

$$\{0 \quad \dot{V}^* \quad \dot{M}_1^* \quad 0 \quad -\dot{V}^* \quad -\dot{M}_2^*\}^T \quad (16)$$

ここに

$$\dot{V}^* = \frac{\dot{M}_1^* - \dot{M}_2^*}{L^e} \quad (17)$$

ただし、ここでは $\dot{M}^*$ の要素内での変化を線形と仮定し、節点での値を $\dot{M}_1^*$ 、 $\dot{M}_2^*$ としている。

上記が示唆するところを、図-3(a)の門形ラーメンを例にとって考える。このラーメンでは、柱の一部(A B間)の曲げ剛性が、塑性により EI から C_y に変化している。式(16)は、この塑性域の剛性を EI にもどす代わりに、図-3(b)のようにアイゲン力増分を作用させれば、その挙動が図-3(a)のラーメンと同じになることを意味している。ただし、これらアイゲン力増分の値を適切に定める必要がある。これは、塑性域内において、置換した構成式が本来の構成式と等価であるという、次式の条件を課すことにより決定される。

$$C_y \dot{v}'' = EI \dot{v}'' + \dot{M}^* \quad (18)$$

$\dot{v}$ の形状関数が3次の多項式であるため、この式より、

$\dot{M}^*$ の形状関数は1次式で十分であることが理解される。すなわち、要素内での $\dot{M}^*$ の分布は、2点での値が定めれば完全に決定されることになり、例えば、要素端（節点）での値 $\dot{M}_1^*$ 、 $\dot{M}_2^*$ を未知数にとることが考えられる。（式(16)の誘導に当たっては、すでにこの考えを使っている。）その場合には、式(18)を要素端で課せばよく、 $\dot{v}$ が外力増分（既知）と $\dot{M}^*$ の節点での値の線形関数として表されることから、 $\dot{M}^*$ の節点値を未知数とする連立一次方程式が導かれる。この方程式を解くことにより $\dot{M}^*$ の分布が決定され、その結果を用いて、変位等の必要な情報を得ることになる。ところで、 $\dot{v}$ の変化は外力が作用していない曲げ剛性一定の区間に限り3次関数で厳密に表される。したがって、 $\dot{M}^*$ の分布が1次式で正しく表されるのもそうした場合には限られる。図-3(a)の門形ラーメンはこの場合に該当しており、図-3(b)のモデルで十分である。しかしながら、塑性域に外力が作用していたり、塑性域内で曲げ剛性が変化するような場合、十分な計算精度を得るためには、複数の要素で塑性域をモデル化することが必要となる。ただし、このことは、決して等価介在物法を用いた解析法に特有の要求事項ではなく、従来の弾塑性有限要素解析においても同様に必要な配慮である。

この解析法では、 $\dot{v}$ や変位等の影響線関数（グリーン関数）を利用することにより、各荷重ステップでの全体系の解析を行う必要がなくなり、計算速度を向上させることが可能となる。しかし、影響線関数を解析的に求めるのは必ずしも容易でなく、一般には、数値計算により対処することが必要となる。本研究では、その手段として有限要素法を用いる。ただし、この影響線関数は、あくまで塑性変形が始まる前の弾性構造物に関するものであり、塑性域の広がりとは全く無関係である。したがって、一度計算しておけば、それで十分に事が足りる類のものである。

式(18)から導かれる連立一次方程式の未知数は塑性域内の各要素に2個ずつあり、総計では塑性域にある要素数の2倍となる。塑性域の広がりが限られた問題では、この未知数の個数は全体系の解析を行う場合に比べてかなり小さくなる。この連立一次方程式を解き、影響線関数を用いれば、各荷重ステップにおける全体系の解析は避けられる。これに対し、2.1で記した従来の解析法では常に全体解析を行う必要がある。有限要素解析では連立一次方程式の解法に多くの計算時間が使われる（例えば、三好は総計算時間の65%程度が連立一次方程式の解法に費やされると報告している⁸⁾）ことを考えれば、等価介在物法の適用により、計算時間

