

砂の様な粒状体の二重すべりモデル： 異方性の導入と非比例負荷経路への適用性

DOUBLE SLIP MODEL FOR GRANULAR MATERIALS LIKE SAND:
ANISOTROPY AND APPLICABILITY TO NON-PROPORTIONAL LOADING PATHS

飛田 善雄*
by Yoshio TOBITA

Double slip model (DSM for brevity) for the hardening behavior of granular materials like sands was modified to incorporate the effects of inherent anisotropy formed during deposition. The modified stress method, a simplified method accounting for the effects of anisotropy, was used for DSM, which was found to be satisfactory for the proportional monotonic stress path. DSM was mainly used for the description of behavior under monotonic loading paths: fully developed flow, post-peak, and prepeak hardening behavior. DSM associated with nice features like non-coaxiality and incremental non-linearity will occupy a higher position as a constitutive equation of geomaterials if it is found to be satisfactory for the nonproportional (including the rotation of principal stress axes) loadings. Possible modifications for this purpose are presented and discussed.

Key Words: double slip model, anisotropy, modified stress, constitutive model.

1 はじめに

二重すべりモデル（以下、DSMと略す）は非共軸性（塑性ひずみ速度と応力の主軸が一致しない性質）や増分非線形性（塑性負荷状態にある応力速度とひずみ速度の関係を与える構成テンソルが応力（ひずみ）速度の方向の影響を受ける性質）を本質的に備えた構成式である。DSMは単結晶の構成式^{1,2,3}や砂の様な粒状体の構成式として用いられてきた⁴⁻¹⁰。DSMの歴史と参考文献については文献11,12,13が参考になる。

ミクロな要素の複雑な運動がもたらす平均的なものとして材料挙動を見ると、非共軸性や増分非線形性は、どんな材料であれ複雑な載荷条件では観察されるべき本質的な性質と考えられる。この二つの性質が構成式として定式化され境界値問題に適用されるとき、解の分岐現象（唯一性の消失）や安定性に大きな影響を与えることが知られている¹⁴⁻¹⁶。

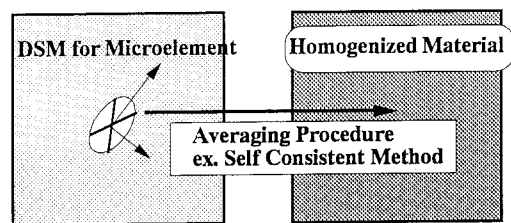
これらの性質を古典的な弾塑性体の延長として、現象論的構成式の枠組みの中で取り入れる提案は既になされている：境界曲面モデル^{17,18}あるいは接線塑性理論¹⁹。また、すべり面を様々な方向に多数分布させる多重すべり^{20,21}（以下MSMと略する）も増分非線形性を与えることが知られている。DSMは、これらの性質を示す構成式の一つとして、その物理的イメージの容易さ、数学的簡潔さから重要な位置を占める。

* 工博、八戸工業大学助教授 工学部土木工学科、〒031八戸市妙字大開88-1

多結晶金属の単結晶の微視的モデル、砂の様な粒状体の巨視的モデルの定式化として共通に利用されるDSMであるが、その取り扱いには根本的な違いがある。単結晶の微視的モデルではすべり面は金属組織学的にすべりに対する最弱面となり、結晶軸からの相対的方向は明確に指定される。さらに隣接する要素との相互作用を評価し、適当な平均化手法を用いて巨視的な構成式を求める²²⁾目的に用いられる(図-1(a)参照)。これに対して、砂の様な粒状体では、特にひずみ硬化領域では、すべり面に対して何らかの物理的意味を考えることは難しい。本研究では、すべり面を応力特性曲線あるいは最大傾度面(応力比が最大となる面)とする仮定は設けない。この仮定はDSMの適用性を著しく制限してしまう。本研究では、すべり面は載荷条件によって変化する一種の変数として考える。すなわち、塑性ひずみ速度や適切な負荷条件、硬化状態を与えるための参照面として考えることにする。また、DSMを微視的要素に用いるのではなく、平均化手法は考慮せず、直接に巨視的構成式に用いる。簡単に述べると、砂の様な粒状体のDSMは金属と比べて、物理的基礎および手法は明確ではないという結果となっている(図-1(b)参照)。数学的には、均質な変形を行っている物体に、面を指定するベクトル量を2個与え、その面に独自の負荷条件を与えることによりモデルとしての自由度を高め、より多様な変形挙動の表現を可能にしていると考えられることができる。

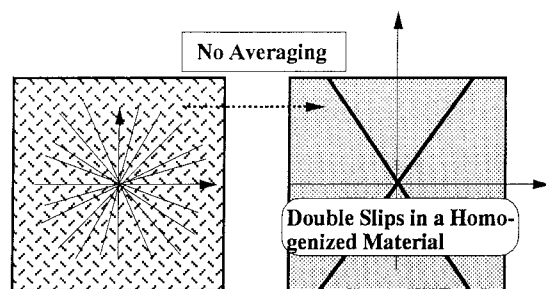
本研究では、砂の様な粒状体のひずみ硬化時の変形挙動の表現にDSMを採用し、異方性の効果を修正応力法²³⁾により表現し、これを修正二重すべり(MDSM)と呼ぶ。本文では異方性を表現する構造テンソルの発展則は与えずに、初期異方性のみを対象とした議論を行なう。しかし、適切な発展則が得られれば、修正応力法により誘導異方性が変形挙動に及ぼす影響も表現できる。砂の場合では、DSMの適用性は単調比例負荷経路あるいはわずかにずれた経路について議論されてきた。しかしながら、DSMの最大の特徴である非共軸性や増分非線形性がより重要となるのは、非比例負荷経路における変形挙動である。塑性ポテンシャルを用いる古典的な弾塑性体と異なり、DSMが非比例負荷時の変形挙動を表現する可能性は従来より示唆されてきたが、具体的にそれを検証した研究は見当たらない。本文では、主応力軸の回転のみが生じるという極めて限られた応力経路に適用し、実験事実と比較することにより、非比例負荷経路におけるDSMの適用性を議論する。また、実験事実と整合性をもたせるための修正についても定性的な議論を行なう。

