

不規則パルス過程を用いた確率場における 構造物の信頼性評価法

RELIABILITY ANALYSIS METHOD OF STRUCTURAL SYSTEMS IN RANDOM FIELD USING RANDOM PULSE THEORY

白木 渡*・松保重之**・恒国光義***

By Wataru SHIRAKI, Shigeyuki MATSUHO and Mitsuyoshi TSUNEKUNI

In this study, a practical reliability evaluation method of structural systems with spatial uncertainties modeled by two-variate random fields is proposed. Using the results of stochastic finite element method, the response in each finite element of a structural system is modeled as a two-dimensional random pulse space-process. The level crossing theory of two-dimensional pulse space-processes is applied to evaluate the mean upcrossing rate of the response by extending the level crossing theory of one-dimensional pulse processes.

As a numerical example, a bending problem of a steel plate resting on the elastic foundation with statistical non-uniformity such as the bearing coefficient of foundation is treated, and the reliability analysis of the plate is performed for the lateral deflection and the bending moment.

1. まえがき

近年、構造信頼性問題においては構造物に作用する荷重や構造物の材料特性などに含まれる不確定性は、確率過程あるいは確率場の理論により取り扱われるようになってきた^{1)~3)}。一般の構造工学問題では、時間のみに依存する不規則関数である確率過程と、空間座標のみに依存する不規則関数である確率場との2つの特別な場合が考えられている。

材料特性のような空間的な不均一性を確率場として表す場合、その不均一性を有する構造物の応答値もまた確率場として取り扱わなければならない。また、そのような構造物の信頼性評価は確率場の超過理論によらなければならない。そのためには、確率微分方程式を解くことを必要とするが、複雑な構造物に対してはこの問題を厳密に解くことは非常に困難である。また、有限要素法などの近似解法を解析に用いることが多いため、応答を連続な確率場として得ることも困難である。

本研究では、2次元確率場でモデル化される空間的不均一性を有する構造物の簡易的信頼性評価法について考える。まず、確率有限要素解析により構造物の応答値の各有限要素内および有限要素間の確率特性を求め、各有限要素における応答を2次元不規則パルス過程として考える。確率有限要素解析を行う際、構造物に含まれる空間的不均一性を局所平均を用いて離散化する。次に、1次元の再生パルス過程における超過理論を拡張することにより、応答値をモデル化した2次元不規則過程の平均超過率を求め、その結果に基づいて構造物の信頼性を評価する。一般に、2次元確率場の平均超過率を求めることは難しいが、パルス過程としてモデル化することにより簡単に示されることが示される。

最後に、地盤反力係数が2次元確率場として表されるウインクラー型弾性基礎地盤上の鋼板の信頼性解析

* 工博 鳥取大学助教授 工学部土木工学科 (〒680 鳥取市湖山町南4-101)

** 工博 鳥取大学助手 工学部土木工学科 (〒680 鳥取市湖山町南4-101)

*** 工修 東電設計株式会社 技術開発本部 耐震技術部 (〒100 東京都台東区東上野3-3-3)

を本手法を用いて行う。

2. 局所平均による確率場の離散化

確率有限要素解析を行うためには、対象とする確率場を各有限要素内における確率変数に離散化しなければならない。ここでは2次元均質 (homogeneous) 確率場を考え、局所平均⁴⁾を用いてその確率場を離散化することにより、各有限要素内および有限要素間の確率特性を評価する。空間座標 t_1, t_2 における均質確率場を $X(t_1, t_2)$ で表すと、面積 A で図心が座標 (t_1, t_2) に存在する有限要素内における局所平均 $X_A = X_A(t_1, t_2)$ は式(1)のように定義される。

$$X_A = X_A(t_1, t_2) = \frac{1}{A} \int_{t_1-T_1/2}^{t_1+T_1/2} \int_{t_2-T_2/2}^{t_2+T_2/2} X(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (1)$$

