

地盤材料での変形の局所化に対する非局所作用の効果

EFFECT OF NON-LOCAL ACTION ON LOCALIZATION OF DEFORMATION
IN GEOMATERIALS

小山 茂*・堀 宗朗**・岩熊哲夫***

By Shigeru KOYAMA, Muneo HORI and Tetsuo IWAKUMA

A non-local theory is used to represent constitutive property of granular materials especially at the incipience of the deformation of localization, because it is well known that the localization of deformation which governs the ultimate states as well as inelastic behavior of geomaterials is significantly affected by the constitutive laws employed in the model analysis. Emphasis is put on the non-local action which may control the behavior of the material such as grains in the shear bands, and also on the width of such a localized band. The analyses reveal that the width of localized band is not arbitrary but is determined as some integral multiples of the size of one granule.

1. まえがき

地盤材料はその骨格間に間隙があるため微視的には離散系と考えるべきであり、金属材料をモデル化してきた連続体の持つ力学的性質とは本質的に異なるものを有している。しかし、地盤全体を解析するような土粒子よりはるかに大きな尺度で取扱う場合には、巨視的には連続体として捉えることができ、さほど微視的要素を考慮しなくとも、種々の荷重下での挙動をある程度予測することは可能である。

ところが、地盤材料の終局状態あるいはそこに至らないかなり小さい変形レベルから変形の局所化現象が観察され、そこに発生するせん断帯は、巨視的にはその厚さが無視できる不連続面として捉えられるものの、微視的には土粒子の何倍かの厚さを有し、内部の変形特性がその巨視的な挙動に大きな影響を与えていると推測されている。つまり、局所化したこの厚さそのものが土粒子の粒状体としての性質に大きな影響を受けていると同時に、逆にその変形局所帯そのものの粒子性を有する構成則が構造全体の変形挙動へも影響を与えていると考えられる。したがって、局所化の発生自体やその後のせん断帯内部の力学的挙動や性質を明らかにするためには、巨視的な取扱いのみでなく、土粒子の挙動も考慮した微視的な取扱いが不可欠となる。

粒状体としての特性を生かして地盤材料をモデル化し、変形の局所化現象を合理的に予測するために、よく用いられている方法の一つである非局所理論によるモデル解析をここでは試みる。非局所理論は、微視的には各点の応力がその点のひずみだけではなく回りのひずみにも依存して決定され、巨視的には通常の弾性論に一致する材料モデルである。地盤材料は、上述のように粒子としての性質を微視的には有しており、例えば周辺粒子の相

* 工修 東北大学大学院 工学部土木工学科 (〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉)

** Ph.D 東京大学助教授 工学部土木工学科 (〒113 東京都文京区本郷 7-3-1)

*** Ph.D 東北大学教授 工学部土木工学科 (〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉)

対的な位置変化や回転とその周辺の変形つまり抵抗はお互いに相互し合っている。また、巨視的には通常の弾性論に従う連続体と見なすことができるため、上述の特徴を有する非局所モデルで材料を記述するのは適切であると考えられる。

2. 地盤材料の非局所理論によるモデル化

地盤材料の力学的性質を決定する要因には、土粒子そのものの大きさ・形状といった粒子固有の性質、含水比・間隙比といった土の置かれている状態を示す性質等数多く挙げることができるが、ここではそのような個々の要因について検討するのではなく、微視的だが現象論的な軟化を含む構成則に従う材料の非局所性の方に着目する。対象とする問題も、実験との比較が容易なように粒子間に発生するせん断抵抗のみに着目し、図-1にあるような単純せん断を考える。