本文中では、直交デカルト座標系における指標表示と総和規約(1つの項に2度同じ指標が現われたら、和をとる)を採用する。議論は平面変形状態に限定し、微小ひずみの範囲で定式化する(有限変形理論における定式化は、例えば文献(1-8)が参考になる)。応力、ひずみについては、演算時の混乱を避けるために、引っ張りを正とする約束を用いる。



Double Slips in Polycrystals

図1-a: 多結晶金属における二重すべりモデル



Double slips in Granular Materials

図1-b: 粒状体における二重すべりモデル

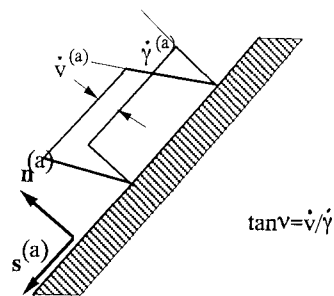


図2-b:すべり面上の運動：ダイレイタンスを伴う単純せん断運動

のようになる（以下、混乱が生じない場合には簡単のために、 $(\alpha), (\beta)$ などの上添え字は省略することがある）：

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{p(a)} = P_{ij} \dot{\gamma}^{(a)} : \text{with } P_{ij} = \frac{1}{2}(s_i n_j + n_i s_j + 2 \tan v n_i n_j); \tan v = \dot{v}/\dot{\gamma} \quad (2)$$

座標系を主応力軸と一致させ、さらにダイレイタンスー速度を定義する $\tan v$ を2つのすべり面で共通と仮定した時、式は簡単になり、

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{11}^p &= [(\cos(\xi - v) + \sin v)/(2 \cos v)](\dot{\gamma}^{(\alpha)} + \dot{\gamma}^{(\beta)}) \\ \dot{\epsilon}_{22}^p &= -[(\cos(\xi - v) - \sin v)/(2 \cos v)](\dot{\gamma}^{(\alpha)} + \dot{\gamma}^{(\beta)}) \\ \dot{\epsilon}_{12}^p &= [(\sin(\xi - v))/(2 \cos v)](\dot{\gamma}^{(\alpha)} - \dot{\gamma}^{(\beta)}) \end{aligned} \quad (3)$$

非共軸性が現われるためには、2つのすべり面のせん断ひずみ速度が異なることが必要となる。粒状体のひずみ硬化挙動では、 ξ が v と等しいと仮定する根拠はないので $\dot{\gamma}^{(\alpha)} \neq \dot{\gamma}^{(\beta)}$ のもとで非共軸性を与えることになる。ここでは、 ξ はAnand⁸⁾にならって、内部摩擦角 ϕ とは異なるものと仮定する。ここに、 $\phi = \sin^{-1} |(\sigma_1 - \sigma_2)/(\sigma_1 + \sigma_2)|$ 。 $\xi = \phi$ の場合には、すべり面は力の釣り合い条件とMohr-Coulombの降伏条件による応力特性曲線と等しくなる。しかし、この場合DSMの適用性は大きく限定されてしまうことになる。特に、本文で検討する主応力回転のみが生じる場合には塑性ひずみ速度は0という結果を与えることになる（第5章参照のこと）。

2つのすべり面のせん断ひずみ速度が異なる状況を合理的に与えるために、異方性の導入を考える。ここでは、異方性の導入のための簡便な手法である修正応力法^{9,23,25)}あるいは変換応力法²⁴⁾を用いる。修正応力法とは、異方性を加味した応力（修正応力）を考え、修正応力空間ではひずみ速度と修正応力速度の関係として従来の等方物体の構成式を与え、修正応力を応力に変換することにより、ひずみ速度と応力速度の異方的関係式が与えられるとする手法である。数学的には演算の段階で異方性を表現する構造テンソル $\mathbf{H}$ の関数としての4階のテンソル $\mathbf{L}$ が乗じられたものとなる。構造テンソル $\mathbf{H}$ はある微視的な幾何学的量（例えば、粒子間の接触面の方向など）に着目し、その分布を2階のテンソルとして表現したものである²³⁾。ここでは、物理的な意味をもつ次式の修正応力を利用する。

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_{ik} H_{kj} + H_{ik} \sigma_{kj}) \quad (4)$$

例えば、修正応力の変化、塑性負荷の基準などは次のように $\mathbf{L}$ を乗じた形で記述されることになる。

$$\dot{T}_{ij} = (\partial T_{ij} / \partial \sigma_{kl}) \dot{\sigma}_{kl} = L_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl}; L_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik} H_{lj} + H_{ik} \delta_{lj}) \quad (5)$$

$$(\partial f / \partial \sigma_{ij}) \dot{\sigma}_{ij} = (\partial f / \partial T_{kl}) (\partial T_{kl} / \partial \sigma_{ij}) \dot{\sigma}_{ij} = (\partial f / \partial T_{kl}) L_{kl ij} \dot{\sigma}_{ij}$$