ここで、 T_1 および T_2 は有限要素の各座標軸に沿う辺の長さであり、 $A=T_1 T_2$ である。いま、対象とする確率場が平均値 m および標準偏差 σ を有するとすると、局所平均 X_A の平均値および分散はそれぞれ式(2)、式(3)のように表される。

$$E[X_A] = m \quad (2)$$

$$\text{Var}[X_A] = \sigma^2 \gamma(T_1, T_2) \quad (3)$$

式(3)において、 $\gamma(T_1, T_2)$ は $X(t_1, t_2)$ の分散関数と呼ばれるものであり、次式により表される。

$$\gamma(T_1, T_2) = \frac{1}{T_1 T_2} \int_{-T_1}^{+T_1} \int_{-T_2}^{+T_2} \left(1 - \frac{|\tau_1|}{T_1}\right) \left(1 - \frac{|\tau_2|}{T_2}\right) \rho(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (4)$$

上式で、 τ_1 および τ_2 は各座標軸に沿う2点間の距離であり、また、 $\rho(\tau_1, \tau_2)$ は $X(t_1, t_2)$ の自己相関関数である。

次に、2つの局所平均 X_A と $X_{A'}$ の共分散は、Fig. 1に示す記号を用いて式(5)のように求められる。

$$\text{Cov}[X_A, X_{A'}] = \frac{1}{AA'} \cdot \frac{\sigma^2}{4} \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 (-1)^k (-1)^l T_{1k}^2 T_{2l}^2 \gamma(T_{1k}, T_{2l}) \quad (5)$$

このようにして評価された対象とする確率場の各有限要素内および有限要素間の確率特性に基づいて確率有限要素解析⁵⁾を行い、確率場で表される空間的な不均一性を有する構造物の応答値の確率特性を求める。

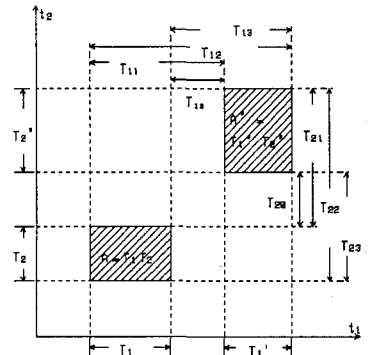


Fig. 1 Distances characterizing relative location of rectangular areas A and A'

3. パルス過程の理論による信頼性解析

確率有限要素解析の結果を用いて、各有限要素内の応答値を2次元不規則パルス過程としてモデル化する。本研究では、1次元のパルス過程のレベル超過の理論を2次元パルス過程へ拡張して適用し、それによって得られる平均超過率に基づいて構造物の信頼性を評価する。以下では、時間軸に沿う1次元再生パルス過程の超過の理論の概要をはじめに示し、次に、空間軸における2次元不規則パルス過程の超過の問題への拡張

を議論する。一般に、複雑な構造物の解析に対して確率場の超過の問題を厳密に解くことは困難であるが、本研究で行うようにパルス過程の超過の理論を適用することにより、簡易的にその問題を解析できる。

いま、Fig. 2に示すような時間軸 t に沿う定常な矩形再生パルス過程 $X(t)$ を考える。Fig. 2において、 $f_s(x)$ は実現パルスの確率密度関数である。また、確率 q で実現パルスが発生し、確率 p でその実現パルスが終了するとき、再生パルス過程 $X(t)$ の任意時点における確率密度関数 $\hat{f}_x(x)$ は次式で表される。

$$\hat{f}_x(x) = p\delta(x) + qf_s(x) \quad (6)$$

ここに、 $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数である。

再生パルス過程 $X(t)$ の、あるレベルの値 r に対する平均超過率 $\nu_x^+(r)$ は式(7)のように与えられる。

$$\nu_x^+(r) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P[X(t) < r \text{ and } X(t+\Delta t) > r] \quad (7)$$

ここに、 Δt は任意の微小時間である。

この式を連続な確率過程に対して解くと、次式に示されるようなライスの公式が得られる。

$$\nu_x^+(r) = \int_0^\infty \dot{x} f_{x\dot{x}}(r, \dot{x}) d\dot{x} \quad (8)$$

上式において $\dot{x}$ は時間に関する微分過程であり、 $f_{x\dot{x}}$ は対象とする連続な確率過程とその微分過程との同時確率密度関数である。

