

岩盤浸透流問題の逆解析の新しい定式化とベイズ推定の適用

New Formulation of Rock Flow Back Analysis and Application of Bayes Estimate

山口栄輝 * 堀宗朗 * 細川 直行**

By Eiki YAMAGUCHI, Muneo HORI, and Naoyuki HOSOKAWA

While permeable flow in rock mass runs through discretely distributed joints, it is advantageous to approximate rock mass as a porous medium with effective permeability such that field variables be continuous functions. Precise estimate of such effective permeability determines the accuracy of the analysis. The effective permeability can be estimated by applying back analysis to flow in rock mass with limited informations obtained from field measurements. In order to perform rational back analysis, this paper presents new formulation of flow problems in terms of eigenflow vectors which represent concentrated flow through joints. Based on this formulation, the back analysis is done for eigenflow vectors instead of effective permeability. The advantage of the present formulation is seen in the reduction of the number of unknowns to be estimated. Furthermore, the back analysis for eigenflows is suitable for the application of Bayes method, and reliable estimate can be made in a direct manner. In order to examine the usefulness of the proposed formulation for the back analysis, numerical simulations are performed, and discussions are made on its advantage and limitations. It is also shown that the recursive application of Bayes method to the back analysis can yield more accurate and reliable estimate.

Key Words: Back analysis, Effective permeability, Flow through joints

1 序

岩盤の流体の浸透は岩盤内部に不連続に分布し連結する亀裂群によって支配されるが、個々の亀裂を通る流体の流れの解析は非常に困難である。このため、亀裂を含む岩の平均的な流れを考え、岩盤を不均一な多孔質媒体に近似することが行われる。多孔質媒体では、圧力・圧力勾配・透水流速の物理場が連続量となるため、岩盤内の亀裂を個々に扱う場合に比べ、数値計算が容易になる。特に、変形や熱との連成作用を考える際には、多孔質体による近似は効率的である。なお、岩盤との等価性を満足させるには、多孔質体の透水係数は、適当な大きさの岩を流れる流体の平均的な圧力と流速の関係から決定される有効透水係数として与えられる。

多孔質媒体の近似の精度は、有効透水係数の正確さに依存する。しかし、岩盤内において、亀裂の位置・形状・大きさを精密に測定することすら容易ではないため、亀裂の分布や連結に影響される有効透水係数を場所毎に正確に計測することは不可能に近く、間接的な測定による推定が必要である。推定方法の一つに、近年多くの分野で注目を浴びている逆解析がある^{[1]~[3]}。逆解析によれば、適当な境界条件の下で測定される岩盤の表面の流量等から、内部の有効透水係数を推定することになる。

岩盤内で亀裂は特定の方向に並び連結するため、有効透水係数は強い異方性を示す。この結果、有効透水係数を表す2階のテンソルでは最大6の異なる成分を持つことになり、逆解析によって多くの未知量を決定する必要がある。しかし、有効透水係数は、亀裂を含まない岩体の浸透の他に亀裂を通ることによって増加する流量を表す指標であるから、未知の有効浸透係数を全て一挙に決定する代わりに、より少ない未知量である亀裂を通る流れを推定し、その結果を用いて有効透水係数を評価する2段階の方法が、逆解析の計算効率及び精度を改善すると期待される。

岩盤では精密な測定が困難であるため、内部の状態を推定するために十分な量の情報を表面での計測から得ることは稀である。したがって、情報の少なさに起因する不確からしさが逆解析に含まれることになる。逆解

*Ph.D. 東京大学工学部助教授 (〒113 東京都文京区本郷 7-3-1)

**学生 東京大学工学部 (〒113 東京都文京区本郷 7-3-1)

析による推定の確からしさを合理的に評価する方法として、確率論を逆解析に適用する試みがなされている。特に、ベイズ推定を用いた逆解析は、有効であることが知られている^[4]。

上記の背景を下に、本論文は、岩盤の有効透水係数の推定のために、1) 有効透水係数を支配する亀裂内の浸透を未知量とする定式化、と 2) ベイズ推定による解析の不確からしさの評価、を考慮した逆解析の方法を提案する。具体的には、第2章において1)の浸透流問題の定式化を説明し、その定式化に2)のベイズ推定を適用した結果を第3章に示す。なお、提案された逆解析の方法の妥当性を検討するため、第4章において不均一な有効透水係数を持つ岩盤に対して逆解析の数値シミュレーションを行う。なお、有効透水係数を決定するための浸透流問題は、有効弾性係数を決定するための力学問題と本質的に同じ形式で記述することが可能であるため、提案される逆解析の方法は力学問題にも適用できる（補参照）。

