

ボロノイ分割を用いたRBSMによる無筋コンクリート梁の寸法効果解析

SIZE EFFECT ANALYSIS OF PLAIN CONCRETE BEAMS
BY USING RBSM WITH VORONOI ELEMENTS

竹内則雄* 上田真稔** 鬼頭宏明*** 樋口晴紀**** 上林厚志*****

By Norio TAKEUCHI, Masatoshi UEDA, Hiroaki KITOH, Harunori HIGUCHI and Atsushi KAMBAYASHI

Rigid Bodies-Spring Models (RBSM) were proposed by Prof. KAWAI in 1977 on the basis of the experimental evidence for solids under the ultimate state of loading. These models consist of rigid bodies and two types of connection springs, one of which resists dilatational deformation, while the other resists shear deformation. In this way, RBSM can easily express cracking and slipping to show their influence on the failure of concrete structure. However, the weakness with RBSM is that the collapse pattern is controlled by the mesh division, and analysis in cases where the cracking pattern can not be estimated is difficult. To resolve this problem, the authors applied Voronoi elements to the RBSM analysis. This study discusses the analysis of plain concrete beams and the possibility of analyzing size effects according to RBSM with Voronoi elements.

Key Words : size effect, RBSM, plain concrete beam, Voronoi tessellation

1. まえがき

RBSM[1] は構造物の極限解析を目的に開発された数値解析法であり、対象構造物を剛体要素の集合体とそれらを連結する二種類の分布ばねによりモデル化する(図1参照)。このため、コンクリート構造物の破壊を支配するひび割れやせん断すべりなどの不連続現象を比較的簡単に扱うことができる[2][3]。

しかしながら、RBSM では要素境界辺上に設けられたばねに貯えられるエネルギーを評価しているため、要素分割のパターンにより破壊形式が左右される傾向がある。したがって、予め破壊パターンが推定できない問題においては、実際に発生する破壊面と RBSM による崩壊機構とが若干異なり、RBSM による解は正解に対して高めの崩壊荷重となる[4]。また、材料強度の不確定性によってひび割れパターンが決定される問題については解析に工夫が必要であった。

一方、都井らは材料の構成式を検討するため、ボロノイ分割に着目し、RBSM による離散化極限解析を行っ

*	工博	明星大学助教授	理工学部土木工学科	(〒191	東京都日野市程久保 2-1-1)
**	工修	竹中工務店	技術研究所主席研究員	(〒270-13	千葉県印旛郡印西町大塚1-5)
***	工修	大阪市立大学助手	工学部土木工学科	(〒558	大阪府大阪市住吉区杉本 3-3-138)
****		安部工業所	技術部課長	(〒500	岐阜県岐阜市六条大溝 3-13-3)
*****	工修	竹中工務店	技術研究所研究員	(〒270-13	千葉県印旛郡印西町大塚1-5)

ている[5]。RBSM は、任意多角形要素が利用できるため、このようなポロノイ多角形を要素として用いることができる。ポロノイ多角形は基準となる点群の勢力圏が等しくなるよう決定されるため、人間が手で分割することは難しい[6]。そこで著者らは、計算機により生成した疑似乱数を基準点とする、自動要素分割システムを開発した[7]。

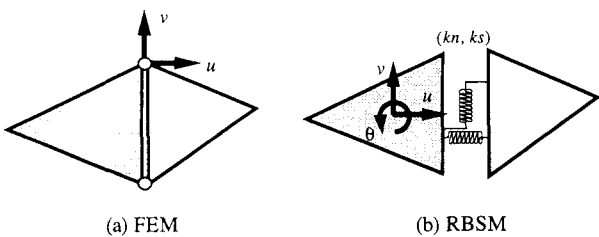


図1 有限要素法とRBSM

本研究は、このシステムによって得られた要素分割の幾何学的特性を検討し、無筋コンクリート梁の離散化極限解析に対する適用性、および、この梁の寸法の相違による耐力への影響について検討したものである。コンクリート構造物の寸法効果の原因は、材料そのものが不均質で破壊強度や欠陥が確率分布しているため、構造物の寸法・体積が増加するにつれて大きな欠陥の存在確率が高まり、その強度が低下することや、構造寸法により乾燥収縮の度合いが異なることなどが挙げられる[14]。さらに、この効果は、引張応力下でのコンクリートの疑似脆性、すなわち、応力解放域であるひび割れの先端に位置し、多数の微視的ひび割れを伴う破壊進行領域の存在[15]、ならびにその引張軟化挙動 [16] に関係しており、近年、破壊力学的手法がコンクリート構造物の強度評価に積極的に取り入れられている [14][17]。

