

不規則な初期たわみを有する柱の確率論的解析

PROBABILISTIC ANALYSIS OF COLUMNS WITH RANDOM INITIAL DISPLACEMENTS.

岡林 隆敏* 河角 省治** 吉田 啓三*** 生田 泰清****

by Takatoshi OKABAYASHI, Shoji KAWAKADO, Keizo YOSHIDA and Yasukio IKUTA.

This paper presents a procedure for calculating the covariance of deformation and internal forces of compressed columns with random initial deflections. The initial deflections are modeled by the random processes that are generated by spatial shaping filters. We derived the covariance equation that governs the spatial variation of the covariance responses and solved the equation by the stochastic transfer matrix method. Analytical examples are shown for the columns with initial deflections idealized by the stationary white noise random fields and the nonstationary random fields with spatially correlation.

Key Words ; column, initial deflection, probabilistic analysis, random fields

1. はじめに

信頼性理論による構造物の安全性の照査を、現実的な構造部に適用するためには、各種の不確定要因を考慮した複雑な構造系の解析が必要である。変動の激しい動的外力を受ける構造物の動的解析では、各種の解析手法が提案されており、複雑な構造系の不規則振動解析が可能になっている。しかし、不規則外力が作用する静的構造系の解析や材料定数が空間的に分布する解析は、ほとんどの場合グリーン関数による手法により^{(1) (2) (3) (4) (5)}、解析的な演算によって実行されているのが現状である。著者らは、不規則分布荷重を受ける構造物の変形と断面力の分散を求める汎用性のある解析手法、確率伝達マトリックス法を提案してきた^{(6) (7) (8)}。本論文は、この手法を初期たわみを有する圧縮部材の解析に適用し、本解法の有効性を検討したものである。

圧縮部材の座屈強度は、不確定な要因である初期たわみ、残留応力、荷重の偏心量等の初期不整の影響を強く受けることが知られている^{(9) (10)}。中でも初期たわみは、各部材ごとに異なる形状を示すために、これを材軸上で定義された確率過程でモデル化し、座屈強度を確率論的手法により評価する研究^{(1) (2) (11) (12)}が進められてきた。このような解析の目的は、初期たわみの自己相関関数が与えられた場合、部材のたわみ

* 工博 長崎大学助教授 工学部社会開発工学科 (〒852 長崎市文教町1番14号)

** (株)PAL構造 科学技術部 (〒852 長崎市旭町8番20号)

*** 工修 松尾橋梁(株)工事部 (〒551 大阪市大正区鶴町3丁目4番18号)

**** オリエンタル建設(株)福岡支店 (〒810 福岡市中央区天神4丁目2番31号)

あるいは曲げ応力の分散・共分散を求めることである。さらに、超過確率の理論より信頼性解析を行うためには、たわみ角あるいはせん断力の分散・共分散も必要になる⁽²⁾。これらの解析は、通常グリーン関数による手法により、積分を解析的に遂行することにより実行される。しかし、グリーン関数による手法では、積分の計算が極めて煩雑であるために、確率論的解析の1つの障害になっている。そこで、本論文では、不規則応答解析を効率的な数値解析法で実現できる、解析手法を提案する。

確率伝達マトリックス法による解法では、まず特定の空間的な相関を有する初期たわみを、白色雑音過程を入力とする空間的なフィルタ出力の標本でモデル化する。次に、構造系と初期たわみのモデルを状態空間表示することにより、この系を白色雑音過程を受ける線形系の境界値問題として定式化する。この方程式は、不規則分布荷重を受けるはりと同じ形の方程式になり⁽⁶⁾⁽⁷⁾、変形と断面力の分散の空間的变化は、微分方程式である共分散方程式により記述される。この方程式を解くことにより、変形と断面力の分散・共分散が得られる。本解析法の特徴は、解析的演算に頼ることなく、高い精度の数値計算が可能などところにある。本解法の有効性を検証するために、本解法とグリーン関数による解法との比較を行った。解析例の第1は、初期たわみが部材軸上で定常な白色雑音の場合、第2は初期たわみが境界条件を満足する非定常な確率過程でモデル化される場合である。

2. 初期たわみを有する柱の変形

初期たわみ $r(x)$ を有する両端ヒンジの圧縮部材に、軸力 P が作用する場合を考える。これを図-1に示した。部材長 L の圧縮部材のたわみ $y(x)$ を支配する微分方程式は、弾性安定理論より、次式で与えられる。

$$EI \frac{d^4}{dx^4} y(x) + P \frac{d^2}{dx^2} y(x) = -P \frac{d^2}{dx^2} r(x) \quad (1)$$