2 逆解析に適した有効透水係数の推定の定式化

岩盤を不均質多孔質媒体として近似すると、流体は連続の式とダルシー則に支配される。補に示すように力学問題との対応を考え、圧力 P ・圧力勾配 Q_i ・浸透流速 V_i を物理場とし、次の3つ関係を場の式とする。

$$Q_{i,i}(X) = P_{,i}(X), \quad V_{i,i}(X) = 0, \quad V_i(X) = K_{ij}(X)Q_j(X) \quad (1)$$

ここで、 $K_{ij} = K_{ij}(X)$ は場所 X での有効浸透係数であり、流体の粘性を1としている。

2.1 Homogenization による有効浸透係数の算定

式(1)内の有効透水係数は、岩盤の点 X に対応した亀裂の分布と配置を持つ岩体を代表体積要素 V として導入し、 V での浸透流を求め、その平均量の関係から算定される。すなわち、 V 内の点 x における流体の圧力勾配・浸透流速を $q_i(x) \cdot v_i(x)$ とすると、両者の V での体積平均 $\langle q_i \rangle_V$ と $\langle v_i \rangle_V$ によって、有効透水係数は、

$$K_{ij} = \bar{k}_{ij} \quad \langle v_i \rangle_V = \bar{k}_{ij} \langle q_j \rangle_V \quad (2)$$

として与えられる。ここで、 $\langle \cdot \rangle_V$ は、物理場 $(\cdot)(x)$ の V での体積平均を表す。式(2)内の $\bar{k}_{ij}$ を推定することが、不均一材料の Homogenization の目的となる^[5]。

不均質多孔質媒体 V が岩部 M と亀裂部 C から成るため、式(2)を次のように変形することが可能である。岩部 M では、健全な岩の透水係数 k_{ij}^0 がダルシー則を与える。よって、岩部の平均圧力勾配と平均浸透流速の間に $\langle v_i \rangle_M = k_{ij}^0 \langle q_j \rangle_M$ が成立する。一方、亀裂部の幅は狭いため体積は小さく、体積比は $C/V \approx 0$ となる。また、岩に比べ浸透に対する抵抗が非常に小さいため、 $\langle q_i \rangle_C \approx 0$ と近似できるが、亀裂部を流れる浸透流速は大きいので、 $\langle v_i \rangle_C$ は発散するにもかかわらず亀裂浸透流速 $v_i^C = C/V \langle v_i \rangle_C$ は有限値となる。実際、連続の式 $v_{i,i} = 0$ から $v_i = (v_j x_i)_{,j}$ が成立することと、薄い亀裂の上面と下面を S として同一視すると、亀裂浸透流速は、

$$v_i^C = \frac{1}{V} \int_C (v_j \nu_j) x_i dS = \frac{1}{V} \int_S ([v_j] \nu_j) x_i dS \quad (3)$$

となる。ここで、 ν_j は法線ベクトル、 $[v_j] (= v_j^+ - v_j^-)$ は亀裂へ流入する流速のジャンプである。なお、式(3)の亀裂浸透流速 v_i^C の表現の形式は、亀裂の開口や滑りによる平均歪を表す表現の形式と一致している。

V の平均圧力勾配によって亀裂浸透流速が $v_i^C = k_{ij}^C \langle q_j \rangle_V$ として与えられる場合を考える。亀裂部の透水係数は無限大と考えられるから、 I の平均圧力勾配は0となる。よって、体積平均則を利用すると、 V の平均圧力勾配は $\langle q_i \rangle_V = \langle q_i \rangle_M$ として近似され、 V の平均浸透流速は、

$$\langle v_i \rangle_V = k_{ij}^0 \langle q_j \rangle_V + v_i^C = (k_{ij}^0 + k_{ij}^C) \langle q_j \rangle_V \quad (4)$$

となる。したがって、有効透水係数は $\bar{k}_{ij} = k_{ij}^0 + k_{ij}^C$ として推定される。ここで、 k_{ij}^C は $v_i^C = k_{ij}^C \langle q_j \rangle_V$ として定義される亀裂部の見かけの透水係数である。適当な亀裂を含む岩の浸透モデルを解析することで、 k_{ij}^C が算定される。