ここに、 δ_{ij} はKroneckerのデルタである（ $\delta_{ij}=1, i=j; \delta_{ij}=0, i \neq j$ ）。2つのすべり面に対して、それぞれ独立に負荷条件式を与える

$$f = \tau^* - \mu^* \sigma^* = 0 \quad \text{ここに} \quad \tau^* = s_i T_{ji} n_j; \quad \sigma^* = -n_i T_{ji} n_j \quad (6)$$

印は修正応力によって定義された量であることを強調するために用いた。 μ^ は硬化パラメータである。ここで、すべり面における通常のせん断力と垂直応力も合わせて定義しておく。

$$\tau = s_i \sigma_{ji} n_j; \quad \sigma = -n_i \sigma_{ji} n_j; \quad \text{and} \quad \tan \phi_t = \tau / \sigma \quad (7)$$

式(6,7)の中で、 τ , σ , ϕ_t は2つのすべり面で同じ値をもつ（主応力軸に対称に設置されているので）、しかし、 τ^* , σ^* , μ^* は、主応力軸と構造テンソルの主軸が一致しない限り、2つのすべり面における値は相異なるものとなる。

2つのすべり面に共通の硬化則を、 $\mu^{*(a)}$ と $\gamma^{(a)}$ の関係として与える。

$$\mu^{*(a)} = g(\gamma^{(a)}); \quad \gamma^{(a)} = \int \dot{\gamma}^{(a)} dt \quad (8)$$

両辺を微分して次式を得る。

$$\dot{\gamma}^{(a)} = (\partial g / \partial \gamma)^{-1} \dot{\mu}^{*(a)} \quad (9)$$

式(9)の右辺は、主応力軸と構造主軸が一致しなければ異なる値をもつことになる。従って、2つのすべり面のせん断ひずみ速度は異なるものとなる。すべり面の負荷条件の適合性の条件（塑性負荷の場合、応力は負荷曲面上に存在しなければならない）を利用して次式を得る（ここの定式化では、構造テンソルの変化（発展則）は考えない。）。

$$\dot{\mu}^* = Q_{kl} \dot{\sigma}_{kl} / \sigma^*; \quad \text{where} \quad Q_{kl} = (\partial f / \partial \sigma_{kl}) = (\partial f / \partial T_{pq}) L_{pqkl} \quad (10)$$

$$\text{ここに、} (\partial f / \partial T_{pq}) = s_p n_q - \mu^* n_p n_q \quad (11)$$

2つのすべり面における負荷基準は次式で与えられる：塑性負荷： $\dot{\mu}^* > 0$, 中立負荷： $\dot{\mu}^* = 0$, 弾性除荷： $\dot{\mu}^* < 0$. 負荷曲面内($f < 0$)では弾性変形のみが生じる。

硬化関係式を双曲線で与える。

$$\mu^* = \gamma / (A + B\gamma) \quad (12)$$

ここにAとBは材料定数である。(1/A)は初期の塑性せん断ひずみ速度を決定し、(1/B)はせん断ひずみが無限大となったときの μ^* が漸近する値を決定する。

ダイレイタンスー係数 $\tan v$ は構造異方性の影響を考えず（実験では、ダイレイタンスー速度は異方性の影響を受けないとされる）、次式で共通するように与える

$$\tan v = \tan(\phi_t - \phi_c); \quad \phi_c \text{ a material constant} \quad (13)$$

ここに、 ϕ_c は砂粒子の摩擦係数と関係する材料定数である。以下、 v をダイレイタンスー角と呼ぶ。

弾性ひずみ速度についても、修正応力法を適用すると、次式が得られる。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = C_{ijkl}^e \hat{T}_{kl} = C_{ijkl}^* \dot{\sigma}_{kl} \quad (14)$$

ここに、

$$C_{ijkl}^e = -(v/E) \delta_{ij} \delta_{kl} + \{(1+v)/E\} \delta_{ik} \delta_{jl}; \quad \text{and} \quad C_{ijkl}^* = C_{ijpq}^e L_{pqkl} \quad (15)$$

である。EはYoung率、 ν はPoisson比である。以上の式をまとめると次のようになる

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \{C_{ijkl}^* + \sum_{a=1}^2 [1/(H_p^{(a)})] P_{ij}^{(a)} Q_{kl}^{(a)}\} \dot{\alpha}_{kl} \quad ; a = \alpha, \beta \quad (16)$$

ここに、 $H_p = \sigma^*(d\mu^*/dy)$ であり、塑性係数と呼ぶ。

3 単調比例負荷経路における挙動

3.1 応力比－せん断ひずみ－ダイレイタンスー関係

2次元問題に限定するとき、次の3つの量が応力を表現するのに便利である。

$$P = -\frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \quad Q_1 = \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}), \quad Q_2 = \sigma_{12} \quad \dots\dots\dots (17)$$

あるいは同等の表現で、

$$P = -\frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \quad Q = \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}, \quad \psi = \frac{1}{2} \tan^{-1}(Q_2/Q_1) \quad \dots\dots\dots (18)$$