境界条件は、

$$y(0) = y(L) = \frac{d^2}{dx^2} y(0) = \frac{d^2}{dx^2} y(L) = 0 \quad (2)$$

である。ここに、 E は弾性係数、 I は断面二次モーメントである。

次に、無次元座標 $\bar{x} = x/L$ を導入し、(1)式を書き改める。

$$y''''(\bar{x}) + \alpha^2 y''(\bar{x}) = -\alpha^2 r''(\bar{x}) \quad (3)$$

境界条件は、

$$y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0 \quad (4)$$

である。ここで、 $'$ は $\bar{x}$ に関する微分 $d/d\bar{x}$ を示している。また、 $\alpha = kL$ ($k^2 = P/EI$) は荷重パラメータである。さらに、式の記述を簡単にするために、以後 $\bar{x}$ を改めて x で表わすものとする。

一方、(3)式を2回積分し、境界条件の後の2項を適用すると、たわみに関する別の方程式が得られる。

$$y''(x) + \alpha^2 y(x) = -\alpha^2 r(x) \quad (5)$$

境界条件は

$$y(0) = y(1) = 0 \quad (6)$$

である。

これらの方程式を状態空間表示するために、まず、部材のたわみ、たわみ角、曲げモーメントおよびせん

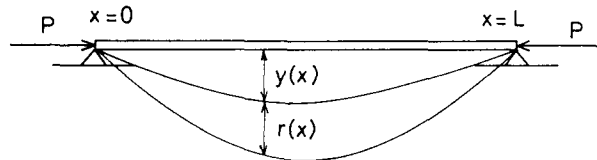


図-1 初期たわみのある圧縮部材

断力を、それぞれ $y(x)$, $\phi(x)$, $M(x)$ および $Q(x)$ とし、状態変数を

$$Y(x) = [y(x) \ \phi(x) \ M(x) \ Q(x)]^T \quad (7)$$

で定義する。この状態変数を用いると、(3)(4)式は、

$$\frac{d}{dx} Y(x) = A_y Y(x) + F_y(x) \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (8)$$

$$\text{境界条件 : } Y(0) = Y_0, Y(1) = Y_1 \quad (9)$$

で表すことができる。ここに、係数行列 A_y は

$$A_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/EI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

である。状態方程式は外力を受ける系の方程式の形になっているために、本論文では、(8)式の $F_y(x)$ を外力ベクトルと称することにする。外力ベクトルの要素は、

$$F_y = [0 \quad 0 \quad 0 \quad -\alpha^2 r''(x)]^T \quad (11)$$

である。さらに、境界条件は両端ヒンジの場合、

$$Y_0 = [0 \quad \phi_0 \quad 0 \quad Q_0]^T \quad (12-1)$$

$$Y_1 = [0 \quad \phi_1 \quad 0 \quad Q_1]^T \quad (12-2)$$

このような要素から構成される。

一方、(5)式を状態空間表示すると、状態方程式は同じ形であり、状態変数と外力ベクトルは

$$Y(x) = [y(x) \quad \phi(x)]^T \quad (13)$$

$$F_y(x) = [0 \quad -\alpha^2 r(x)]^T \quad (14)$$

となる。さらに、係数行列 A_y は

$$A_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

となり、境界条件は

$$Y_0 = [0 \quad \phi_0]^T, Y_1 = [0 \quad \phi_1]^T \quad (16)$$

となる。

3. 初期たわみのモデル化と構造一初期たわみ系の状態方程式

(1) 初期たわみのモデル化

初期たわみは、たわみの境界条件を満足する必要がある。そこで、本論文では初期たわみを、分散の空間的变化を表す確定的な形状関数 $g(x)$ と、定常確率過程 $n(x)$ の積で表される、平均値 0 の非定常確率過程でモデル化する。 $g(x)$ は、初期たわみの軸方向の空間的な変動の変化を表す関数である。

$$r(x) = n(x) \cdot g(x) \quad (17)$$

既往の研究⁽¹⁾⁽²⁾では、初期たわみの自己相関関数を

$$R_n(\lambda) = \sigma^2 \exp(-\beta |\lambda|) \cos(\Omega \lambda) \quad (18)$$

で仮定している。ここに、 σ は変動の強度、 Ω はスペクトル中心周波数、 β は帯域幅を表している。この定常確率過程のパワースペクトル密度は、

$$S_n(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \cdot \frac{2\beta(\Omega^2 + \beta^2 + \omega^2)}{(\Omega^2 + \beta^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} \quad (19)$$