再生パルス過程に対しては、式(7)は式(9)のように書き換えられる⁶⁾。

$$\nu_x^+(r) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^r \hat{f}_x(x) \lambda_f \Delta t \hat{G}_s(r) dx \quad (9)$$

ここに、 λ_f は再生パルス過程 $X(t)$ の平均発生率であり、したがって、 $\lambda_f \Delta t$ は時間 t から $t+\Delta t$ の間に新しいパルスが発生する確率を表している。そして、 $\hat{G}_s(r)$ は、その新たに発生したパルスがレベル r を超過する確率を表しており、次式で与えられる。

$$\hat{G}_s(r) = \begin{cases} \int_r^\infty \hat{f}_x(x) dx & (r \geq 0) \\ 1 & (r < 0) \end{cases} \quad (10)$$

ここで、期間 Δt においてその新しいパルスが必ず発生する、すなわちベシク・タイプのパルス過程を考えると、式(9)において $\lambda_f \Delta t$ の値は1となる。したがって、式(9)はある任意の時点におけるパルスがレベル r 以下である確率と、そのパルスに隣接する新しく発生したパルスがレベル r を超過する確率との積になる。

次に、上で述べた1次元の定常パルス過程の超過の理論を2次元非定常パルス過程の超過の問題へ拡張する。いま、Fig. 3に示すような2次元パルス過程を考える。座標 $(t_1+\Delta t_1/2, t_2+\Delta t_2/2)$ に位置する矩形パルスが、面積 $\Delta t_1 \Delta t_2$ において各座標 t_1 および t_2 に沿ってあるレベル r を超過する事象について、その平均超過率を本研究では次のように定義する。

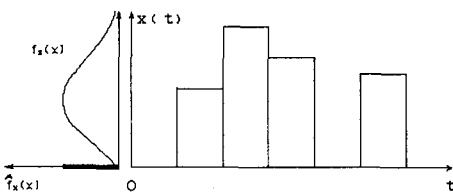


Fig. 2 One-dimensional rectangular pulse process

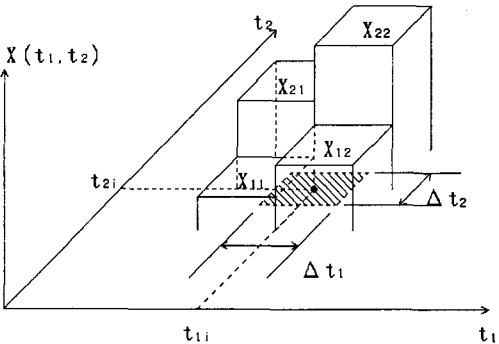


Fig. 3 Level crossing of two-dimensional rectangular pulse process X_{22}

$$\nu_{x^+}(r | t_1, t_2) = \frac{1}{\Delta t_1 \Delta t_2} P[X_{11} < r \text{ and } X_{12} < r \text{ and } X_{21} < r \text{ and } X_{22} > r] \quad (11)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} X_{11} &= X(t_1 - \Delta t_1/2, t_2 - \Delta t_2/2) \\ X_{12} &= X(t_1 + \Delta t_1/2, t_2 - \Delta t_2/2) \\ X_{21} &= X(t_1 - \Delta t_1/2, t_2 + \Delta t_2/2) \\ X_{22} &= X(t_1 + \Delta t_1/2, t_2 + \Delta t_2/2) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

である。

考えている2次元パルス過程が定常過程であるとき、式(11)は式(9)から類推して次のように書き換えられる。

$$\nu_{x^+}(r) = \frac{1}{\Delta t_1 \Delta t_2} \int_{-\infty}^r f_{X_{11}}(X_{11}) dX_{11} \int_{-\infty}^r f_{X_{12}}(X_{12}) dX_{12} \int_{-\infty}^r f_{X_{21}}(X_{21}) dX_{21} \int_r^{\infty} f_{X_{22}}(X_{22}) dX_{22} \quad (13)$$

ここに、 $f_{X_{ij}}(i, j=1, 2)$ はパルス X_{ij} の確率密度関数である。また、このパルス過程が非定常過程であるとき、各パルス間の相関を考慮して式(13)は次式のように表される。

$$\nu_{x^+}(r | t_1, t_2) = \frac{1}{\Delta t_1 \Delta t_2} \int_{-\infty}^r dX_{11} \int_{-\infty}^r dX_{12} \int_{-\infty}^r dX_{21} \int_r^{\infty} f_{X_{11}X_{12}X_{21}X_{22}}(X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}) dX_{22} \quad (14)$$