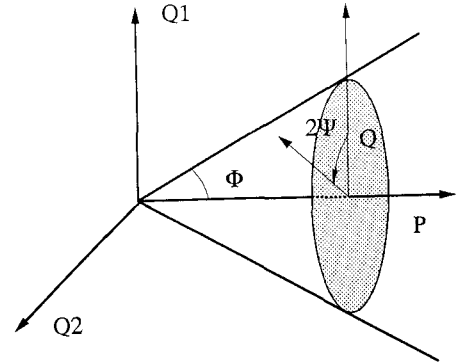


図3: 2次元応力状態を表現する便利なパラメータ

が得られる（図3参照）。

本論文における、単調比例負荷経路は次式で定義される。

$$\dot{P} = 0, \quad \dot{\psi} = 0, \quad \text{and} \quad \dot{Q} \neq 0 \quad (19)$$

一方、主応力軸回転経路は次式で定義される。

$$\dot{P} = 0, \quad \dot{Q} = 0, \quad \text{and} \quad \dot{\psi} \neq 0 \quad (20)$$

本節では、主応力軸が回転しない比例負荷経路での異方的な挙動のシミュレーションを行なう。いま応力軸の方向が構造主軸（堆積面の法線方向）となす角を Ψ と表し、 $\Psi=0, \pi/6, \pi/3, \pi/2$ に変化させて載荷を行なう。構造主軸を座標系にとり、実験結果と整合性のよい $H_1=1.05, H_2=0.95$ を初期異方性として採用した。図4が計算結果であり、図4-aは応力比－せん断ひずみ関係、対応するダイレイタンスーと応力比の関係を図4-bに示している。計算に用いたパラメータは表1に示している。計算結果はあるせん断ひずみにおける応力比が $\Psi=0$ から $\pi/2$ に変化するにつれて減少していく結果となっている。この挙動は実験結果とは必ずしも一致しない。実験結果では、 $\Psi=\pi/3$ 近傍で強度が極小値を示す結果が多い。この極小値については、砂の粒子物性が違ふと起こらない場合があるという実験結果も報告されており、今後の詳細な検討が必要とされる。このような極小値の表現を、ここで用いたような、より複雑な関数形をもつ、修正応力法で表現することは可能である（例えば、文献24, pp.67-97）。しかし、このような極小値を示す場合、特に不連続な場合は、他の角度とは全く相異なる微視的メカニズムが破壊の主たる要因となり、このような不連続な減少が生じているものとも考えられ、単に数学的表現に頼るのは危険である。

表1 数値計算に用いた材料定数

弾性定数 (式(15))	: $E=3.86 \times 10^5 \text{ kPa}, \nu=0.286$
摩擦定数 (式(13))	: $\phi_c=0.400(\text{in radian}, =23^\circ)$
材料定数 (硬化関数; 式(12))	: $A=0.012, B=1.340$
すべり面の方向 (式(3))	: $\xi=\pi/6(\text{一定})$
異方性の程度 (式(4))	: $H_1=1.05, H_2=0.95$ (構造テンソル $\mathbf{H}$ の主値である), もしくは等方を仮定する

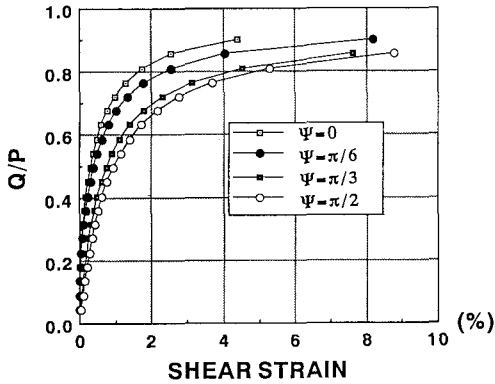


図4-a:MDSMによる異方的な応力比－せん断ひずみ関係

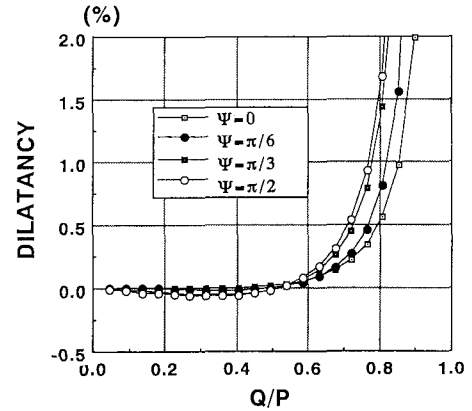


図4-b:MDSMによる応力比－ダイレイタンスー関係

計算による非共軸性の程度は 3.4° 程度であり、実験結果²⁰⁾の $5\text{--}6^\circ$ と同程度の値を示している。修正二重すべりモデルでは、非共軸性の程度は、载荷が進むにつれて、応力比の影響が次第に卓越してくるので、小さくなっていく²³⁾。

3.2 せん断帯解析への適用

MDSMは増分非線形性を示すモデルであるから、解の唯一性（ここでは、せん断帯発生に限定する）安定性を検討することは容易ではない^{15,16)}。ここでは、試行的な結果として、2つのすべり面が同時に活動するときの接線剛性が最初にせん断帯発生の必要条件を満たすと仮定する線形解析を行った結果について述べる。