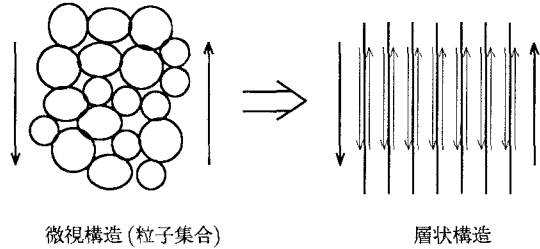


図-1 地盤材料の理想化

解析モデルは、無限の広がりを持つ地盤の、無限遠点で一方向にせん断力を作用させる問題を対象とする。材料の非局所性を調べるのが目的であるから、一次元のせん断の問題として検討する。土粒子径を a とすると、この一次元せん断モデルは図-1のように a の厚さの層状構造へと近似できる。図-2のように層の厚さ方向に x 軸を取り、第 n 層を $x = na$ に位置する質点とし、それらをせん断ばねによって連結する。非局所理論をこのモデルに適用するが、ここではある粒子がその隣接する粒子だけではなく m 個離れた粒子ともせん断ばねによって連結される。

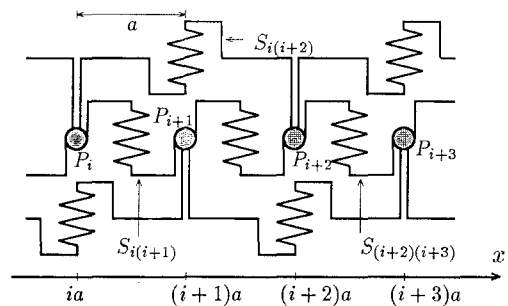


図-2 解析モデル

このモデルは、 $a \rightarrow 0$ の極限で通常の弾性論に一致するということが Kunin¹⁾によって示されている。つまりこのモデルは、巨視的 ($a \rightarrow 0$) には連続体で、微視的には粒状体をモデル化したものである。

$m > 3$ にしてもここで注目している問題点については同様の結果が得られるので、ここでは簡単のために $m = 2$ のモデルで説明する。 P_i は $x = ia$ に位置する質点を表す。また、 S_{ij} は質点 P_i と質点 P_j を結ぶばねを表し、添え字が結んでいる質点の番号に対応する。したがって、添え字の値同志の差が1であれば隣接するばねを、その差が2であればひとつおきの質点を結んだばね、つまり図-2の外側のばねを表している。 u_i を質点 P_i の変位とし、質点 P_i と質点 P_j の相対変位を

$$\epsilon_{ij} = u_i - u_j \dots\dots\dots (1)$$

で定義する。ただし ϵ_{ij} はひずみではなく、 $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$ であることに注意する。また、すべての S_{ij} が同じばね定数を有するならば、このモデルは「均一である」と呼ぶ。

3. つり合い式

均一なモデルが無限遠で外力の作用を受け均一に変形をしてつり合っている状態から、 $\delta \epsilon_{ij}^0 / (|i - j|a)$ に相当する分だけ外力を微小に減少させる。この時のばねの構成則を図-3のように仮定するが、この図のピークがつり合っている状態である。ばねはこの点で弾性除荷するか、軟化するかいずれかの履歴をたどることができる材料であるとする。もし図の A の矢印で表したようにすべてのばねが弾性除荷するならば、質点 P_i の変位は

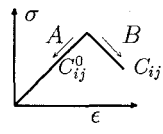


図-3 ばねの構成則

δu_i^0 だけ変化し変形は一様のままである。これに対し、一部のばねが図中の B の矢印で表した方向に軟化し、残りのばねが弾性除荷するならば、軟化したばねの伸びにより周囲のばねも次々に軟化する可能性がある。このとき、もし軟化するばねの数が有限のまま留まる状態が存在するならば、変形の局所化現象が発生するものの、その状態が一つのつり合い状態である。

このとき、質点 P_i と質点 P_j との間のばねの応力は

$$\delta \sigma_{ij} = C'_{ij}(\delta u_i - \delta u_j) = C'_{ij} \delta \epsilon_{ij} \dots\dots\dots (2)$$