上式において、 $f_{X_{11}X_{12}X_{21}X_{22}}$ は考えている4つのパルス、すなわち X_{11}, X_{12}, X_{21} および X_{22} の同時確率密度関数である。

対象とするパルス過程のレベル超過という事象が希な事象と考え、その生起回数はポアソン分布で近似できるとすると、求めようとする構造物の破壊確率は $P_f^*(r)$ は次のように表される。

$$P_f^*(r) = 1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^n \nu_{X_i^+}(r | t_1, t_2) \cdot \Delta t_{1i} \Delta t_{2i}\right) \quad (15)$$

ここに、 n は対象とする領域における矩形パルスの数、すなわち有限要素数を表す。

前述したように、実際の2次元的な空間的広がりをもつ構造物をライスの公式のような厳密解を用いて解析することは困難であるが、パルス過程の超過の理論を用いることにより、ライスの公式に含まれるような微分過程を考慮する必要がなくなり、簡易的に構造物の信頼性評価を行うことができる。

4. 数値計算例

ここでは、Fig.4に示すウインクラ型弾性基礎地盤上の鋼板の曲げ問題を考える。基礎地盤上の鋼板が分布荷重を受けて沈下すると、基礎地盤からその沈下に比例した逆方向の反力を受け、その比例係数が地盤反力係数と呼ばれる。本研究では、この地盤反力係数が空間的不均一性を示すと考え、2次元正規均質確率場と仮定し、鋼板の鉛直方向のたわみおよび曲げモーメントについてそれぞれ破壊確率を算定する。

数値計算において、地盤反力係数の平均値は文献7)

に示されているモスクワ・エネルギー研究所によるデータを参考にして $m_g = 626.5 \text{ tonf/m}^2$ とし、同様に自己相関関数は、式(16)で示されるような2点間の距離が離れるに従い相関が指数関数的に減少するモデルを用いる。

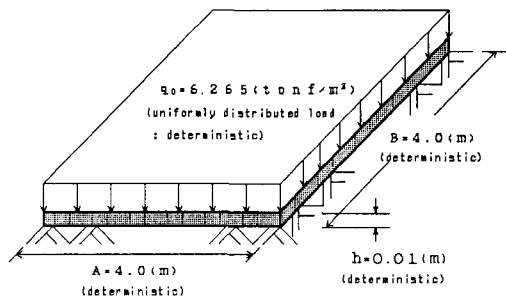


Fig.4 Analytical model

$$\rho_0(\tau_1, \tau_2) = \exp \left[- \left\{ \left(\frac{\tau_1}{\delta_1} \right)^2 + \left(\frac{\tau_2}{\delta_2} \right)^2 \right\} \right] \quad (16)$$

式(16)において、 δ_1 および δ_2 はそれぞれ x_1 軸および x_2 軸方向に対する相関に関するパラメータであり、ここでは $\delta_1 = \delta_2 = 1.127\text{m}$ とモデル化する。また、 τ_1 および τ_2 は各座標軸に沿った2点間の距離を表す。等分布荷重 q_0 は、 $m_g/100$ とした値であり、確定値として取り扱う。鋼板は一辺が4mの正方形とし、鋼板の弾性係数、ポアソン比、および厚さはそれぞれ $E = 2.1 \times 10^7 \text{ tonf/m}^2$ 、 $\nu = 0.3$ 、 $h = 0.01\text{m}$ とし、これらも全て確定値として取り扱う。