で表される。

たわみだけでなく曲げモーメントの分散まで得るためには、与えられる初期たわみの2階微分

$$r''(x) = n''(x) g(x) + 2 n'(x) g'(x) + n(x) g''(x) \quad (20)$$

が必要になる。ここで定常確率過程 $n(x)$ として、(18)式の自己相関関数を有するものを仮定する。定常確率過程 $n(x)$ の2階微分の分散は、パワースペクトル密度 $S_n(\omega)$ を用いて、

$$R_{n''}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 S_n(\omega) d\omega \quad (21)$$

より計算できる。しかし、(19)式のパワースペクトル密度については、この値は無限大になり、分散が存在する2次確率過程⁽¹³⁾とはならない。そこで、 $n(x)$ の2階微分が定義できる確率過程として、パワースペクトル密度

$$S_n(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \cdot \frac{2\beta(\Omega^2 + \beta^2)}{(\Omega^2 + \beta^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} \quad (22)$$

を有する確率過程を考える。この自己相関関数は、

$$R_n(\lambda) = \sigma^2 \exp(-\beta|\lambda|) (\cos(\Omega\lambda) + (\beta/\Omega) \sin(\Omega|\lambda|)) \quad (23)$$

である。この式で、 β を小さくすると、(23)式は、(18)式に漸近する。

このような自己相関関数を有する確率過程は、不規則振動論における白色雑音過程を入力とする1自由度系の変位応答として実現することができる。本論文では、初期たわみを構成する $n(x)$ として、このような定常確率過程を採用する。すなわち、これは次式の定常な解過程 $z_1(t)$ 、 $z_2(t)$ により実現することができる。

$$\frac{d}{dx} z_1(x) = z_2(x) \quad (24-1)$$

$$\frac{d}{dx} z_2(x) = -2\beta z_2(x) - (\Omega^2 + \beta^2) z_1(x) + \gamma w(x) \quad (24-2)$$

ここに、 $\gamma = (2\beta(\beta^2 + \Omega^2))^{1/2}$ である。さらに、 $w(x)$ は次の確率特性を有する白色雑音過程である。

$$\left. \begin{aligned} (i) \quad E[w(x)] &= 0 \\ (ii) \quad E[w(x_1)w(x_2)] &= \sigma^2 \delta(x_1 - x_2) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

ここに、 $E[\]$ は集合平均のための演算子である。(24)式において、状態変数を

$$Z(x) = [z_1(x) \ z_2(x)]^T \quad (26)$$

で定義し、状態空間表示する。

$$\frac{d}{dx} Z(x) = A_z Z(x) + N_z(x) \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (27)$$

ここに、係数行列 A_z と外力ベクトル N_z は、次のようになる。

$$A_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\Omega^2 + \beta^2) & -2\beta \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$N_z(x) = [0 \ \gamma w(x)]^T \quad (29)$$

$N_z(x)$ は、平均値 0 で、自己相関関数が

$$E[N_z(x_1)N_z^T(x_2)] = Q_z \delta(x_1 - x_2) \quad (30)$$

となる白色雑音過程ベクトルとなる。ここに、強度行列 Q_z は

$$Q_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \gamma^2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

である。さらに、この系の境界条件は、次のように考える。 $x=0$ および $x=1$ における $Z(x)$ の値は、 $Z(x)$ が定常確率過程であることから、 $x=0$ および $x=1$ における分散・共分散を決定すること

ができる。本論文では、この系を初期たわみ系と称する。

(2) 構造-初期たわみ系の状態空間表示

1) 構造-初期たわみ系の状態方程式

構造系と初期たわみ系の状態変数を合成して、構造-初期たわみ系の状態変数を

$$X(x) = [Y^T(x) Z^T(x)]^T \quad (32)$$

で定義すると、構造-初期たわみ系の状態方程式は、次式で表される。

$$\frac{d}{dx} X(x) = A_x(x) X(x) + N_x(x) \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (33)$$

境界条件 : $X(0) = X_0$, $X(1) = X_1$

ここで、係数行列は、

$$A_x(x) = \begin{bmatrix} A_y & A_{yz}(x) \\ 0 & A_z \end{bmatrix} \quad (34)$$

のブロックで構成される。 A_y と A_z は(10)式と(28)式で定義した、 $A_{yz}(x)$ は(20)式と(24)式より、次式で表される。

$$A_{yz}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\alpha^2 ((\Omega^2 + \beta^2) g(x) - g''(x)) & -2\alpha^2 (\beta g(x) - g'(x)) \end{bmatrix} \quad (35)$$