有限要素法における上記ひび割れ挙動のモデル化としては、離散ひび割れモデルに対応する仮想ひび割れモデルと分散ひび割れモデルに対応するひび割れ帯モデル等が知られている[14]。しかしながら、前者では、要素分割時にひび割れ線を予測に基づいて意図的に規定しなければならず、また後者では、ひび割れ発生による構造物内の不連続挙動の表現に限界があると思われる。

本研究で用いたRBSMは、前述のように、要素境界辺上でひび割れやすべりを表現するため、仮想ひび割れモデルと同様、基本的には、ひび割れ線を予測して要素分割を行う必要がある。しかしながら、ここで提案する乱数を基準点としたポロノイ多角形を利用する要素分割法を用いれば、ひび割れ発生位置ならびに進行方向を人為的に規定することなく解析が行える。なお、解析の対象は等曲げ区間を持つ二点荷重を受ける無筋コンクリート梁であり、この問題はひび割れ発生位置および進展方向が材料の強度分布に左右される問題である。

2. 疑似乱数の特性

本研究では、ポロノイ多角形の基準点として、計算機により生成される乱数を用いた。乱数を生成する方法にはいくつかあるが、ここでは、線形合同法を用いている[8]。しかし計算機で生成された乱数は疑似乱数であり、一様乱数とはなっていない。一方、ポロノイ多角形は多数の基準点をもとに各点の勢力圏が等しくなるよう作成されるため、得られる多角形は基準点の特性に影響を受ける。そこで、はじめに、計算機によって生成される乱数の特性を検討した。

図2は1から10までの整数の乱数を発生させ、横軸に乱数値、縦軸に乱数の発生回数に応じた頻度をとったものである。最下段の線は乱数を100回発生させたときの頻度分布、最上段は

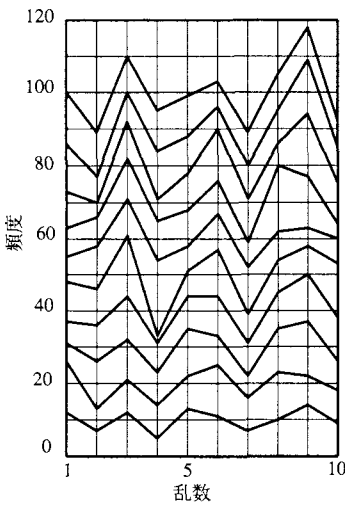


図2 疑似乱数の頻度分布

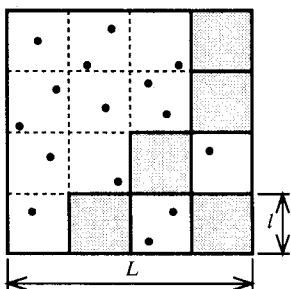


図3 正方形領域の格子分割

1000回発生させたときの頻度分布を示している。図から理解できるように、発生回数に関係なく、頻度の多い乱数値と低い乱数値が存在する。この傾向は、乱数を発生させるための初期値を変更しても現れる。

次に乱数の分布を定量的に判断するため、乱数のフラクタル性を検討した。まず、図3に示すように、乱数が分布する正方形領域を格子状に分割する。ここで、正方形領域の一辺の長さを(L)とし、格子の一辺の長さを(l)とする。図中、●印は乱数点を示し、■で囲まれた部分は乱数が存在しない格子を表している。図4は、横軸に(l/L)を、縦軸に乱数点を含む格子の数をとり、両対数グラフにプロットした図である。このグラフにおける傾きの絶対値がフラクタル次元である。乱数点が500点以上になるとフラクタル次元を表す回帰直線が引ける状態になり、乱数の分布がフラクタル性をもつことがわかる。