だけ変化する。ここで、 $C'_{ij}(=C'_{ji})$ は S_{ij} のばね定数であり、軟化したばねの場合 C'_{ij} であり、弾性除荷したばねは C_{ij}^0 で与えられ、既知とする。 δu_i はこの時の P_i の変位増分を表す。また、式 (2) も含めてここでは添え字に関する総和規約は適用しない。よって質点 P_j に関する平衡式が

$$\sum_i \delta \sigma_{ij} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

で与えられる。また、 δu_i を

$$\delta u_i = \delta u_i^0 + \delta u_i^d \dots\dots\dots (4)$$

のように一様成分と乱れ成分に分解すると、式 (3) より δu_i で表したつり合い式が

$$\sum_i C'_{ij}(\delta u_i^d - \delta u_j^d) + \sum_i C'_{ij} \delta \epsilon_{ij}^0 = 0 \dots\dots\dots (5)$$

と導かれる。

式 (5) を解くことによりこのモデルのつり合い状態の存在を検討することが可能となるが、実際には質点の数からなる連立方程式となり、計算が非常に煩雑になる。そこで、式 (5) を直接解く代わりに、介在物問題でよく用いられる等価介在物法²⁾を用いた解析を行う。つまり、ばねの軟化によって不均一になった系を均一な系に置き換える一方で、軟化したばねには非整合成分に相当する残留応力のようなもの ($\sigma_{ij}^* = -\sigma_{ji}^*$) が分布するものとする (図-4)。等価介在物法を用いると、不均一な系の問題が均一な系に σ_{ij}^* が分布している問題に置き換えられる上に、 σ_{ij}^* が分布している区間だけを解けばよい。解は均一体のグリーン関数 $G_{ij}(=G_{ji})$ を用いれば計算は非常に簡略化されるという利点もある。ここに、グリーン関数 G_{ij} とは質点 P_j に単位の力が作用したときの質点 P_j の変位である。ここでは C'_{ij} を C_{ij}^0 によって均一化した。すると、式 (2) は

$$\delta \sigma_{ij} = C_{ij}^0 \delta \epsilon_{ij} + \sigma_{ij}^* \dots\dots\dots (6)$$

に、式 (5) は

$$\sum_i C_{ij}^0 (\delta u_i^d - \delta u_j^d) + \sum_i \sigma_{ij}^* = 0 \dots\dots\dots (7)$$

にそれぞれ書き改められる。一方、グリーン関数の定義は

$$\sum_j C_{ij}^0 G_{jk} + \delta_{ik} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

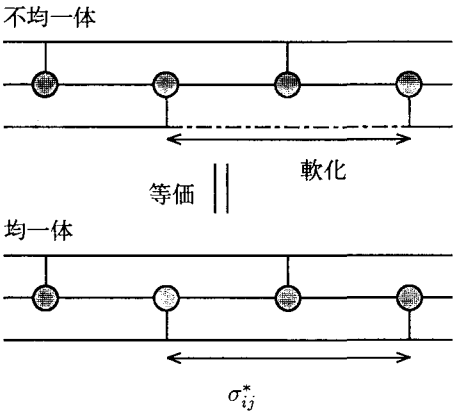


図-4 等価介在物置換

である。ここに、 δ_{ik} は Kronecker のデルタである。この式を使うことにより 式 (7) の解が求められる。

$$\delta u_i^d = - \sum_l G_{il} \left\{ \sum_k \sigma_{lk}^* \right\} \dots\dots\dots (9)$$

また、この解は 式 (5) をも満足する。更に、式 (9) を用いると、 $\delta \epsilon_{ij}^d = \delta u_i^d - \delta u_j^d$ が

$$\delta \epsilon_{ij}^d = \Gamma_{ij}(\sigma^*) = \sum_{k,l} \gamma_{ijkl} \sigma_{kl}^* \dots\dots\dots (10-a)$$

$$\gamma_{ijkl} = \frac{1}{2}(G_{il} - G_{jl} - G_{ik} + G_{jk}) \dots\dots\dots (10-b)$$