外力ベクトル $N_x(x)$ は、構造系と初期ベクトル系より構成される。

$$N_x(x) = [N_y^T(x) N_z^T(x)]^T \quad (36)$$

初期たわみ系の $N_z(x)$ は、(29)式で表されたものであり、構造系の $N_y(x)$ は

$$N_y(x) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \gamma \alpha^2 g(x) w(x)]^T \quad (37)$$

となる。従って、 $N_x(x)$ は平均値 0 で強度行列が Q_x の白色雑音過程ベクトルとなる。

$$E[N_x(x_1) N_x^T(x_2)] = Q_x(x_1) \delta(x_1 - x_2) \quad (38)$$

次に、状態方程式の解過程について考える。状態方程式の解は、線形微分方程式の理論より

$$X(x) = \Phi_x(x, 0) X_0 + \int_0^x \Phi_x(x, \lambda) N_x(\lambda) d\lambda \quad (39)$$

で与えられる。ここに、 $\Phi_x(x, 0)$ は構造-初期たわみ系の状態遷移行列であり、次のようなブロックより構成される。

$$\Phi_x(x_2, x_1) = \begin{bmatrix} \Phi_y(x_2, x_1) & \Phi_{yz}(x_2, x_1) \\ 0_{24} & \Phi_z(x_2, x_1) \end{bmatrix} \quad (40)$$

$\Phi_y(x_2, x_1)$ と $\Phi_z(x_2, x_1)$ はそれぞれ構造系と初期たわみ系の状態遷移行列であり、それぞれ次式で与えられる。

$$\Phi_y(x_2, x_1) = \begin{bmatrix} 1 & x & (1/\alpha^2) \cos(\alpha x) - (1/\alpha^2) & (1/\alpha^3) \sin(\alpha x) - (x/\alpha^2) \\ 0 & 1 & (-1/\alpha) \sin(\alpha x) & (1/\alpha^2) \cos(\alpha x) - (1/\alpha^2) \\ 0 & 0 & \cos(\alpha x) & (1/\alpha) \sin(\alpha x) \\ 0 & 0 & -\alpha \sin(\alpha x) & \cos(\alpha x) \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\Phi_z(x_2, x_1) = \begin{bmatrix} \exp(-\beta x) (\cos(\Omega x) + (\beta/\Omega) \sin(\Omega x)) \\ -\exp(-\beta x) ((\Omega^2 + \beta^2)/\Omega) \sin(\Omega x) \\ \exp(-\beta x) (1/\Omega) \sin(\Omega x) \\ \exp(-\beta x) (\cos(\Omega x) - (\beta/\Omega) \sin(\Omega x)) \end{bmatrix} \quad (42)$$

ここで、 $x = x_2 - x_1$ とした。また、 $\Phi_{yz}(x_2, x_1)$ は、初期たわみ系の z_1 と z_2 に単位の入力が作

用したときの $Y(x)$ の応答により構成されるものである。これは解析的に求めるのは困難であるので、微分方程式を数値解析することにより求めた。

2) 境界条件の処理

構造系を両端ヒンジと仮定すると、構造系の境界条件は(9)式で与えられている。ここで、左端境界条件の未知数で構成される

$$\tilde{Y}_0 = [\phi_0 \quad Q_0]^T \quad (43)$$

を始端ベクトルと称する。次に、

$$Y_0 = B_y \tilde{Y}_0 \quad (44)$$

の関係を満たす左端境界のマトリックス B_y を導入する。同じく、右端境界条件の既知の部分で構成される

$$\tilde{Y}_1 = [0 \quad 0]^T \quad (45)$$

を終端ベクトルと称する。次の関係

$$B_y' Y_1 = \tilde{Y}_1 = 0 \quad (46)$$

を満たす、右端境界マトリックスを導入する。ここで、左端と右端の境界マトリックスは、それぞれ

$$B_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_y' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

である。

次に、構造一初期たわみ系の初期条件について考える。構造一初期たわみ系の始端ベクトルと終端ベクトルを次のように定義する。

$$\tilde{X}_0^T = [\tilde{Y}_0^T \quad Z_0^T]^T \quad (48)$$

$$\tilde{X}_1^T = [0_2^T \quad Z_1^T]^T \quad (49)$$

これらは、構造一初期たわみ系の左端と右端の境界マトリックス、 B_x と B_x' により

$$X_0 = B_x \tilde{X}_0 \quad (50)$$

$$B_x' X_1 = \tilde{X}_1 \quad (51)$$

の関係を満たす。ここに、

$$B_x = \begin{bmatrix} B_y & 0_{42} \\ 0_{22} & I_{22} \end{bmatrix}, \quad B_x' = \begin{bmatrix} B_y' & 0_{22} \\ 0_{24} & I_{22} \end{bmatrix} \quad (52)$$