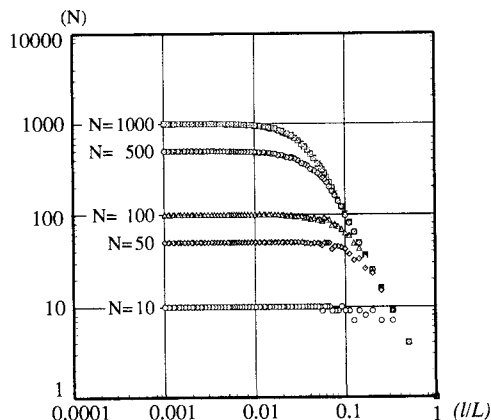


図4 乱数のフラクタル性

先述のように、基準点の特性が直接ポロノイ多角形に反映されるため、計算機で生成された乱数が一様乱数であれば、人為性を排除した普遍的な要素分割が得られるが、実際には、図2に示したように計算機で生成した乱数は一様乱数とはならない。一方、自然界の形や割れ目にはフラクタル性があると言われているが[12]、基準点がフラクタル性を有すれば、その特性が反映されるポロノイ多角形もまた、フラクタル性を持つものと思われる。乱数の一様性とフラクタル性は同時に議論することはできないが、本研究では必ずしも一様乱数ではない乱数であっても、フラクタル性を表現できる乱数であれば、普遍性を議論しても良いものと解釈し、図4より、500点以上の乱数点を下限値として基準点に採用した。

3. ポロノイ多角形の生成

ポロノイ多角形は図5に示すよう、平面上にある基準点を三角形の頂点とするDelauney三角網の外心点を結ぶことにより得ることができる。RBSMでは、要素重心間の垂線を用いてひずみを差分近似するが、ポロノイ多角形を用いると、境界辺に対して直交した垂線が得られ、ひずみを差分近似するRBSMにとって、計算上都合がよい。

線形合同法による1000点の乱数を母点としてポロノイ多角形を生成した結果を図6に示す。一部に小さな要素が生成されているが、これは、疑似乱数の性質によるものである。

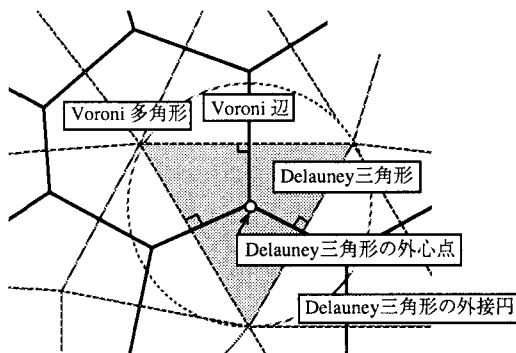


図5 ポロノイ多角形とDelauney三角形

RBSM は与えられた要素分割における要素境界辺上でのみ、ひび割れやすべりを表現するため、要素分割の影響が解に含まれる。したがって、RBSM によって得られた解を評価するためには、フラクタル性だけではなく、ポロノイ要素分割によって得られた要素のサイズや形状、また、要素境界辺の方向や長さの特性を検討しておかなければならない。ここでは、要素サイズの指標として要素面積の頻度分布を考えた。図 7 は正方形領域の面積を要素数で除した面積(Amean)と各要素面積(A)の比(A/Amean)を横軸に、階級幅を 0.2 にとり頻度を百分率で表した値を縦軸にとったものである。図 7 は乱数点が 1000 点に対するものであるが、1000 点以外の場合についても同様な分布が得られており、代表値は 1 より小さくなる。

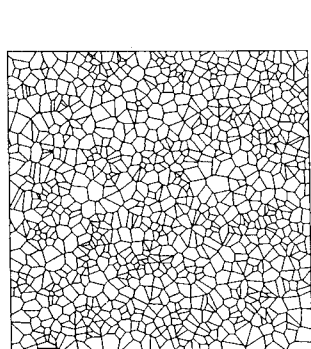


図 6 要素分割例

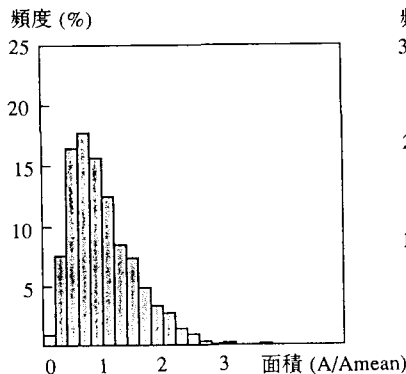


図 7 要素面積の頻度分布

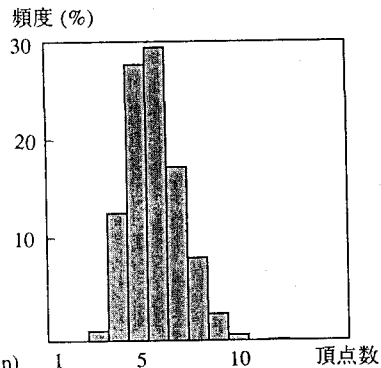


図 8 多角形の頂点頻度分布

図 8 に多角形の頂点頻度分布を示す。一般的に頂点数が 6 の場合、すなわち正六角形の場合、安定形状といわれている。図 8 に示すよう、本要素分割においても六角形要素の頻度分布が多いため、特殊な形状をした要素は少なく、比較的良好な要素分割が行われているものと推測される。