と表せる。なお、 $m = 2$ の場合の G_{ij} の具体的な形は

$$G_{ij} = \frac{a}{2C_0} \left\{ -|n| + (-1)^{|n|} \frac{2\beta}{\sqrt{1+4\beta}} \left[\frac{(\sqrt{1+4\beta}-1)^2}{4\beta} \right]^{|n|} \right\}$$

$$n = |i-j|, \quad \beta = C^0(2)/C^0(1), \quad C_0 = C^0(1) + 4C^0(2) \dots\dots\dots (11)$$

で表され、第一項目が通常の弾性論のグリーン関数、第二項目が非局所作用による影響を表す。 σ_{ij}^* は、不均一体、均一体の両者において $\delta \sigma_{ij}$ が等しくならなければならないという条件から、式 (2), (6), (10-a) より

$$(C_{ij} - C_{ij}^0)^{-1} \sigma_{ij}^* - \Gamma_{ij}(\sigma^*) - \delta \epsilon_{ij}^0 = 0 \dots\dots\dots (12)$$

で求めることができる。

さらに、Hashin & Shtrikman³⁾ の示した変分原理をこの離散化非局所モデルに応用する。任意の $s_{ij}^* (= -s_{ji}^*)$ に対して次の関数を定義する。

$$I(s_{ij}^*; \delta \epsilon_{ij}^0) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} s_{ij}^* \{ (C_{ij} - C_{ij}^0)^{-1} s_{ij}^* - \Gamma_{ij}(s^*) - 2\delta \epsilon_{ij}^0 \} \dots\dots\dots (13)$$

この関数は $(C_{ij} - C_{ij}^0) < 0$ の場合に正値二次形式となる。また、 $s_{ij}^* = \sigma_{ij}^*$ 、すなわち、 s_{ij}^* が式 (12) を満足する時に最小値になる。つまり、式 (13) を s_{ij}^* で偏微分したものは式 (12) 左辺になるから次式が成立する。

$$\frac{\partial I(s_{ij}^*; \delta \epsilon_{ij}^0)}{\partial s^*} = (C_{ij} - C_{ij}^0)^{-1} s_{ij}^* - \Gamma_{ij}(s^*) - \delta \epsilon_{ij}^0 = 0 \dots\dots\dots (14)$$

その最小値 I_{peak} は式 (12) を式 (13) に代入して整理すれば

$$I_{peak} = I(\sigma_{ij}^*; \delta \epsilon_{ij}^0) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \sigma_{ij}^* \delta \epsilon_{ij}^0 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\delta \epsilon_{ij} C_{ij} \delta \epsilon_{ij} - \delta \epsilon_{ij}^0 C_{ij}^0 \delta \epsilon_{ij}^0) \dots\dots\dots (15)$$

となる。この関数自体は何の物理的意味も持たないが、最小値は、局所化の発生によって生じるひずみエネルギーの変化である。

4. 数値解析例

式 (12) を解いてばねの変化を求めることは、式 (13) の極値を求めることと等価になることを示した。したがって、軟化するばねの本数と I の極値 I_{peak} の存在との関係求めれば、式 (12) を満たす平衡状態を求めることができる。数値解析によって局所化現象の発生の可能性を検討するが、ここでは外側のばねだけが軟化した場合と、内側のばねだけが軟化した場合の二種類のみについて解析を行った。また、 $C(2)$ および $C(1)$ はそれぞれ、外側のばね、内側のばねの軟化後のばね定数とし、用いた諸量の値はそれぞれの結果の図中に示す。

(1) 外側のばねだけが軟化した場合

図-5 に外側のばねだけが軟化した場合の軟化するばねの本数と I の極値 I_{peak} との関係を示す。軟化後のばね定数が小さくなるにつれて、単調増加型(図-5-a) から周期的に極値を持つ型(図-5-b,c)へと変化する。ここで用いた諸量では、 $C(2) = -0.235$ を境にグラフの型が変化することを確認したが、この臨界点にどのパラメータ、または、どのパラメータの組み合わせが最も大きな影響を及ぼすかということについては、明らかにできなかった。