2.2 亀裂浸透流速による定式化

有効透水係数を用いたダルシー則 (1c) は、式 (3) を用いて次の 2 つの式の組に書き換えることが可能である。

$$V_i(X) = K_{ij}^o Q_j(X) + V_i^*(X) \quad V_i^*(X) = K_{ij}^C(X) Q_j(X) \quad (5)$$

ここで、 $K_{ij}^o = k_{ij}^o$ である。また、 $V_i^*(X)$ は v_i^C に対応しており、連続体力学でのアイゲン歪にならってアイゲン浸透流速と呼ぶ。なお、有効透水係数は、 $K_{ij} = K_{ij}^o + K_{ij}^C$ として与えられる。

ダルシー則 (1c) の代わりに式 (5) を場の式とすると、与えられたアイゲン浸透流速の下で適当な境界値問題の結果として得られる岩盤の表面での浸透の情報を得ることが順問題となり、表面の情報からアイゲン浸透流速を推定することが逆問題となる。有効透水係数テンソルが 6 の独立な成分を持つことに比べ、アイゲン浸透流速の成分は 3 であるから、推定すべき未知数の数は半分ですむ。岩盤の物性推定の逆問題では結果に関する情報量より推定すべき原因の量の数が多いため、未知数の数が少なくなることによって、推定の効率や信頼度が向上すると期待できる。

式 (5) を用いた定式化においても、アイゲン浸透流速から有効透水係数の推定では、3 つの成分を持つベクトルから 6 つの成分を持つテンソルを逆算することになる。岩盤内の亀裂の分布や連結に関する情報を利用することによって、この逆算の信頼度を上げることは可能である。通常、亀裂内の流体は水みちを通るため、流体は亀裂と垂直な方向にはあまり流れず、またその方向の圧力勾配の影響を受けづらい。したがって、 V 内にパイプ状の亀裂群が概ね 1 つの方向に入っている場合、アイゲン浸透流速の単位ベクトル e_i によって、 $K_{ij}^C = K^C e_i e_j$ となるため、 V_i^* を用いて $e_i = V_i^* / |V_i^*|$ と $K^C = V_i^* / (e_i Q_i)$ と推定される。なお、 V 内に亀裂群が十分密で全ての方向に一樣に入っている場合、 $K_{ij}^C = K^C \delta_{ij}$ となり、 $Q_i / |V_i^*|$ であれば $K^C = |V_i^*| / |Q_i|$ と推定される。

3 提案された定式化での逆解析とベイズ推定の適用

式 (1a,b,5) より、与えられたアイゲン浸透流速に関する順問題は、 $K_{ij}^o P_{,ij} + V_{,i}^* = 0$ を支配方程式とする。境界 ∂R で適当な境界条件を課し、グリーン関数を $G(X, Y)$ とすると、圧力場は、

$$P(X) = \int_R G(X, Y) (V_{,j}^*(Y)) dV_Y \quad (6)$$

となる。式 (6) に示すように、均一多孔質媒体のグリーン関数を利用できることが提案された定式化の大きな特徴の一つである。領域 R 内の適当な点 Y^β ($\beta = 1, 2, \dots, M$) に、アイゲン浸透流速が与えられた場合、境界 ∂R 上の圧力の観測点 X^α ($\alpha = 1, 2, \dots, N$) を計算する順問題は、式 (6) より、直ちに、

$$[G][V^*] = [P] \quad (7)$$

として行列表示することができる。ここで、 $[P]$ と $[V^*]$ は $P(Y^\beta)$ と $V_i^*(X^\alpha)$ に対応する $N \times 1$ と $3M \times 1$ の行列、また、 $[G]$ は $G_i(X^\alpha, Y^\beta)$ に対応する $N \times 3M$ の行列である。式 (7) は、ベイズ推定による逆解析を行う上で、非常に扱い易い形式となっている。

ベイズ推定によって、観測された $[P]$ に対して、そのような圧力分布が得られる確率が最も高くなる $[V^*]$ を決定する。この場合、 $[V^*]$ や $[P]$ は式 (7) を満たす確率変数として扱われる。なお、ベイズ推定は任意の確率分布に適用できるが、簡単のため、 $[V^*]$ は p 平均・相関行列が $[\bar{V}^*] \cdot [R_V]$ である正規分布に、 $[P]$ の誤差は平均・相関行列が $[0] \cdot [R_P]$ である正規分布に従うと仮定する。測定値 $[P]$ が与えられた条件で、アイゲン浸透流速が $[V^*]$ となる確率密度分布 $p([V^*] | [P])$ は正規確率密度分布となり、次のように与えられる。

$$p([V^*] | [P]) = \frac{1}{(2\pi)^{3M/2} (\det[R])^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} ([V^*] - [\bar{V}^*])[R]^{-1} ([V^*] - [\bar{V}^*]) \right) \quad (8)$$