確率有限要素解析は、Fig.5に示すように鋼板の各辺を等間隔に8分割した81節点64要素の場合と、同様に16分割した289節点256要素の場合について行う。64要素の場合の解析結果を鉛直方向のたわみに対する破壊確率の算定に用い、256要素の場合の解析結果を曲げモーメントに対する破壊確率の算定に用いる。これは、要素分割を小さくすることにより曲げモーメントが正の値から負の値へ変化する場所における有限要素解析の誤差を小さくするためである。64要素の要素分割での確率有限要素解析により得られた鉛直方向のたわみの平均値と、同様の問題の解を三角関数の級数展開を用いて表したナビエの解³⁾との比較を要素番号1, 10, 19, 28の要素 (Fig.6参照) について行った結果をTable 1に示す。Table 1中の相対誤差 ϵ は、確率有限要素解析により得られる鉛直方向のたわみの平均値を w 、ナビエの解を w_0 として次式により求めた。

$$\epsilon = \frac{w - w_0}{w} \times 100 (\%) \quad (17)$$

鉛直方向のたわみに対する破壊確率の算定においては、地盤反力係数の変動係数、各有限要素における鉛直方向のたわみの確率密度関数の分布形、および超過のレベルの値の3つをパラメータとした。地盤反力係数の変動係数については、その標準偏差を変化させることにより0.10, 0.15, 0.20と変化させた。有限要素内のたわみの確率密度関数については、確率有限要素解析では1次および2次のモーメントまでの情報しか得られないことから、正規分布、対数正規分布および極値I型(グンベル分布)の3つの分布形を仮定した。超過のレベルの値については、まず地盤反力係数の変動係数を0.20として確率有限要素解析を行い、その結果得られる全有限要素のたわみの標準偏差の中の最大値を用いて設定した。地盤反力係数が0.20の場合の標準偏差の最大値を7~10倍した値をlevel 7~level 10とすると、level 7 = 0.0135m, level 8 = 0.01547m, level 9 = 0.01741m, level 10 = 0.01934mとなる。

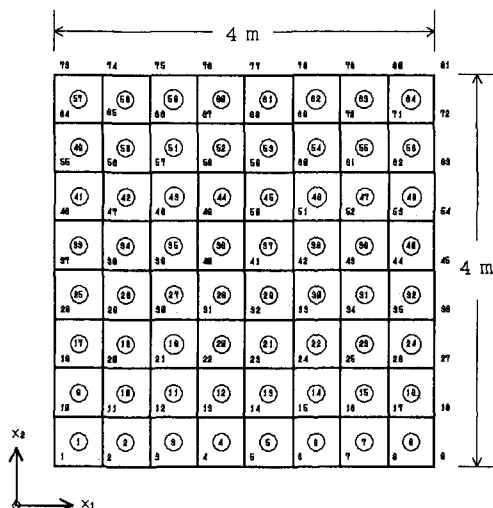


Fig.5 Mesh of finite element

Table 1 Relative error of finite element solution to Navier's solution

ELEMENT NUMBER	w (m)	w ₀ (m)	ε (%)
1	0.4343E-02	0.4024E-02	7.35
10	0.1120E-01	0.1110E-01	0.89
19	0.1039E-01	0.1040E-01	-0.10
28	0.9921E-02	0.9924E-02	-0.03

Table 2 Calculation cases

case	level	p.d.f.	c.o.v.
1	7	normal	0.10
2	7	normal	0.15
3	7	normal	0.20
4	8	normal	0.10
5	8	normal	0.15
6	8	normal	0.20
7	9	normal	0.10
8	9	normal	0.15
9	9	normal	0.20
10	10	normal	0.20
11	10	Gumbel	0.20
12	10	log-normal	0.20

これらのパラメータの組み合わせにより12の解析のケースを定め、それらをTable 2に示す。

曲げモーメントに対する破壊確率の算定については、地盤反力係数の変動係数が0.20、各有限要素における曲げモーメントの確率密度関数の分布形が正規分布、および超過のレベルがlevel 10の場合についてのみ行った。超過のレベルの値の決定方法は、鉛直方向のたわみに対する破壊確率の算定における方法と同様である。

式(14)の積分の計算は、繰り返し高速モンテカルロ手法⁹⁾により行った。この手法を用いることにより、任意の確率密度関数をもつ多変数の同時確率密度関数の積分を、低い推定誤差で計算できる。本研究での計算における推定誤差は約2%であった。