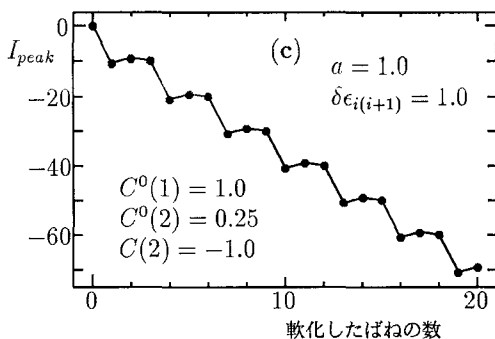
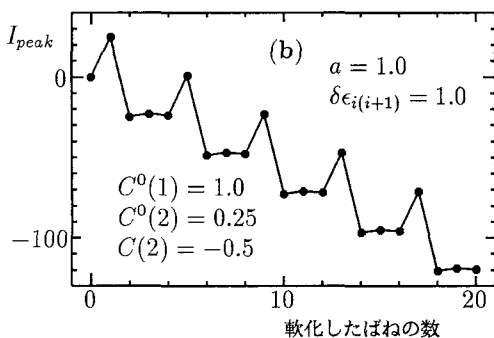
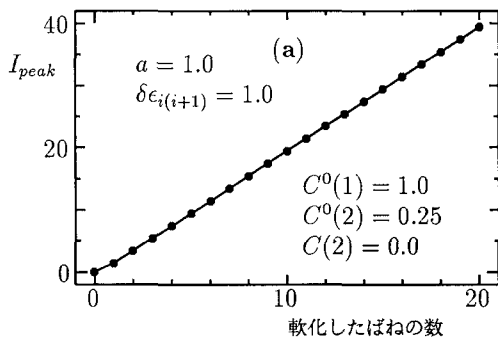


図-5 外側のばねだけが軟化した時の例

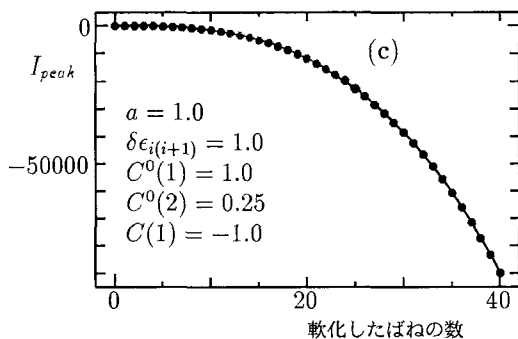
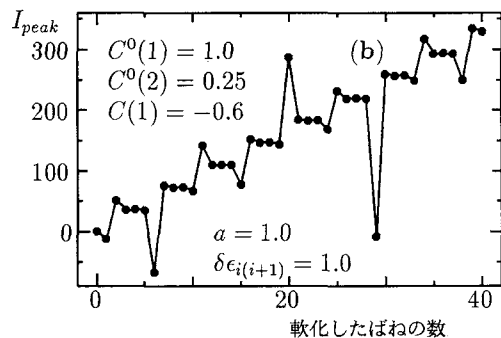
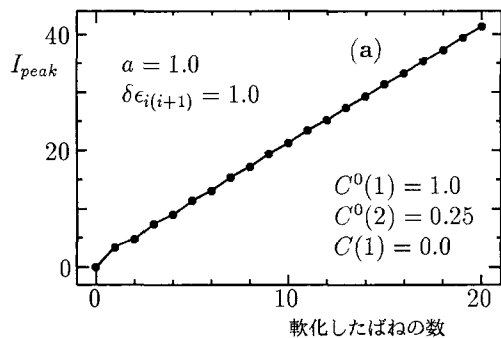


図-6 内側のばねだけが軟化した時の例

軟化するばねの本数と I の極値 I_{peak} との関係が単調増加型になる場合、 I の値が最小になるのは $n = 0$ のときである。したがって、すべてのばねが弾性除荷し、変形は様のままであるというのが式 (12) を満足する変形状態である。