無限体の中に発生するせん断帯の解析は多くの文献^{9,16,26,27)}に記述されているので割愛する。せん断帯の発生条件は次式で決定される。

$$A_{ik}g_k=0 \quad (21)$$

ここに g_k はせん断帯内部と外部の速度勾配のギャップである。上式が有意な解($g_k=0$ 以外の解)をもつためには、

$$\det[A_{ik}]=0 \quad (22)$$

ここに、 A_{ik} は接線剛性 $D_{ijkl}(\dot{\sigma}_{ij}=D_{ijkl}\dot{\epsilon}_{kl})$ と想定したすべり面の法線ベクトル $\mathbf{n}$ の関数であり、

$A_{ik}=D_{pik}q_p n_q$ となる。式(22)を最初に満足する方向がすべり面の方向を規定し、そのときの応力状態がせん断帯の発生条件をみだすことになる。載荷に伴い、想定したすべり面の方向に対して $\det[A]$ がどのような分布をとるのかも構成式を特徴付けるものとなる。

比較のために、単調載荷時には、図-4と同様の応力ひずみ関係を与える修正非関連流動則（以下、MNAMと表現する）に基づく構成式²³⁾に関しても同様の計算を行なった。MNAMはDrucker-Pragerタイプの降伏条件をもち、塑性偏差ひずみ速度については、偏差直交性（降伏関数の偏差法線方向に偏差塑性ひずみ速度が発生する）を利用し、ダイレイタンスを消散エネルギー式に基づいて独立に決定する、という数学的構造をもつモデルである。

図-5は想定するすべり面の角度に対して、 $Q/P=0.48$ において、 $\det[A]$ がどのように分布するかをMDSMについて計算した結果を示している。 $\Psi=0, \pi/6$ については最大主応力（最小圧縮応力方向）より角度をとり、 $\Psi=\pi/3, \pi/2$ については 90° ずれた最小主応力方向を0として、図を作成している。 $\det[A]$ が最小となる角度はいずれの Ψ についてもほぼ同様の結果となり最大主応力（最小圧縮応力方向）より 60° 程度となる。方向に対しては、MDSMの場合、異方性の影響はあまり影響がないという計算結果となっている。

図-6は $\Psi=0$ の場合について、MDSMとMNAMの計算結果を比較したものである。特徴的なことはMDSMの $\det[A]$ の値が全ての角度で比較的小さい値となっているのに対して、MNAMでは、 60° 以外の方向での $\det[A]$ が大きく、特定の方向以外では、せん断帯の発生の可能性は極めて低いという結果となっているところである。

MDSMのように増分非線形構成式は、特定の方向以外でもせん断帯を発生する可能性が高いことを示している。どちらの結果が現実的かを断定しうる実験結果は存在しないが、せん断帯の方向が、粒子径などの影響を受けて、大きく変動するという結果¹⁶⁾を考えるとMDSMのほうがせん断帯の解析には有利であるといえる。

4 主応力回転時の挙動

比例負荷経路で妥当な満足すべき結果を与えたMDSMのパラメータを変えずにそのまま主応力回転時の変形挙動の予測に用いた結果を最初に示す。すべり面の方向を決定する ψ は 30° にしている。図-7は $P=100\text{kPa}$ 、 $Q=60\text{kPa}$ と固定し、主応力軸を回転させたときの等方粒状体の各ひずみ成分の挙動を示す。図-8に示すMiuraの実験結果²⁸⁾と比較すると各ひずみ成分の極値を与える角度が異なっている。このこ