鉛直方向のたわみに対する破壊確率の算定結果をFigs. 6～8に示す。これらの図において、 P_f^0 は各有限要素の応答値が全て独立であると仮定した場合の鋼板の破壊確率であり、 P_f^1 は全ての有限要素中の応答値が完全相関を有すると仮定した場合の鋼板の破壊確率である。 P_f^0 および P_f^1 はそれぞれ式(18)と式(19)を用いて算定した。

$$P_f^0 = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P_{fi}) \quad (18)$$

$$P_f^1 = \max \{ P_{fi} \} \quad (19)$$

ここで、 P_{fi} は各有限要素の応答値、すなわち各パルスが単独でレベルを超過する確率であり、 n は有限要素の数、すなわちパルスの数を表す。また、 P_f^* は本手法により算定した破壊確率を示している。これらの図より、地盤反力係数の変動係数の増加にともなう破壊確率が増加していることが確認できる。また、本手法により算定した破壊確率は、各有限要素の応答値が全て独立であると仮定して算定した破壊確率と、全有限要素の応答値

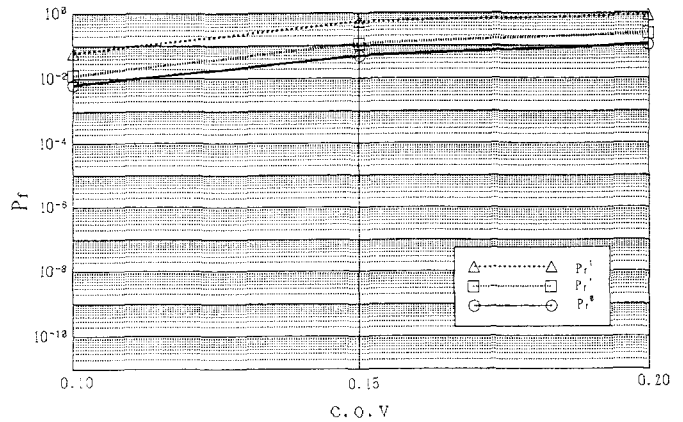


Fig. 6 Failure probability for lateral deflection for level 7 (Case 1, 2, 3)

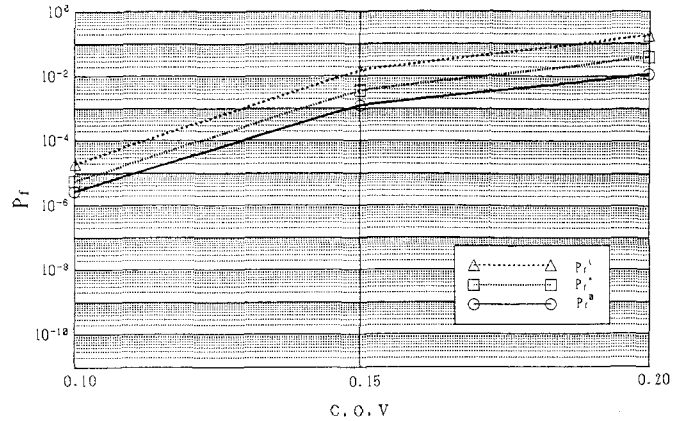


Fig. 7 Failure probability for lateral deflection for level 8 (Case 4, 5, 6)

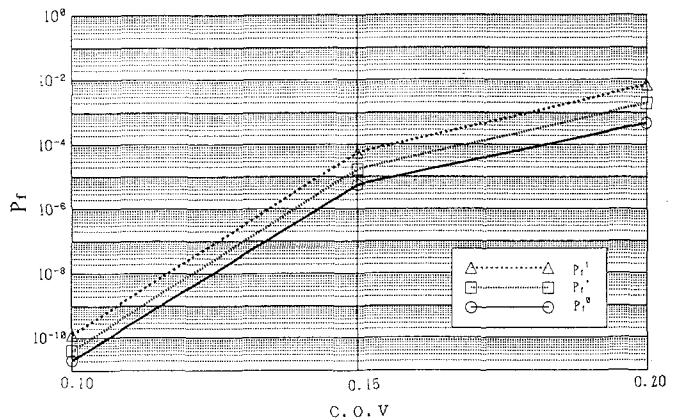


Fig. 8 Failure probability for lateral deflection for level 9 (Case 7, 8, 9)