一方、軟化するばねの本数と I の極値 I_{peak} との関係が周期的に極値を持つ型になる場合、図から明らかなように、軟化するばねの本数は唯一に定まるのではなく無数に存在することから、つり合い状態も無数に存在し、いわば不安定な状態にある。これは粘土等の実験でせん断帯のパターンが载荷中に様々に変化するのにも対応しているとも考えられる。このように、その軟化したばねが有限個のままつり合う状態が存在すること、さらにその個数は任意ではないことが明らかになった。

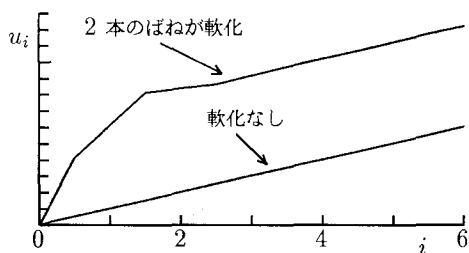


図-7-a 外側のばねだけが軟化したとき

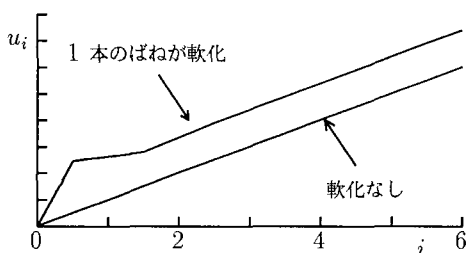


図-7-b 内側のばねだけが軟化したとき

図-7 変形の概略図

(2) 内側のばねだけが軟化した場合

図-6 に内側のばねが軟化した場合の軟化するばねの本数と I の極値 I_{peak} との関係を示す。この場合、 $C(1)$ の値が小さくなるにつれて、 $C(1) = -0.2$ を境に単調増加型 (図-6-a) から極値を持つ型 (図-6-b) へ、 $C(1) = -1.0$ を境に極値を持つ型から単調減少型 (図-6-c) へそれぞれ変化することを確認した。

前の場合と異なり、極値を持つ型において $n \rightarrow \infty$ のときに I_{peak} の値が無限大になるが、やはり、ある特定の個数の軟化ばねが存在するままつり合う状態が可能であることを示している。単調減少型の場合、 $n \rightarrow \infty$ のときに I_{peak} の値が最も小さくなることから、すべてのばねが軟化するというのが実際に起こりうる変形状態である。

(3) セン断帯の幅

図-7 に変形の典型例を示す。この図は原点に軟化したばねを置いてあり、変形は原点に対して逆対称である。図-7-a は図-5-b に、図-7-b は図-6-b に対応している。図の変形が一樣でない部分をおおまかに「せん断帯」と呼ぶことにすれば、外側のばねが軟化した場合せん断帯の幅は n を軟化したばねの総数としておよそ粒子 $(n+2)$ 個分、内側のばねが軟化した場合はおよそ粒子 $(n+1)$ 個分であり、他の例でもほぼ同様の結果が得られた。したがって、軟化するばねの本数とせん断帯の幅は一対一に対応している。

5. おわりに

非局所理論に基づいたモデルを用い、粒状体の変形の局所化現象の解析を行った。せん断帯の発生は非常に敏感に材料に依存すること、またその幅は実験で見られるようにある有限の大きさのままつり合い状態が存在することが明らかになった。しかし、今回の解析に用いたモデルは極度に理想化したものであり、また対象も無限体であったために、実際の現象との対応に関しては必ずしも十分とは言えない。モデルに粒子の性質や置かれている状態を取入れ、有限体の境界値問題を解くといったような、より現実に近いモデル解析をある程度の簡便性を保持しながら行うことが今後必要であろう。

参考文献

- 1) Kunin, I. A. : *Elastic Media with Microstructure I*, Springer Series in Solid-State Sciences, Vol.26, 1982.
- 2) Mura, T. : *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff Publ, 1982.
- 3) Hashin, Z. and Shtrikman, S. : On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.10, pp.335-342, 1962.

(1993年9月16日 受付)