ここで、 $[R]^{-1} = [R_V]^{-1} + [G]^t [R_P]^{-1} [G]$ 、 $[R]^{-1} [\bar{V}^*] = [G]^t [R_P]^{-1} [P] + [R_V]^{-1} [\bar{V}^*]$ である。式 (7) より、ベイズ推定によって決定されるアイゲン浸透流速は確率 $p([V^*] | [P])$ が最大となる $[V^*] = [\bar{V}^*]$ である。

岩盤内の亀裂の分布や連結についてあらかじめ予測ができない場合、 $[\bar{V}^*]$ の各成分は統計的に推定されるアイゲン浸透流速の平均値 $\bar{V}^*$ 、 $[R_V]$ は統計的に推定されるアイゲン浸透流速の分散 σ_V^2 を対角項に持つ対角行列となる。したがって、アイゲン浸透流速の変動が大きい場合、推定の精度は悪くなる。推定の精度を上げるため、次のような逐次的な推定を試みる。K 回目の推定 $[V^{*(K)}]$ を基に K+1 回目の推定を次のように行う。

$$[R^{(K)}]^{-1}[V^{*(K+1)}] = [G]^t[R_P]^{-1}[P] + [R_V^{(K)}]^{-1}[V^{*(K)}], \quad [R^{(K)}]^{-1} = [R_V^{(K)}]^{-1} + [G]^t[R_P]^{-1}[G] \quad (9)$$

ここで、 $[R_V^{(K)}]$ は、 $([V^{*(K)}]_i/\bar{V}^*)^2\sigma_V^2$ をi番目の対角項に持つ対角行列である。また、1回目の推定は、 $[V^{*(1)}] = [\bar{V}^*]$ であり、通常のベイズ推定の結果である。

上記の推定は、K 回目の推定によって得られた $[V^{*(K)}]$ と $[R_V^{(K)}]$ を $[V^*]$ の平均値と相関行列とみなした場合のベイズ推定であり、K 回目の推定を基に最も確かと思われる推定を K+1 回目に行うことになる。なお、通常のベイズ推定で得られる $[\bar{V}^*]$ は必ずしも式 (7) を満たすと限らないが、逐次推定が収束する場合、得られた $[V^{*(\infty)}]$ は必ず式 (7) を満足することになる。これは、 $[R_V^{(K)}]$ の決め方によらない。

4 ベイズ推定に基づく逆解析の数値シミュレーション

提案された定式化に基づき、ベイズ推定を利用してアイゲン浸透流速の逆解析の数値シミュレーションを行う。簡単のために、岩盤 R を辺長 L の正方形とし、周期境界条件が課される 2 次元問題を設定する。統計的に与えられる岩盤の地質情報に対応して、アイゲン浸透流速の平均 $\bar{V}^*$ と標準偏差 σ_V を R に与える。したがって、数値シミュレーションでは、1) 均等に I^2 等分された R の各要素に乱数によってアイゲン浸透流速を発生させ、2) 周囲の 4(I-1) の要素の平均の圧力を計算し (順問題) 3) この圧力を用いて逆にアイゲン浸透流速を推定する (逆問題) ことを行う。すなわち、 $4(I-1) \times 1$ の $[P]$ から、 $2I^2 \times 1$ の $[V^*]$ を推定することになる。なお、健全な岩盤の透水係数を等方的 ($K_{ij}^0 = K^0\delta_{ij}$) とし、式 (5) のグリーン関数はフーリエ級数によって陽に与える。また、長さや圧力は L と K^0 によって、アイゲン浸透流速は単位量 V^* によって無次元化する。

最初に、提案された逐次的に適用されたベイズ推定の収束を検討する。要素の分割数 I を 4、アイゲン浸透流速の平均値 $\bar{V}^*/V^*$ を 100、標準偏差 σ_V/V^* を、6.09、12.2、24.4、48.8 とした 4 つのケースについて数値シミュレーションを 100 回行った。なお、この標準偏差は、平均値から $\pm 10\%$ 、 $\pm 20\%$ 、 $\pm 40\%$ 、 $\pm 80\%$ の範囲に