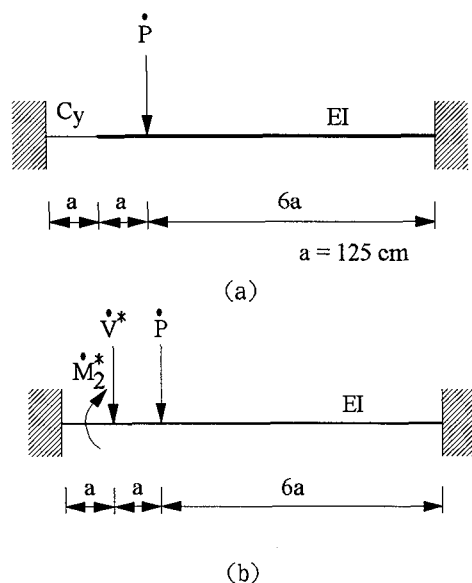


図-4 両端固定梁

の大幅な節約が期待される。

3. 数値計算例および考察

提案する解析法の解法手順を具体的に示し、またその有効性を実証するために数値解析を行った。解析例として、図-4(a)の両端固定梁と図-5の3層ラーメンを取り上げた。解析例のすべての部材において、次の材料定数、断面諸元を仮定した。

ヤング率	$E = 2.0 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$
塑性曲げモーメント	$M_y = 1.0 \times 10^7 \text{ kgf}\cdot\text{cm}$
断面積	$A = 2.0 \times 10^2 \text{ cm}^2$
断面2次モーメント	$I = 3.0 \times 10^5 \text{ cm}^4$

また曲げモーメントが M_y を越えた要素については、曲げ剛性が1/100に低下するものとした。

3.1 両端固定梁

図-4(a)の梁は、左端近傍の125cm区間が塑性した状態にある。すなわち、この区間においては、曲げ剛性が $C_y = EI/100$ に低下しているものとする。今、この梁に、 $\dot{P} = 10 \text{ gf}$ が作用したとき、それに伴って、この载荷点に生じる鉛直変位増分を計算する。この梁問題は、曲げ剛性が異なる変断面梁として、そのままでも容易に解くことができるが、ここでは等価介在物法を適用して解き、この解析法の手順を具体的に示す。