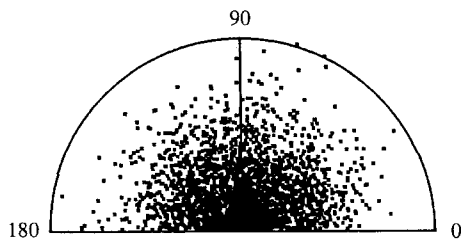


図 9 要素境界辺の分布 (方向性なし)

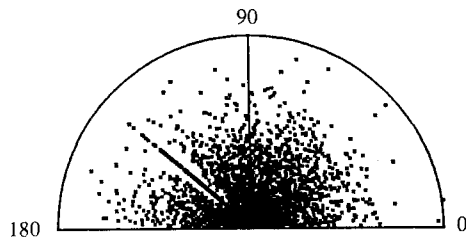


図 10 要素境界辺の分布 (方向性有り)

図 9 は図 6 のポロノイ分割例における要素境界辺の長さとその方向を極座標系で示したものである。これは線形合同法による乱数を、初期値 (17, 31) として生成したものである。一方、図 10 に初期値 (1, 4) として生成させた場合を示す。図 9 より、図 6 に示した要素分割は要素境界辺の分布に特殊な方向性を持たないことが確認できるが、図 10 は明らかに 135 度付近で方向性を持っている。計算機で生成した乱数は疑似乱数のため、要素分割の分布が一様に見えても、この様に方向性を持つことがあり、注意を要する。

4. コンクリート材料の構成則

図 11 の点線はコンクリートの 1 軸の応力-ひずみ曲線を示したものである。数値計算では、この曲線を図中の実線で示す多直線により近似する。本稿では、圧縮強度を F_c として、圧縮 1 次降伏 $F_{c1} = 0.5F_c$ 、圧

縮 2 次降伏 $F_{c2} = 0.95F_c$ 、剛性低下率 $\beta=0.5$ とした。圧縮 2 次降伏後はひずみ ϵ_{cu} (0.3%) で圧壊するまで F_{c2} を保持し、その後、 $2\epsilon_{cu}$ に達するまでひずみレベルに応じて応力を解放し、最終的に $0.2F_c$ を保持するとした。引張特性としてはテンションソフトニング効果を考慮し、ひずみの 3 次関数によりこれをモデル化する。なお、本稿ではこの効果を $\sigma - \epsilon$ 関係において、簡便的に (F_t, ϵ_t) と $(0, n\epsilon_t)$ を結ぶ 1 次関数として導入した。ただし、 n は 20 を基準とした [11]。せん断すべりは、モール・クーロンの条件を用い、降伏後は塑性流れ則に従い破壊曲面上を移動するものとした。