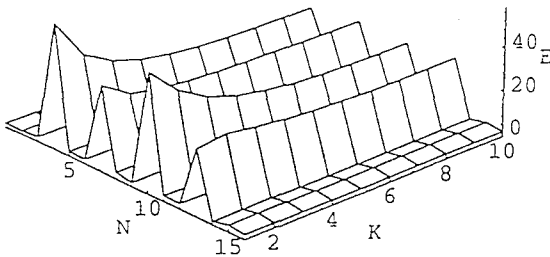


図 1：アイゲン浸透流速の収束

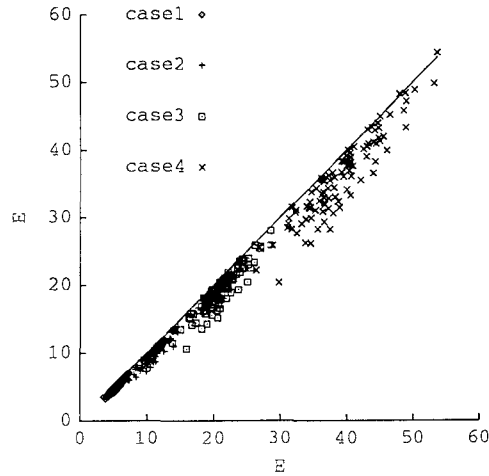


図 2：ベイズ推定の繰り返しによる精度の向上

アイゲン浸透流速が入る確率が 90% となるよう設定されている。個々のシミュレーションの収束は早く、50 回程度の繰り返しで十分である。典型的な例を図 1 に示す。N 軸は要素番号、K 軸は繰り返し、E 軸は相対誤差である。なお、要素番号は左上隅の要素から右方向に 1 から 4、その下では 5 から 8、...、として付けられてお

り、図1には V_1^* のみを示している。この他、本研究で行った数値シミュレーションの結果では、逐次計算によって逆解析の精度は概ね向上するようであった。4つの標準偏差について、1回目（従来のベイズ推定）の推定値 $[V^{*(1)}]$ と50回目の推定値 $[V^{*(50)}]$ の相対誤差、 $E^{(1)}$ と $E^{(50)}$ を図2に示す。

透水係数の変化は場合によって 10^2 程度もあるため、平均値が100と1である2種類のアイゲン浸透流速成分を乱数によって発生させた。標準偏差は、平均値から $\pm 80\%$ の範囲に入る確率が90%となるように定め、平均値が100の成分をもつ要素は指定されている。発生するアイゲン浸透流速成分の平均値が大きい要素がわからないため、1回目の推定に用いられる $[V^*]$ と $[R_V]$ の成分を全て同一とする場合を予測値が与えられない場合とし、逆に、要素がわかっているため、1回目の推定の $[V^*][R_V]$ をそれに応じて変更した場合を予測値が与えられる場合とした。予測値が与えられたことと与えられていないことの違いによる、推定の差の典型的な例を図3に示す。

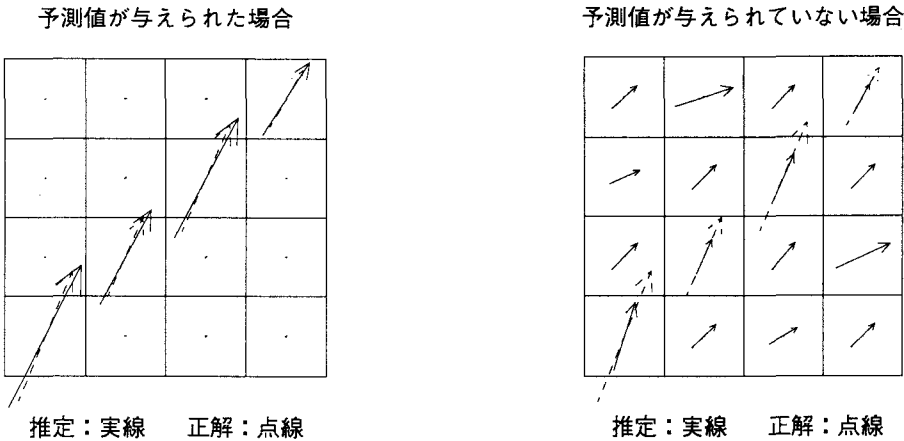


図3：予測値の有無によるアイゲン浸透流速の推定の差（水みちの推定）

予測値が与えられた場合、水みちを表すアイゲン浸透流速が正確に推定されているが、予測値が与えられていない場合、水みち推定の精度は悪い。したがって、予測値の影響は非常に大きいものである。