等価介在物法によれば、図-4(a)の梁に代わり、図-4(b)の弾性梁を解くことになる。塑性域を弾性域に

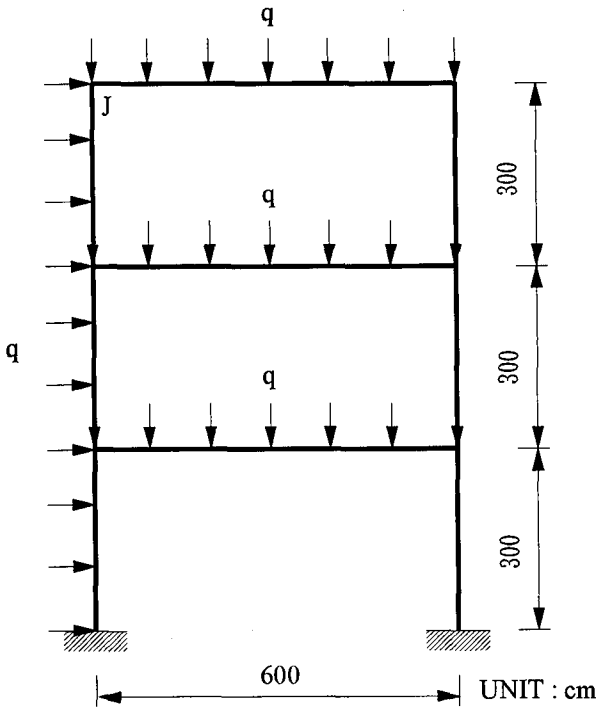


図-5 3層ラーメン

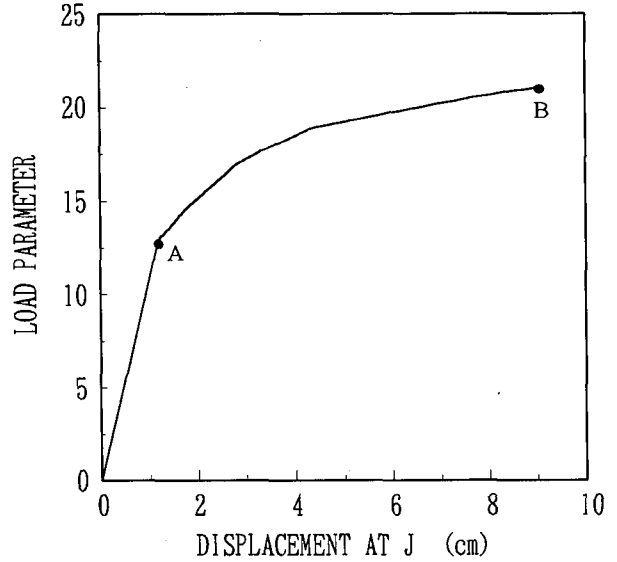


図-6 荷重-変位曲線

置換する代わりに、アイゲン力増分を導入している。このアイゲン力増分は未知であり、式(17)のことであり、 $\dot{M}_1^*$ 、 $\dot{M}_2^*$ を未知数と見なして決定する。そのために、式(18)を用い、この条件式を塑性域の左端と右端で課す。

図-4(b)の梁は、文献9)でも取り上げられている基本的な問題であり、塑性域両端での曲率増分 $\dot{\kappa}$ ($=\dot{\psi}''$)は解析的に求められ、次のようになる。

$$\text{左端 } \dot{\psi}'' = \left(-\frac{49}{64} \dot{M}_1^* + \frac{7}{32} \dot{M}_2^* - 1406250 \right) / EI \quad (19a)$$

$$\text{右端 } \dot{\psi}'' = \left(\frac{49}{256} \dot{M}_1^* - \frac{105}{128} \dot{M}_2^* - \frac{703125}{2} \right) / EI \quad (19b)$$

この2式を用いて、塑性域両端で式(18)の条件を課せば、次の連立一次方程式が得られる。

$$\frac{1549}{64} \dot{M}_1^* + \frac{693}{32} \dot{M}_2^* = 139218750 \quad (20a)$$

$$\frac{4851}{256} \dot{M}_1^* + \frac{2405}{128} \dot{M}_2^* = \frac{69609375}{2} \quad (20b)$$

この連立方程式を解けば、 $\dot{M}_1^*$ 、 $\dot{M}_2^*$ が決定される。

$$\dot{M}_1^* = 4.1952 \times 10^7, \quad \dot{M}_2^* = -4.0457 \times 10^7 \quad (21)$$

これより、載荷点での鉛直変位増分 $\dot{v}$ が次のように求

められる。

$$\begin{aligned} \dot{v} &= - \left(\frac{27}{4096} \dot{M}_1^* + \frac{9}{2048} \dot{M}_2^* + \frac{9 \times 10^7}{4096} \right) / (6 \times 10^5) \\ &= -0.2012 \text{ (cm)} \end{aligned} \quad (22)$$

$\dot{v}$ の符号が負なのは、本論文では鉛直上向きの変位を正としているためである。なお、当然のことながら、この鉛直変位増分は、変断面梁として解いた計算結果と完全に一致する。

3.2 3層ラーメン

前節の解法手順を繰り返すことにより、図-5に示す、等分布荷重が作用する3層ラーメンの荷重-変位応答を求めた。この構造物では影響線関数を解析的に求めるのが容易でなく、有限要素法を用いた数値解法により対処した。そのために、このラーメンを119節点、120要素でモデル化した。また弾塑性解析においては、各要素ごとに曲げモーメントの平均値を計算し、その値が M_y を越えた場合には曲げ剛性を低下させ、塑性の影響を取り入れた。

計算結果として、図-5に示すJ点の水平変位を荷重パラメータとともに図-6に表している。荷重パラメータは、荷重状態が基準分布荷重($q = 10 \text{ kgf/cm}$)の何倍であるかを表すものである。図-6のA点の段階