が完全相関を有すると仮定して算定した場合の破壊確率の間の値であり、本手法が空間的な相関特性を考慮したものであることが示されている。Table 3には、仮定した各有限要素の応答値確率密度関数の形が鋼板の破壊確率に与える影響を示している。すその部分の面積が広い分布形になるにつれて、破壊確率が大きくなることが分かる。Table 4に示す曲げモーメントに対する破壊確率の算定結果についても、鉛直方向のたわみの場合と同様のことがいえる。

Table 3 Failure probability for lateral deflection
(Case 10, 11, 12)

p. d. f.	P_f	P_f^1	P_f^*	P_f^0
normal		0.7478E-05	0.3278E-04	0.9972E-04
Gumbel		0.2159E-02	0.2342E-01	0.5194E-01
log-normal		0.3891E-03	0.3758E-02	0.8980E-02

Table 4 Failure probability for bending moment

	P_f^1	P_f^*	P_f^0
level 10	0.3962E-04	0.1364E-03	0.4953E-03

以上の結果から、空間的不均一性を有する構造物の信頼性解析を行う場合、その構造物の応答値の空間的相関特性を考慮した解析が必要であることが確かめられる。ここで算定した P_f^1 のように、応答値が最大の値を示す点における破壊確率で構造物の信頼性を評価しようとするとは過大評価になる可能性があり、また、 P_f^0 のように、応答値の空間的相関特性を無視した破壊確率で構造物の信頼性を評価しようとするとは過小評価になる可能性があることが分かる。

5. あとがき

本研究では、2次元確率場でモデル化される空間的不均一性を有する構造物の簡易的信頼性評価法を提案した。数値計算例では、地盤反力係数が2次元確率場として表されるウインクラ型弾性基礎地盤上の鋼板の信頼性解析を提案した手法を用いて行った。提案した手法により鋼板の鉛直方向のたわみ、および曲げモーメントの平均超過率を求め、その結果に基づき、各応答値について鋼板の破壊確率を算定した。また、各有限要素の応答値、すなわち各パルスが全て独立であると仮定した場合および全ての有限要素中の応答値が完全相関を有すると仮定した場合の鋼板の破壊確率と、本手法により算定した破壊確率との比較を行った。

これらの結果から、本研究で提案した手法は、構造物の解析に有限要素解析のような近似解法を用いて、また、ライスの公式などの厳密な解法に必要な微分過程の確率特性を考慮することなく、構造物の応答値の空間的相関特性を考慮した信頼性解析が行えることが示された。

参 考 文 献

- 1) E. Vanmarke, and M. Grigoriu: Stochastic Finite Element Analysis of Simple Beams, Engineering Mechanics, ASCE, vol.109, No.5, 1983, pp.1203-1214.
- 2) A.D. Kiureghian, and J.-B. Ke: Stochastic Finite Element Method in Structural Reliability, Probability Engineering Mechanics, Vol.3, No.2, 1988, pp.88-91.
- 3) F. Yamazaki, and M. Shinozuka: Safety Analysis of Stochastic Finite Element Systems by Monte Carlo Simulation, Structural Eng./Earthquake Eng., Vol.5, No.2, 1988, pp.313-323.
- 4) E. Vanmarke: Random Fields; Analysis and Synthesis, MIT Press, 1983
- 5) 中桐滋, 久田俊明: 確率有限要素法入門 不確定構造の解析, 培風館, 1985.

- 6) R. D. Larrabee, and A. Cornell: Combination of Various Load Processes, Structural Engineering, ASCE, Vol.107, No.1, 1981, pp.223-239.
- 7) В. В. Болотин: Об упругих Деформациях Подземных Трубопроводов, Прокладываемых в Статистически Неоднородном Грунте, Строительная Механика и Расчет Сооружений, No.1, pp.4-8, 1965.
- 8) Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S.: Theory of Plates and Shells, Second Edition, McGraw-Hill Book Company, 1959, pp.105-111.
- 9) W. Shiraki: An Extension of Iterative Fast Monte-Carlo(IFM) Procedure and Its Applications to Time-Variant Structural Reliability Analysis, Proc. of ICOSSAR, 1989, pp.1015-1018.

(1993年9月16日受付)