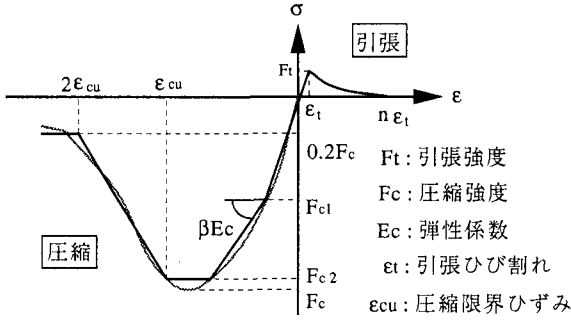


図 1.1 コンクリートの応力-ひずみ関係

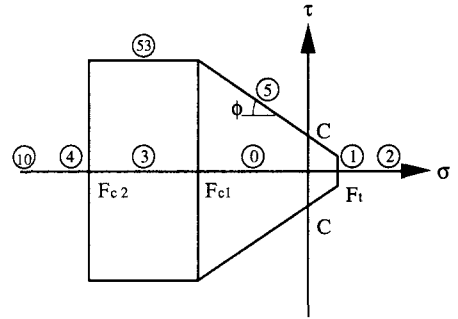


図 1.2 コンクリートの降伏破壊曲面

以上の仮定をもとに、RBSM におけるコンクリートの降伏破壊曲面を表すと図 1.2 のようになる。① はひび割れ発生、② はその残留応力が 0 になった状態で図 1.1 の $n\epsilon_t$ より右側の引張状態である。③ は圧縮 1 次降伏、④ は圧縮 2 次降伏で ⑩ は法線方向のひずみが図 1.1 の限界ひずみ ϵ_{cu} に達した状態である。⑤ はせん断すべりが発生した状態で、その後 ③ の圧縮 1 次降伏の領域に入った場合 ⑤③ の経路をたどるものとする。

5. 非線形解析法

コンクリート材料では、ひび割れが発生すると構造形態が変化し、その応力解放により崩壊荷重時近傍では解の収束性が低下する。本論文では、このような問題を避けるため、材料非線形問題の数値解析法として、 r_{min} 法 [9] による荷重増分法を拡張し、解放力を残りの荷重に加え、すべり破壊、ひび割れ、圧壊などを同時に考慮できるアルゴリズムを用いた [3][10]。簡単にこのアルゴリズムについて説明する。

現在の荷重 $P^{(i)}$ に対し荷重増分率を r_i とすれば、残りの荷重量 $P^{(i+1)}$ は

$$P^{(i+1)} = (1 - r_i)P^{(i)} \quad (1)$$

となる。したがって、第 n ステップの残りの荷重量 $P^{(n)}$ は初めに与えた荷重を P として

$$P^{(n)} = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - r_i)P \quad (2)$$

と求めることができる。このまま、ひび割れや圧壊などの応力解放を伴う破壊が生じなければ、式 (2) は r_{min} 法と同じになる。もし、第 $(k-1)$ ステップに解放力 $F^{(k-1)}$ が発生した場合は、その解放力を残りの荷重量に式 (3) のように加え合わせる。

$$P^{(n)} = \prod_{i=0}^{n-1} (1-r_i)P + \sum_{k=1}^n \left\{ \prod_{i=k}^{n-1} (1-r_i) F^{(k-1)} \right\} \quad (3)$$

ここで、 r_i は各収束段階における荷重増分率であり、第 0 ステップの増分率 r_0 は 0 とする。もし、第 k ステップにおいて解放力が生じなければ、 $F^{(k)} = 0$ とする。このようにして、初めに与えた荷重と解放力を全て使い切るまで繰り返し計算を行う。このとき、荷重増分率の合計 r_{TOTAL} を

$$r_{TOTAL} = \sum_{k=1}^n \left\{ \prod_{i=0}^{k-1} (1-r_i) r_k \right\} \quad (4)$$

とし、 $r_{TOTAL} = 1$ で収束したものと考えることができる。

上記のアルゴリズムは、荷重制御を前提に述べたものである。しかし、無筋コンクリート梁の曲げ破壊挙動は脆性的であるため、荷重制御による解析ではひび割れの進展を詳細に検討しにくい。一方、上記のアルゴリズムは、強制変位を与えることによって生ずる力を外力として考えれば、変位制御の場合にも利用することができる。そこで、本論文では、上記のアルゴリズムを変位制御に変更し解析を試みた。

6. 無筋コンクリート梁の寸法効果解析

ポロノイ要素を用いた RBSM により、図 1 3 に示す無筋コンクリート梁を解析し、寸法効果の影響について検討する。解析モデルは梁の寸法を $h=5\text{cm}$ とする No.1 試験体と、 $h=10\text{cm}$ とする No.2 試験体、 $h=20\text{cm}$ とする No.3 試験体の 3 種類とした。また、要素分割は、3 種類の梁において、ポロノイ要素の面積がほぼ等しくなる場合 (No.1 の要素数に対して、No.2 の要素数は約 4 倍、No.3 の要素数は約 16 倍) とポロノイ要素数を同一とする場合 (同じ要素分割を利用し、寸法のみ 2 倍、4 倍とする) の 2 種類とした。

1) ポロノイ要素の面積を同一とした解析

ポロノイ要素の平均面積をほぼ同一とするため、No.1 ～ No.3 試験体におけるポロノイ要素面積が、約 0.5cm^2 となるように要素分割を行った。この要素分割では、No.1 の試験体