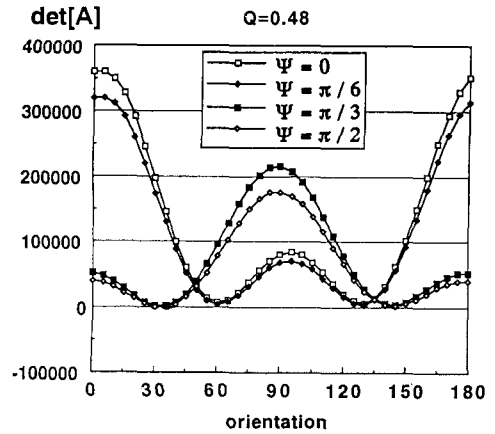


図5: 想定したせん断面の方向と $\det[A]$ の関係

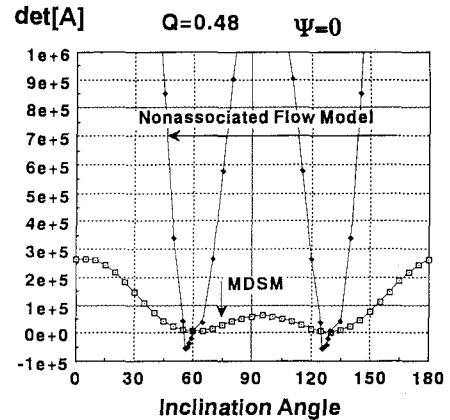


図6: 二重すべりモデルと非関連流動則に基づくモデルの $\det[A]$ の分布の違い

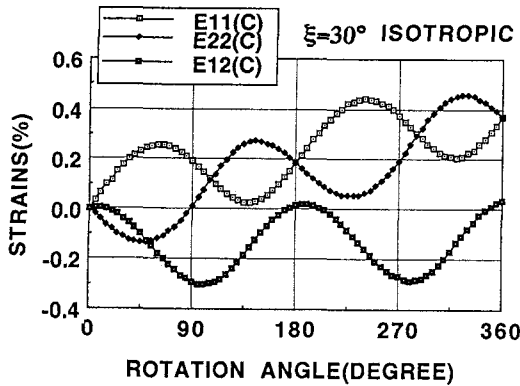


図7:二重すべりモデルによる主応力回転時のひずみの発生状況（等方粒状体）

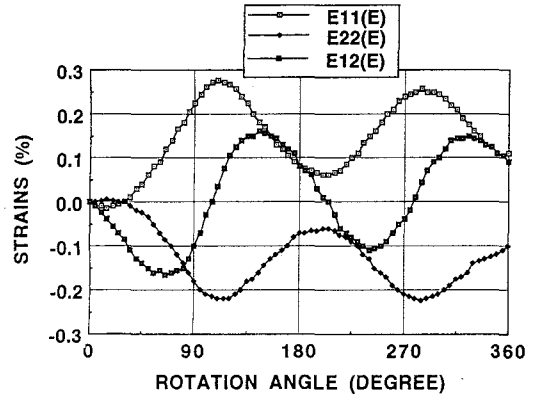


図8: 主応力回転時のひずみの発生状況（実験；Miura(1985)による）

とは、非共軸性の程度がMDSMと実験とは全く異なることを示している（5章参照のこと）。

また図-9は体積ひずみの挙動を比較した図である。MDSMでは単調に膨張が生じているのに対して、実験ではほぼ体積ひずみ 0 の周辺で振動する結果となっている（すなわち、 $Q/P=0.6(\phi=36.9^\circ)$ は単調载荷では、ダイレイタンスは膨張であるのに主応力回転のみではほとんど定体積あるいは体積収縮が生じる）。

図-10は、異方性を取り入れた場合の計算結果である。ひずみは大きく発生し、ひずみが進行する角度と停滞する角度に分れている。この結果は、比例負荷経路で良好な結果を与えるすべり面の異方的硬化則が、主応力回転時の変形挙動には必ずしも適用できないことを示す計算結果と考えることができる。

以上の計算結果に基づいて、二重すべりモデルを主応力回転を含む非比例負荷経路に適用するための基本的考察次に与える。

5 非比例負荷経路への二重すべりモデルの修正に関する基本的考察

与えられた応力速度に対して、実験事実と定性的にでも一致するようなひずみ速度が得られるかどうかについての基礎的な要素は次の3つに分類できる：

- (1) ひずみ速度全体の大きさ
- (2) ひずみ速度成分の方向性：非共軸性の程度

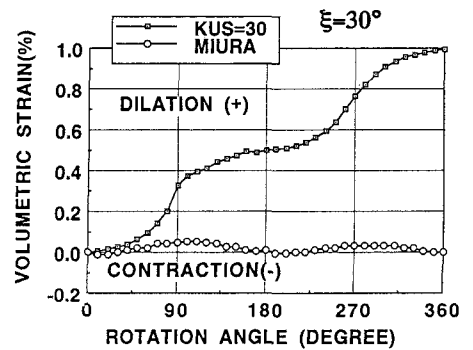


図9:二重すべりモデルによる主応力回転時のダイレイタンス挙動（等方粒状体）

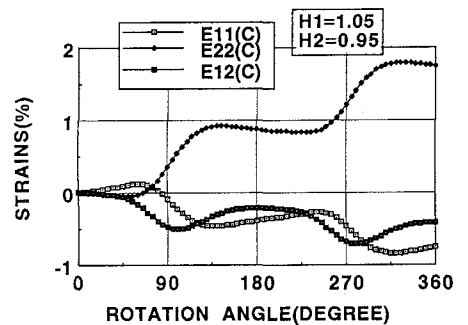


図-10:異方性を考慮した場合の二重すべりモデルのひずみ挙動（主応力回転時）

(3) ダイレイトンシー速度

主応力軸のみが回転するような応力経路における2つのすべり面の塑性負荷は、式(11)、式(12)を利用して、次式で与えられる。以下、簡単のために等方粒状体を考える。

$$\frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = \left(\frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \sigma_{12}} + \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \sigma_{12}} \right) \dot{\sigma}_{12} = \pm \left[\frac{\sin \phi - \sin \xi}{1 - \sin \phi \sin \xi} \right] \dot{\sigma}_{12} > 0 \quad (23)$$

+は α すべり面、-は β すべり面に対する符号ある。この式より、 $\dot{\sigma}_{12} > 0$ および $\phi > \xi$ のもとでは α すべりが負荷条件を満たし、 β が弾性除荷となる。 α すべりに対して $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$ は正であるから、非共軸の程度は、式(3)に $\dot{\gamma}^{(\beta)}=0$ を代入して、

$$\delta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\dot{\epsilon}_{12}^p}{\dot{\epsilon}_{11}^p - \dot{\epsilon}_{22}^p} \right) = \frac{1}{2} (\xi - \nu) \quad (24)$$

と求められることになる、この式よりDSMの非共軸性の程度はすべり面の方向を指定する ξ とダイレイトンシー角 ν により支配されることが解かる。(3)のダイレイトンシー特性、すなわち、主応力軸回転時には高応力比であっても、正のダイレイトンシーはでにくいという性質を表現しようとすれば、 ν は 0° 近傍の値を設定する必要がある。 $\nu=0^\circ$ と設定したとき、 ξ の取りうる値は、実験事実²⁸⁾ ($\delta=20-30^\circ$) と一致させるためには、少なくとも $\xi=40^\circ$ 程度が必要となる。このとき、 $\phi > \xi$ であっても、その値はかなり近いものとなり、(23)式より負荷の程度が小さくなり、塑性ひずみ速度の大きさの調整が必要となる。