である。

4. 確率伝達マトリックス法の概要

(1) 共分散方程式

初期たわみ $r(x)$ の平均値 $E[r(x)]$ は、0 と仮定しているので、この時状態変数 $X(x)$ の平均値は 0 となり、 $X(x)$ の共分散は定義より、次式のように与えられる。さらに、この共分散行列は、

$$R_x(x) = E[X(x) X^T(x)] \quad (53)$$

$$R_x(x) = \begin{bmatrix} R_y(x) & R_{yz}(x) \\ R_{zy}(x) & R_z(x) \end{bmatrix} \quad (54)$$

のようなブロックに分割される。求めようとする構造系の変形と断面力の分散・共分散は、 $R_y(x)$ である。白色雑音過程ベクトルを入力とする構造一初期たわみ系(33)式は、不規則分布荷重を受けるはりの方程式と同じ式になる。系の共分散の空間的变化を共分散方程式で記述し、伝達マトリックス法を拡張してこの方程式を解く解法が、確率伝達マトリックス法である。

状態方程式(33)式に対応する共分散方程式^{(6) (7) (8)}は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} R_x(x) = & A_x(x) R_x(x) + R_x(x) A_x^T(x) \\ & + \Phi_x(x, 0) E[X_0 N_x^T(x)] \\ & + E[N(x) X_0^T] \Phi_x^T(x, 0) + Q_x(x) \quad (0 \leq x \leq 1) \end{aligned} \quad (55)$$

共分散方程式の境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} R_x(0) &= E[X_0 X_0^T] = R_{x0} \\ R_x(1) &= E[X_1 X_1^T] = R_{x1} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

となる。

次に初期たわみ系について考える。初期たわみ系(27)式についても、対応する共分散方程式が誘導できる。初期たわみ系は、白色雑音過程を入力とする1自由度系の定常な解過程によりモデル化されている。

また、 $Z(x)$ は定常であるので、この分散 $R_z(x)$ は空間的に変化することなく、 $dR_z(x)/dx$ は0となる。

そこで、この系の共分散方程式は、

$$A_z R_z + R_z A_z^T + Q_z = 0 \quad (57)$$

の連立方程式で表される。従って、部材の両端における初期たわみ系の分散は、

$$R_z(0) = R_z(1) = R_z \quad (58)$$

となる。

(2) 共分散方程式の解法

共分散方程式は境界値問題になっており、確率伝達マトリックス法により、これを初期値問題に変換して解く。このためには、境界条件と外力項の共分散 $E[X_0 N_x^T(x)]$ および $E[N_x(x) X_0^T]$ と、初期条件に対応する左端境界条件の共分散 R_0 を決定する必要がある。

1) $E[X_0 N_x^T(x)]$ と $E[N_x(x) X_0^T]$ の決定

(39)式の $x=1$ の値を考え、右辺より $N_x(x)$ を掛け、両辺の平均をとる。白色雑音に関する積分を実行し、左辺より左端境界行列 B_x' をかけると次式を得る。

$$\begin{aligned} E[\tilde{X}_1 N_x^T(x)] &= B_x' \Phi_x(1, 0) B_x E[\tilde{X}_0 N_x^T(x)] \\ &+ B_x' \Phi_x(1, x) Q_x(x) \end{aligned} \quad (59)$$

この式の左辺は既知であるので、この方程式を解くことにより $E[X_0 N_x^T(x)]$ を求めることができる。

2) R_{x0} の決定

共分散方程式を初期値問題と考えると、この方程式の解は、初期条件 R_0 による解と $R_0=0$ としたときの外力項の和として表すことができる。すなわち、

$$R_x(x) = \Phi_x(x, 0) R_0 \Phi_x^T(x, 0) + P_x(x) \quad (60)$$

で与えられる。ここで、 $x=1$ として、左辺より B_x' 、右辺より $B_x'^T$ をかけると、次式を得る。

$$\tilde{R}_x(1) = B_x' \Phi_x(x, 0) B_x \tilde{R}_x(0) (B_x' \Phi_x(x, 0) B_x)^T + B_x' P_x(1) B_x'^T \quad (61)$$

ここで、 $\tilde{R}_x(1)$ は既知であるので、 $\tilde{R}_x(0)$ を決定できる。なお、 $\tilde{R}_x(0)$ と $\tilde{R}_x(1)$ は、 $\tilde{X}_0$ と $\tilde{X}_1$ の共分散行列である。