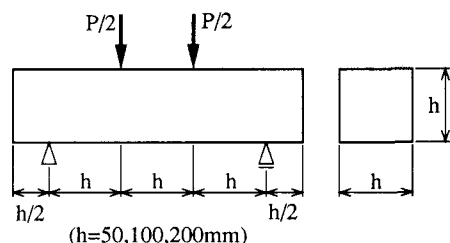
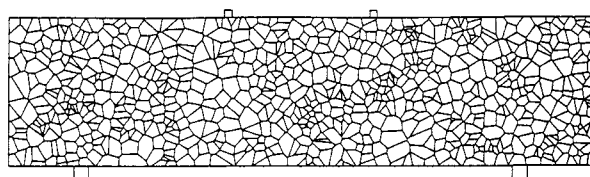
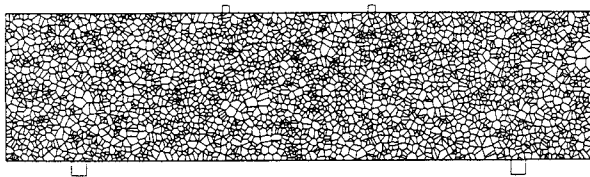


図 1 3 解析モデル



(a) No.1 試験体 (800 要素)



(b) No.2 試験体 (3202 要素)

表 1 材料定数

弾性係数 (E)	27.5 GPa
ポアソン比 (ν)	0.2
内部摩擦角 (φ)	37 deg.
圧縮強度 (Fc)	34.3 MPa
引張強度 (Ft)	2.9 MPa
せん断強さ (c)	4.7 MPa

図 1 4 ポロノイ要素分割例

で約 200 要素、No.2 で約 800 要素、No.3 で約 3200 要素となる。各試験体とも、乱数の初期値を変更し、それぞれ、2 種類の分割を行い解析した。図 1 4 に各試験体の要素分割図の一例を示す。表 1 は解析に用いた材料定数が示されている。各試験体の材料定数は同一とし、また、破壊エネルギーから評価したテンションソフトニング効果も同一の $20 \epsilon_t$ とした。

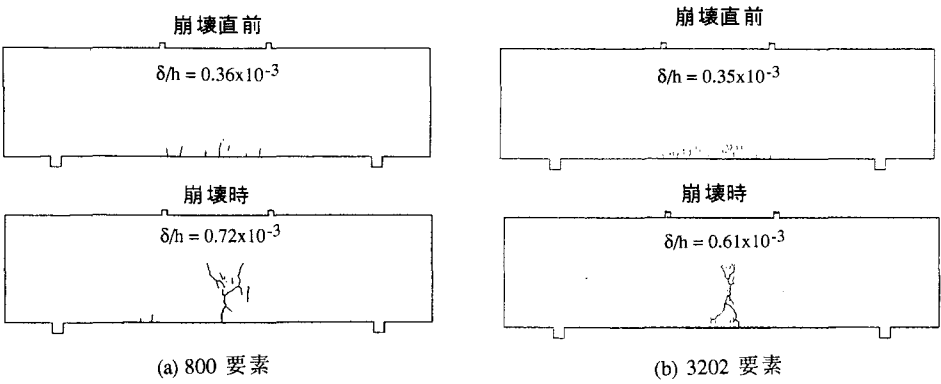


図 1 5 破壊モード

表 2 最大耐力（要素面積を同一とした場合）

	要素数	最大耐力 (kN)	$P/(h^2F_t)$
No.1 試験体	199	3.74	0.50
	200	4.19	0.56
No.2 試験体	800	13.8	0.48
	798	14.1	0.49
No.3 試験体	3202	51.6	0.45
	3198	49.3	0.42

破壊進展状況の一例を図 1 5 に示す。本解析では純曲げ区間を中心に幾つかの初期引張クラックが発生し、それらのクラックが徐々に成長した後最終的に中央部における 1 本の大きな引張クラックとなって崩壊した。この傾向はすべての試験体において得られた。各解析ケースにおける最大耐力を表 2 に、また、荷重－変位関係を図 1 6 に示す。本解析によれば、試験体サイズの増加に伴い、 $P/(h^2F_t)$ の値は減少する傾向が見られる。この値と寸法効果に関する既往の研究 [13] との関係を調べた結果を図 1 8 に示す。図からも理解できるように、両者の間には比較的類似の傾向が見られる。