あるいは、非共軸性の程度をあわせるために、 $\xi=20^\circ$, $\nu=-20^\circ$ のような値を取ると、非排水に近い条件のもとで使用したときに、かなり不安定な結果をもたらす構成式となってしまう合理的でない(負のダイレイトンシーは非排水条件下での不安定な挙動に最も大きな影響を与える²⁹⁾。

以上のように、DSMにより主応力回転時の塑性ひずみ速度の方向すなわち非共軸性の程度を適切に表現することはかなり難しい。このことは、MSMとの比較を行なうと理解できる(図-1(b)参照)。すなわち、実際に主応力回転時には、比較的低応力レベルのすべり面が多数活動し、全体の塑性ひずみ速度の方向を決定するというメカニズムが起こっているものと考えられる。このメカニズムを二重すべりモデルの主応力軸に対称な2つのすべり面で代表させることはできない、という背景があるものと考えられる。

もし、非共軸性の程度を問題にしなければ、ダイレイトンシーとひずみ速度の大きさを定性的に合わせるのそれはど困難なことではない。すなわち、塑性係数 H_p が比例負荷時と同一のものとすると、ひずみ速度の大きさが $(\phi-\xi)$ の大きさに支配されることになる(式(23))。実験事実と同程度の大きさを与えるためには、 ξ の値を調整することになる。これに対応して、ダイレイトンシー速度は例えば主応力回転の影響を表すパラメータ α ($0 < \alpha < 1$)を導入して

$$\tan \nu = \tan(\alpha \phi_t - \phi_c) \quad (25)$$

の様な定式化を行えば、ダイレイトンシー速度を実験事実に見合ったものとするができる(このときダイレイトンシー係数の決定にも増分非線形性を取り入れたことになる)。

また、修正応力法を用いて、異方的硬化則を与えた場合には、異方性(あるいは構造テンソル)の妥当な発展則を与えないと(載荷に伴う誘導異方性を適切に表現しないと)、高応力比状態である方向で過剰なひずみ速度(図-10参照)を与えるという結果が得られる場合がある。どのような構成式で

も、内部変数の妥当な発展則を与えることは難しいことであるが、砂の様な粒状体の場合には、次の実験事実³⁰⁾は定式化の際に参考になる：

- (1) 砂の様な粒状体の内部構造は二つに分類できる。すなわち、粒子の長軸方向の分布のように、破壊するまでにほとんどその分布を変えないもの。粒子間の接点の法線方向のように容易にその分布を変えるもの。
- (2) 粒子間の接点の法線方向の分布は主応力軸方向と共軸性を示すように変化すること。

応力主軸と構造テンソルの主軸が常に一致するように、構造テンソルの発展則を決定すると、図10に示すような過剰なひずみの発生は押さえることができるという試行的結果を得ている。このとき、発展則は、共軸性を表現する式 ($H_{ij} = a_0 \delta_{ij} + a_1 \sigma_{ij} + a_2 \sigma_{ik} \sigma_{kj}$; ここに、 a_0, a_1, a_2 は応力の不変量のスカラー関数である) を微分すれば容易に理解できるように、応力増分の方向に依存する増分非線形性を持つことになる。

以上の議論を整理すると次のようになる。

- (1) 主応力経路での非共軸性の程度を表現することは、DSM では本質的に難しい。
- (2) 主応力回転時におけるダイレイタンスを妥当に評価するためには、応力速度の方向に依存するような定式化が必要である。

上記2つの性質は等方性、異方性を問わず、二重すべりモデルに共通する性質である。

- (3) 異方性の影響を表現できるMDSMを用いる場合、過剰な塑性ひずみの発生を押さえるためには、異方性を表現している構造テンソルの妥当な発展則を定式化する必要がある。その発展則は増分非線形性を示す可能性が高い。

以上の議論から理解できるように、非比例負荷経路で重要となる非共軸性および増分非線形性を表現する可能性をもつ二重すべりモデルであるが、定量的にも一致するようなモデルを構築するためには、便宜的な修正では十分ではなく、増分非線形性をも考慮した根本的な再構築を考える必要がある。

6 結論

砂のような粒状体の複雑な変形挙動あるいは境界値・初期値問題の解の唯一性・安定性を議論する際に大事な性質である非共軸性・増分非線形性を表現する修正二重すべりモデル(MDSM)を比例負荷経路とせん断帯の発生条件に適用し、その有効性を確かめた後、非比例負荷経路への適用性について議論した。代表的な非比例負荷経路として、実験事実の豊富な主応力回転時の挙動に関して比較検討した。その結果、非共軸性の程度を表現することが本質的に難しいことが解かった。非共軸性の程度の表現が重要でない場合の定式化について、その可能性を議論した。砂の様な粒状体の単調な比例負荷経路における変形・破壊挙動の解析に有効な二重すべりモデルであるが、非比例負荷経路における変形挙動を表現するためには、古典的現象論の構成式同様、根本的な再構築を考える必要が明確に示された。