5. 初期たわみを白色雑音過程でモデル化した場合

グリーン関数による解法と本解法を比較するために、仮想的な例題として、初期たわみ $r(x)$ を平均値0の白色雑音過程でモデル化した場合を考える。 $r(x)$ の自己相関関数は

$$E[r(x_1) r(x_2)] = \sigma^2 \delta(x_1 - x_2) \quad (62)$$

で与えられる。白色雑音過程の微分は存在しないので、ここでは(5)式を基礎式とする。

(1) グリーン関数による解法

(5)式の解はグリーン関数を用いると、次式で与えられる。

$$y(x) = \int_0^x G_2(x, \lambda) r(\lambda) d\lambda + \int_x^1 G_1(x, \lambda) r(\lambda) d\lambda \quad (63)$$

ここに、(5)式のグリーン関数は、

$$\left. \begin{aligned} G_1(x, \lambda) &= \alpha \{ \sin(\alpha x) \sin(\alpha(1-\lambda)) \} / \sin \alpha & (0 < x < \lambda) \\ G_2(x, \lambda) &= \alpha \{ \sin(\alpha(1-x)) \sin(\alpha \lambda) \} / \sin \alpha & (\lambda < x < 1) \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

である。たわみ $y(x)$ の分散は、初期たわみの自己相関関数を $R_r(\lambda_1, \lambda_2)$ とすると、

$$\begin{aligned} E[y(x)^2] &= \int_0^x \int_0^x G_2(x, \lambda_1) G_2(x, \lambda_2) R_r(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \\ &+ \int_x^1 \int_x^1 G_1(x, \lambda_1) G_1(x, \lambda_2) R_r(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \\ &+ 2 \int_0^x \int_x^1 G_2(x, \lambda_1) G_1(x, \lambda_2) R_r(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \end{aligned} \quad (65)$$

となる。この式に、(62)(64)式を代入し、積分を実行すると、たわみの共分散

$$\begin{aligned} E[y(x)^2] &= \frac{\sigma^2 \alpha^2}{2 \sin^2 \alpha} \left[\sin^2(\alpha x) - \frac{\sin(2\alpha x)}{4\alpha} + \frac{\sin(2\alpha)}{4\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin(2\alpha(x-1))}{4\alpha} - x \sin \alpha \sin(\alpha(2x-1)) \right] \end{aligned} \quad (66)$$

を得る。

(2) 確率伝達マトリックス法による解法

(13),(14)式で表される状態方程式を考える。この系の状態遷移行列は、

$$\Phi_x(x_2, x_1) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha(x_2-x_1)) & (1/\alpha)\sin(\alpha(x_2-x_1)) \\ -\alpha\sin(\alpha(x_2-x_1)) & \cos(\alpha(x_2-x_1)) \end{bmatrix} \quad (67)$$

となる。ここで、たわみ $y(x)$ とたわみ角 $\phi(x)$ の共分散行列を

$$R_y(x) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \quad (68)$$

で定義する。この系の共分散方程式は、

$$\left. \begin{aligned} m_{11}' &= 2 m_{21} \\ m_{21}' &= m_{22} - \alpha^2 m_{11} - \alpha \sin(\alpha x) E[\phi_0 r(x)] \\ m_{21}' &= -2 \alpha^2 m_{21} - 2 \alpha^2 \cos(\alpha x) E[\phi_0 r(x)] + \sigma^2 \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

となる。境界条件は、

$$R_y(0) = R_y(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_{22}(0) \end{bmatrix} \quad (70)$$

である。(59)式より、境界条件と荷重の相関は、

$$E[\phi_0 r(x)] = \sigma^2 \sin(\alpha(1-x)) / (\alpha^2 \sin \alpha) \quad (71)$$

となる。荷重項 $P_y(x)$ は、 $R_y(0)=0$ として、(69)式を解析的に解くことにより得られる。(61)式により、始端条件を決定すると、

$$m_{22}(0) = \sigma^2 (2\alpha - \sin(2\alpha)) / (4\alpha \sin^2 \alpha) \quad (72)$$

となる。(60)式を計算すると、共分散 $R_y(x)$ が得られる。

2つの解法を比較すると、解析的に解を求めるためには、グリーン関数による解法が簡単である。しかし、伝達マトリックス法は微分方程式の解法を基本にしたものであり演算を全て微分方程式の数値解析として実

行できる利点がある。

6. 初期たわみが空間的に相関を有する場合

初期たわみを確率過程でモデル化し、座屈強度を確率論的手法で解析する初期の研究では、初期たわみを定常確率過程と仮定している。しかし、実際の初期たわみは境界条件を満足しているために、境界条件を確率1で満足する非定常確率過程によるモデル化が試みられてきた⁽¹⁾⁽²⁾。