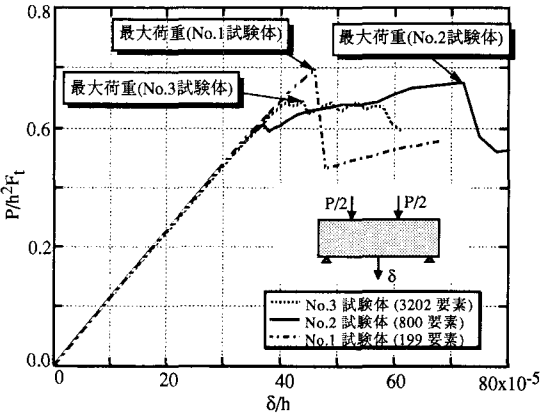


図 1 6 荷重－変位曲線（要素面積同一）

2) ボロノイ要素数を同一とした解析

次に、(1) で解析した No.2 試験体と同じボロノイ要素分割を用いて全ての寸法を 2 倍とした No.3 試験体 1/2 倍とした No.1 の要素分割を作成し、同一の要素数で解析を行った。この場合、要素面積の大きさが 4 倍あるいは、1/4 倍となるが、RBSM では要素境界辺上でひび割れが発生するため、ひび割れ間隔も 2 倍あるいは 1/2 倍となる。したがって、No.3 の試験体におけるテンションソフトニング効果は、ひび割れが要素の境界辺に生じるとして No.2 試験体の $20 \epsilon_{cr}$ に対し、半分の $10 \epsilon_{cr}$ とした。また、No.1 試験体は倍の $40 \epsilon_{cr}$ とした。その他の材料定数は表 1 と同じである。

表3 最大耐力（同一要素数）

要素数	試験体	最大耐力 (kN)	$P/(h^2F_t)$
800	No.1	4.3	0.57
	No.2	13.8	0.48
	No.3	44.7	0.39
798	No.1	4.4	0.58
	No.2	14.1	0.49
	No.3	43.3	0.37

図17にNo.3試験体の破壊の進展状況を、また最大耐力を表3に示す。この解析は要素分割を同一にしているため、ひび割れの進展状況はほぼ同じで、テンションソフトニング効果の違いにより、耐力の差異が表れている。

図18に、横軸に供試体寸法を、縦軸に曲げ強度を取った既往の実験グラフ[13]に、本解析結果をプロットした結果を示す。図からも理解できるように、サイズの増加に伴い耐力低下が認められる。

7. まとめ

乱数点を母点とするボロノイ多角形を用いて自動要素分割を行い、無筋コンクリートの崩壊解析を行った。この結果以下の事が明らかになった。

1) 線形合同法により計算機で発生させた乱数

は500点以上となるとフラクタル性が表れる。したがって、この乱数を母点とするボロノイ多角形も500要素以上の場合フラクタル性を持つものと思われる。

2) 予め破壊パターンが予想できない問題に対しても、ボロノイ多角形を用いることで、RBSMの非線形解析が不連続性の顕著な崩壊挙動を追跡するのに有効なモデルである事が検証できた。

3) 破壊エネルギーをコンクリートのテンションソフトニング効果として置き換えたモデルを用いると試験体サイズの増加に伴い、耐力の減少を表現することができる。また、要素面積を同一とした場合には、テンションソフトニング効果を同一の $20\epsilon_{cr}$ に設定しても同様の減少を得ることができた。

さらに詳細な寸法効果を検討するためには、ボロノイ要素境界辺に欠陥や強度の分布を確率的に発生させて[14]、微視的な立場から解析を試み、耐力との関係を検討する必要がある。また、今後の課題として、乱数点数や種類を変更して、破壊進行領域の特性[15]との関係を検討する必要がある。