参考文献

- 1) Asaro, R.J.: Micromechanics of crystals and polycrystals, *Advances in Applied Mechanics*, 23, pp.1-115, 1983
- 2) Nemat-Nasser, S.: On finite plastic flow of crystalline solids and geomaterials, *J. Appl. Mech.*, 50, pp. 1114 - 1126, 1983
- 3) Dafalias, Y.F.: Planar double-slip micromechanical model for polycrystal plasticity, *J. Engng. Mech. ASCE*, 119, 6, pp.1260-1284, 1993
- 4) Spencer, A.J.M.: A theory of kinematics of ideal soil under plane strain conditions, *J. Mech. Phys. Solids*, 12, pp.337-351, 1964
- 5) Spencer, A.J.M.: Deformation of ideal granular materials, in *Mechanics of Solids* (eds. H.G. Hopkins and M.J. Sewell), Pergamon Press, Oxford, pp. 607-652, 1982
- 6) Mehrabadi, M.M. and S.C. Cowin: Initial planar deformation of dilatant granular materials, *J. Mech. Phys. Solids*, 26, pp.269-284, 1978
- 7) Mehrabadi, M.M. and S.C. Cowin: Prefailure and post-failure soil plasticity models, *J. Engrg. Mech.*, 106(5), pp.991-1003, 1980
- 8) Anand, L.: Plane deformation of ideal granular materials, *J. Mech. Phys. Solids*, 31(2), pp.105-122, 1983

- 9) Tobita: Modified double slip model with fabric anisotropy for hardening behavior of granular materials, in *Advances in Micromechanics of Granular Materials* (eds. H.H. Shen et al.), Elsevier Science Pub., pp. 203-212, 1992
- 10) Tobita, Y.: Modified double slip model for anisotropic hardening behavior of granular materials, *Mech. Mat.* 16, pp.91-100, 1993
- 11) Mehrabadi, M.M. and Cowin, S.C.: On the double-sliding free rotating model for the deformation of granular materials, *J. Mech. Phys. Solids*, 29, 4, pp. 269-282, 1981
- 12) Nemat-Nasser, S: Generalization of the Mandel-Spencer double slip model, in:., *Large Deformation of Solids: Physical Basis and Mathematical Modeling*, (Gittus, J., J. Zarka, S. Nemat-Nasser, eds), Elsevier Applied Science, pp. 269-282, 1986
- 13) 飛田、岩熊、北：二重すべりモデル：非共軸性と増分非線形性、土質工学会、地盤の破壊とひずみの局所化に関する研究委員会総合報告（印刷予定）
- 14) Needleman, A. and Tvergaard, V.: Finite element analysis on localization in plasticity, in *Special problems in solid mechanics* (eds, Oden and Carey), Prentice Hall, pp. 94-157, 1984
- 15) Lorete, B.: Some macroscopic consequences of the granular structure of sand, in *Large deformation of Solids: Physical basis and mathematical modelling* (eds, Gittus, Zarka, Nemat-Nasser), Elsevier Applied Science, pp.477-496, 1986
- 16) Desrues, J: Shear band initiation in granular materials: Experimentation and Theory, in *Geomaterials: Constitutive equations and modelling* (Darve, F. ed.), Elsevier Applied Science, pp.283-310, 1990
- 17) Wang, Z.L. and Dafalias, Y.F.: Bounding surface hypoplasticity model for sand, *J. Engng. Mech., ASCE*, Vol.116(5), pp.983-1001, 1990
- 18) Gutierrez, M., Ishihara K. and Towhata, I.: Flow theory for sand during rotation of principal stress direction, *Soils and Foundations*, Vol. 31(4), pp. 121-132, 1991
- 19) Hashiguchi, K.: Fundamental requirements and formulation of elastoplastic constitutive equation with tangential plasticity, being submitted to *Int. J. Plasticity*, Vol.9, No.5 (to appear)
- 20) Miura, K., S. Miura and S. Toki: Deformation prediction for anisotropic sand during the rotation of principal stress axes, *Soils and Foundations*, 26(3), pp.42-56, 1986
- 21) 飛田、加藤、柳沢：砂の様な粒状体の構成則としてのすべりモデルの定式化と適用性、土木学会論文集、第370号、pp.57-66, 1986
- 22) Iwakuma, T. and Nemat-Nasser, S: Finite-plastic deformation of polycrystalline metals, *Proc. R. Soc. Lond.* A394, pp.87-119, 1984
- 23) Tobita, Y. and Yanagisawa, E.: Modified stress tensors for anisotropic behavior of granular materials, *Soils and Foundations*, 32(1), pp.85-99, 1992
- 24) Boehler, J.P. (ed.): *Application of tensor functions in solid mechanics*, Springer Verlag, 1987
- 25) 飛田、吉田：砂の様な粒状体の増分非線形モデル：重要性と定式化、構造工学論文集、39A, pp.387-398, 1993
- 26) Rudnicki, J.W. and J.R. Rice: Conditions for the localization of deformation in pressure sensitive dilatant material, *J. Mech. Phys. Solids*, 12, pp.371-394, 1975
- 27) Bruhns, O. T.: Bifurcation problems in plasticity, in *The Constitutive Law in Thermoplasticity*, (Lehmann, T.H. ed.) Springer Verlag, pp.465-539, 1984
- 28) Miura, K.: Study on the deformation behavior of anisotropic sand under principal axes rotation, Dr. thesis of Hokkaido University, 1985
- 29) Molenkamp, F: Material instability for drained and undrained behavior: Parts 1, and 2, *Int. J. Num. Anal. Methods in Geomech.* 15, pp.147-180, 1991
- 30) Oda, M.: Fabrics and their effects on the deformation behavior of sand, Report of the Department of foundation engineering, Saitama Univ., 1976

(1993年9月16日受付)