Jacquot(i)は、初期たわみのモデルとして、境界条件を満足する非定常確率過程を考え、その自己相関関数を2重フーリエ級数

$$K_r(x_1, x_2) = D_0 \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \Omega_{pq} \sin(p \pi x_1) \sin(q \pi x_2) \quad (73)$$

で表した。ここに、 D_0 は変動の強度を表し、 Ω_{pq} は変動の周期に関するパラメータである。この自己相関関数を用いて、グリーン関数による手法より、級数が1項の場合について圧縮部材のたわみの分散の解析解を得ている。また、白木らは⁽²⁾、初期たわみの実測あるいはシミュレーションを参考にして、(73)式が1項の場合と3項の場合について、たわみと曲げモーメントの分散、さらにそれぞれの微分、すなわちたわみ角とせん断力の分散の解析解を得ている。

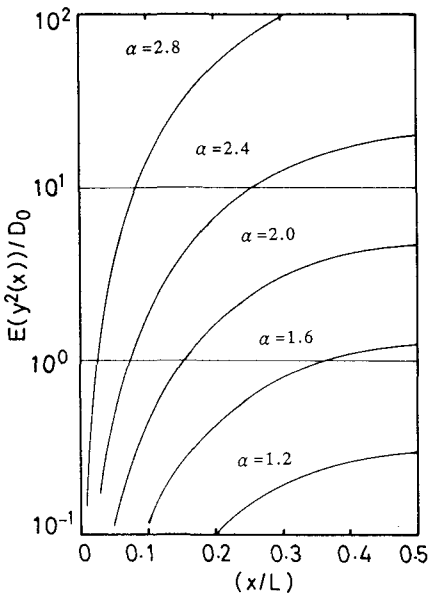


図-2 たわみ応答の分散

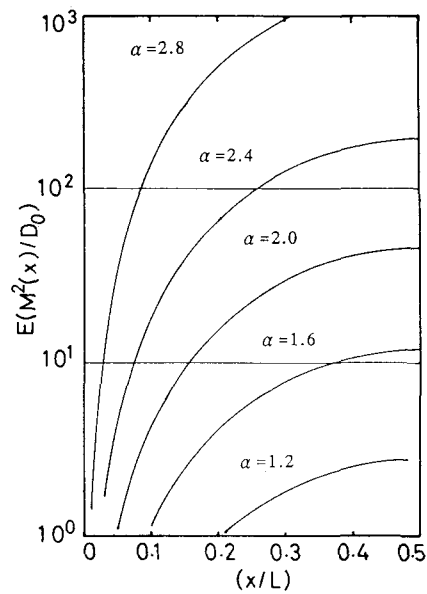


図-3 曲げモーメント応答の分散

本論文では、既往の研究⁽¹⁾⁽²⁾による結果と比較するために、限定された条件に初期たわみを適合させた、(73)式の1項のみを考えた場合の解析を行った。3章の荷重モデルと、この自己相関関数を整合させるためには、(17)式の形状関数を $g(x) = \sin(\pi x)$ とし、(22)式のスペクトルパラメータとして、

$\Omega/2\pi = 0.001$, $\beta/2\pi = 0.0005$ のような小さい値を採用する。このような値を用いた理由は、空間的変動の周期を形状関数の変化より緩やかにするためである。 Ω と β の値を調整することにより、初期たわみのスペクトル形状を変化させることができる。

このような条件のもとで、(55)式の共分散方程式を解くことにより、構造系 $Y(x)$ の共分散 $R_Y(x)$ が得られる。図-2は、支点から支間中点までのたわみの分散を、荷重パラメータ α を変化させて示した

ものである。荷重パラメータは、 $\alpha = 1.2, 1.6, 2.0, 2.4$ および 2.8 と変化させた。 α を大きくするとたわみは大きくなり、 $\alpha = \pi$ の座屈荷重でたわみは無限大になる。本解法による解と、Jacquot (1) の解を比較すると、数値解析の誤差内で一致する。図-3 は、荷重パラメータ α に対する曲げモーメントの変化を示したものである。たわみと同じく、 α の増加に伴って曲げモーメントは増大する。白木らの解析 (2) と図上で比較すると、両解法の解は一致する。この解析で (73) 式の パラメータは $\Omega_{11} = 1, D_0 = \alpha^2$ である。