なお、本解析は、日本コンクリート工学協会主催「コンクリート構造の破壊に関する共通解析および実験」[18]の一部として実施したものであることを付記する。

本研究を行うに当たり、川井忠彦教授（東京理科大学）、園田恵一郎教授（大阪市立大学）、吉田博博士（元金沢大学教

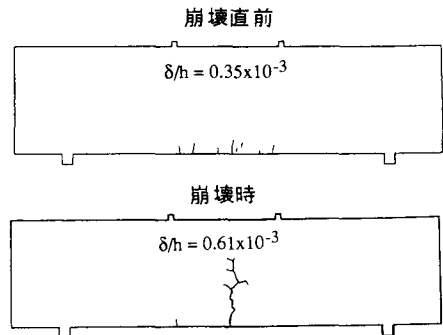


図17 破壊モード（No.2 試験体 800 要素）

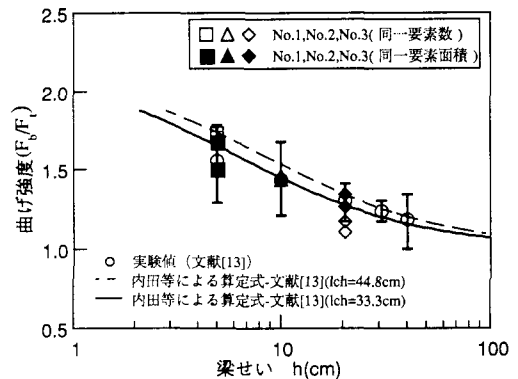


図18 梁せいと曲げ強度の関係

授)には多くのご支援を頂きました。また、富田充宏氏(石川工業高等専門学校)には、貴重なご意見を伺いました。解析に当たり、高野令男君(明星大学院生)、古谷隆氏(長大)、江良隆一君(明星大学学生)には多大な協力を頂きました。ここに記して感謝の意を表します。

参考文献

- 1) Kawai,T. : New element models in discrete structural analysis, Journal of the Society of Naval Architects of Japan, No.141,pp187-193,1977.
- 2) 川井忠彦他:鉄筋コンクリート構造物の離散化極限解析(1-3)、生産研究、Vol.38,No.4,pp181-184,Vol.38,No.5,pp208-211,Vol.38,No.6,pp212-215,1986.
- 3) 上田真稔他:引張・圧縮破壊を考慮したRC構造物の離散化極限解析、構造工学論文集、Vol.36A,pp315-323,1990.
- 4) 竹内則雄、川井忠彦:新離散化極限解析解の誤差評価について、日本鋼構造協会第15回大会研究集会マトリックス解析法研究発表論文集、pp77-82,1981.
- 5) 都井裕他:多結晶脆性体のマイクロクラッキング挙動の準微視的シミュレーション、生産研究、Vol.42,No.7,pp444-447,1990.
- 6) 伊理正夫監修:計算幾何学と地理情報処理、共立出版、1993.
- 7) 竹内則雄他:ボロノイ多角形を用いたRBSMの要素自動分割について、土木学会第48回年次学術講演会,1993.
- 8) 伏見正則:乱数、東京大学出版会、1989.
- 9) Yamada,Y et al. : Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by finite element method, International Journal of Mechanical Science, Vol.10,pp343-354,1968.
- 10) 竹内則雄、川井忠彦:すべり・接触・引張破壊を考慮した離散化極限解析法について、日本鋼構造協会「構造工学における数値解析法シンポジウム」論文集、Vol.12,pp311-316,1988.
- 11) 鬼頭宏明他:RBSMによる鉄筋コンクリートディープビームの破壊解析、コンクリート工学年次学術論文報告集、Vol.15,No.2,pp277-282,1993
- 12) 兵藤申一:割れ目の物理と平田森三、「形・フラクタル」(別冊数理科学)、サイエンス社、pp6-11,1986
- 13) 内田裕市、六郷恵哲、小柳洽:コンクリートの曲げ強度の寸法効果に関する破壊力学的検討、土木学会論文集、No.442,pp101-107,1992
- 14) 三橋博三、白井伸明、六郷恵哲:コンクリート構造への破壊力学の応用、コンクリート工学、Vol.30,No.6,pp5-17,1992
- 15) 堀井英之:フラクチャープロセスゾーン問題とコンクリート・岩石・セラミックスに対する破壊力学の体系化、構造工学論文集、Vol.35A,pp309-320,1989
- 16) 六郷恵哲、内田裕市、小柳洽:コンクリートの引張軟化特性と試験法、構造工学論文集、Vol.26A,pp325-334,1990
- 17) RILEM: Fracture Mechanics of Concrete Structures from Theory to Applications, (ed. Elfgren, L.) Chaman and Hall, NY., USA, p407,1989
- 18) コンクリート工学協会:破壊力学の応用研究委員会報告書、pp329-564,1993

(1993年9月16日 受付)