表-1 CPU時間の比較

	CPU時間
本解析法	14.9 秒
従来法	65.9 秒

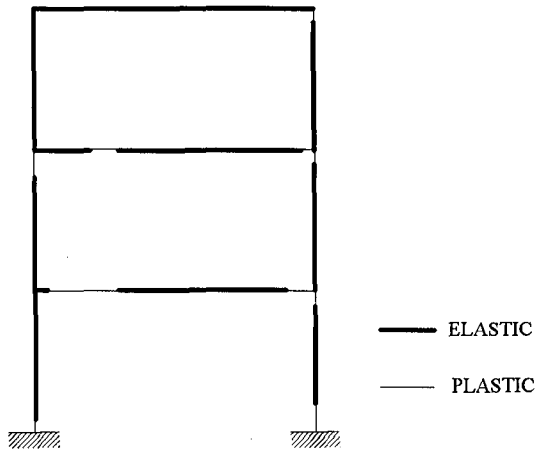


図-7 塑性域

で塑性する要素が現れ、荷重-変位曲線が非線形となる。水平変位がラーメン高さの1/100である9cmを越えたB点で計算を打ち切った。この段階での塑性域を図-7に示している。荷重-変位曲線には塑性の影響がかなり見られるが、塑性域にある要素の数はB点でも18個であり、全領域の15%に過ぎない。なお、本研究で提案する解析法だけでなく、従来の弾塑性有限要素解析法でもこのラーメンの解析を行い、全く同じ計算結果を得た。

等価介在物法を適用した解析法の利点は、その計算速度にある。B点においてさえ、未知数36個の連立一次方程式を解けばよいのに対し、従来の方法では、解析の初期段階から351元の連立一次方程式を解く必要がある。計算速度を具体的に比較するために、101の荷重ステップでB点に至るまでの解析を行い、そのCPU時間を計測した。なお、単純な線形計算である弾性域は1ステップの解析で終了するように荷重増分を調整した。

CPU時間の計測結果を表-1に示す。使用した計算機はSun SPARCstation 2である。この表より、従来の解析法に比べ、計算時間が77%減少していることがわかる。従来法においても、計算時間をできるだけ減らすよう、ソルバーにスカイライン法を用いるといった工夫をしている。このことを考え合わせれば、提案する解析法の有効性は明らかであり、計算速度を高める上で大いに貢献することが理解される。

4. 結言

等価介在物法を用いた平面骨組構造物の弾塑性解析法を提案した。その定式化、解析手順を記した上で数値解析を行い、計算時間を大幅に減少できることを実証した。

本研究では、等価介在物法の適用に関する基礎的な検討を行うことを目的としたため、平面骨組構造物のみを解析対象としたが、立体骨組構造物、さらには一般の固体の弾塑性解析への拡張も可能であると思われる。今後はこうした点についての検討を行う予定である。

参考文献

- 1) 例えば, Owen, D.R.J. and Hinton, E.: Finite Elements in Plasticity, Pineridge Press Limited, Swansea, U.K., 1980.
- 2) 菊池昇: 有限要素法とその応用-最近の話題と発展-, 土木学会論文集, 第392号/1-9, pp. 1-11, 1988.
- 3) ASCE-WRC: Plastic Design in Steel, ASCE, 1971.
- 4) Nemat-Nasser, S. and Hori, M.: Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials, North-Holland, Netherlands, 1993.
- 5) 北川浩: 塑性力学の基礎, 日刊工業新聞社, 1979.
- 6) 西野文雄, 長谷川彰夫: 構造物の弾性解析, 新体系土木工学7, 技法堂, 1983.
- 7) Cook, R.D.: Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 2nd Ed., John Wiley & Sons, N.Y., 1981.
- 8) 三好俊郎: 大規模構造問題の基礎, 構造工学における有限要素法の理論と応用(Ⅱ), 日本鋼構造協会, pp. 37-55, 1988.
- 9) 土木学会: 構造力学公式集, 第2版, 1986.

(1994年9月14日受付)