このように、グリーン関数法による解析法と本論文でモデル化した初期たわみを用いた確率伝達マトリックス法を比較すると、本解法の解の精度は十分にあり、本解法の有効であることが確認できた。さらに、本解法は、行列演算と微分方程式の数値解析を基礎とした解析であるために、煩雑な解析的演算を回避できるだけでなく、より複雑な系に対して適用できる有利な点がある。また、共分散行列を求める本解法によれば、信頼性解析のための統計量である、たわみ、たわみ角、曲げモーメント及びせん断力の分散を同時に求めることができる。

7. おわりに

本論文では、確率過程でモデル化された初期たわみを有する圧縮部材の変形と断面力の確率論的解析法として、確率伝達マトリックス法による定式化を示した。さらに、本解法と既往のグリーン関数法と比較することにより、本解法の有効性について検討したものである。本研究で得られた結果を要約すると、次のようになる。

(1) 初期たわみを白色雑音過程を入力とするフィルター系出力の確率場としてモデル化した。構造系と初期たわみ系を状態空間で表示することにより、これらの空間的变化を、白色雑音過程を入力とする線形系の境界値問題として定式化した。

(2) 構造系の変形と断面力の分散の空間的变化を支配する共分散方程式を誘導し、解析的な演算を用いることなく、これらの分散を解析する算法を示した。

(3) 初期たわみを白色雑音過程でモデル化した場合、本解法を解析的に解くことにより、圧縮部材の変形の分散の解析解を得た。

(4) 初期たわみを非定常確率過程でモデル化した場合、共分散方程式を数値解析することにより、圧縮部材の変形と断面力の分散を求めることができた。これらをグリーン関数による既往の解析結果と比較することにより、本解法の有効性を確認した。

本解法によれば煩雑な解析的な演算を実行することなく、変形と断面力の分散を微分方程式の数値解析により求めることができる。従って、初期たわみの自己相関関数が複雑な場合、あるいは複合した構造系の解析に適用可能である。さらに、超過理論により信頼性解析を行う場合、たわみとたわみ角あるいは、曲げモーメントとせん断力、それぞれの分散・共分散が必要になるが、これらの確率特性は共分散方程式の解として同時に求めることができる。

参考文献

- 1) Jacquot, R.D. : Nonstationary Random Column Buckling Problem, ASCE, vol.98, No.EM5, pp.1173 ~1182, 1972.
- 2) 白木渡, 高岡宣善: 非定常不規則な初期たわみを有する圧縮部材の信頼性解析, 土木学会論文報告集, 第297号, pp.37~46, 1980年5月.

- 3) Shinozuka, M. : Structural Response Variability, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, vol. 113, No. 6, pp. 825~842, 1987.
- 4) Bucher, C.G. and M. Shinozuka : Structural Response II Variability, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, vol. 114, No. 12, pp. 2035~2054, 1988.
- 5) 高田毅士：不確定力学特性を有する梁の応答と信頼性に関する考察, 日本建築学会構造系論文報告集, 第409号, pp. 67~73, 1990年3月.
- 6) 岡林隆敏：不規則な分布荷重を受けるはりの解析, 土木学会論文報告集, 第316号, pp. 11~21, 1981年12月.
- 7) 岡林隆敏, 浦川剛志, 吉田啓三：相関のある不規則分布荷重を受けるはりの解析, 土木学会論文報告集, 第341号, pp. 155~162, 1984年1月.
- 8) 岡林隆敏, 花井正美, 吉田啓三：不規則分布荷重を受けるアーチ部材の分散・共分散応答解析, (その1) 不規則分布荷重を白色雑音過程でモデル化した場合, 日本建築学会構造系論文報告集, 第423号, pp. 97~104, 1991年5月.
- 9) 青木徹彦, 福本秀士：鋼柱の座屈強度のばらつきにおよぼす残留応力の影響について, 土木学会論文報告集, 第201号, pp. 31~41, 1972年5月.
- 10) 藤本盛久, 岩田衛：鋼圧縮部材の座屈強度の確率論的方法による研究—ランダムな初期たわみを有する圧縮部材—, 日本建築学会論文報告集, No. 218, pp. 17~25, 1974年4月.
- 11) Boyce, W.E. : Buckling of a Column with Random Initial Displacements, Journal of the Aerospace Science, vol. 28, pp. 308~320, 1960.
- 12) Fraser, W.B. and Budiansky, B. : The Buckling of a Column with Initial Deflections, Journal of Applied Mechanics, vol. 36, No. 2, pp. 233~240, 1969.
- 13) Y.K. リン (森本吉朗, 富田文治他訳) : 構造力学の確率論的方法, 培風館, 1972年.

(1993年9月16日受付)