予測値がもたらす推定の精度の向上を示すために、10000回の数値シミュレーションを行い、各要素のアイゲン浸透流の推定値の相対誤差とその頻度の関係を調べた。その結果を図4に示す。予測値が与えられない場合の相対誤差は90%であるのに対し、予測値が与えられると相対誤差は20%前後にまで大きく改善することが伺える。予測値として与えるのは乱数によって発生するアイゲン浸透流速の平均値にすぎず、実際の値は分散に応じて変化している。それにもかかわらず、大きなアイゲン浸透流速を持つ要素が指定されることによって、逐次計算の収束先が正解に近付きやすくなっていることが示唆される。したがって、この程度の正確さの予測値でも、逆解析の推定の精度を大きく向上させることにつながるのである。なお、逆解析に用いられた予測値を設定することは、逆解析の定式化やベイズ推定とは別の問題であり、岩盤の地質情報等を利用して設定することが可能であると考えられる。

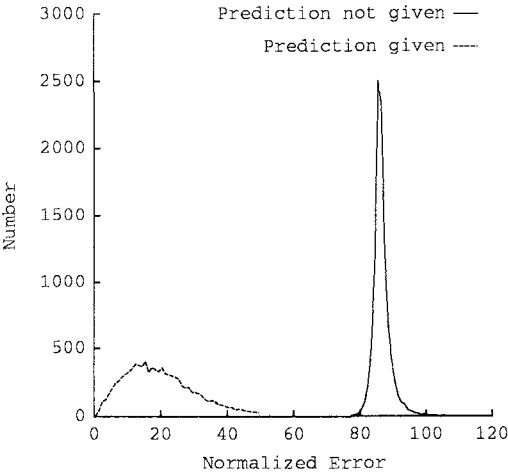


図4：予測値の有無による推定の精度の差

5 結論

岩盤を近似する多孔質媒体の有効浸透係数を逆解析する際、有効浸透係数の代わりに岩盤内の亀裂の浸透に対応するアイゲン浸透流速を用いた定式化を示した。この定式化によって、逆解析される未知数の数の減少、不均一多孔質媒体から均一多孔質媒体への変換が可能となり、さらに、バイズ推定が逆解析に容易に適用されることになる。しかし、本論文で考案されたバイズ推定を利用した逆解析手法を用いても、逆解析に供される情報が少ない場合には、限られた確率情報による精度の向上には限界がある。

補：連続体の力学問題と多孔質媒体の浸透流問題の対比

アイゲン浸透流速を用いた定式化は、アイゲン応力^[5]を用いた連続体の力学問題と本質的に同じ形式となる。実際、表1に示すように、多孔質体の浸透流問題と連続体の力学問題の物理場と場の式には、テンソルの階数の違いはあるものの、対応した形式で表すことが可能である。なお、アイゲン応力ないしアイゲン歪は、力学的には初期応力や塑性歪を表す量であり、連続体内にこのようなアイゲン応力・アイゲン歪が分布する時には膨大な知見が蓄積されている。本論文では線形問題に限って議論がなされているが、増分形式を用いて非線形問題を線形化することで各時点での有効浸透係数の推定が可能となる。

表 1：浸透流問題と力学問題の対応

浸透流問題	力学問題
圧力 p	変位 u_i
圧力勾配 q_i	歪 ϵ_{ij}
浸透流速 v_i	応力 σ_{ij}
有効透水係数 k_{ij}	有効弾性係数 C_{ijkl}
一様透水係数 k_{ij}^o	一様弾性係数 C_{ijkl}^o
アイゲン浸透流速 v_i^*	アイゲン応力 σ_{ij}^*
圧力勾配 $q_i = p_{,i}$	歪-変位関係 $\epsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$
連続の式 $v_{i,i} = 0$	平衡式 $\sigma_{ij,i} = 0$
ダルシー則 $v_i = k_{ij} q_j$	フック則 $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$
(v_i^* 含む) ダルシー則 $v_i = k_{ij}^o q_j + v_i^*$	(σ_{ij}^* を含む) フック則 $\sigma_{ij} = C_{ijkl}^o \epsilon_{kl} + \sigma_{ij}^*$

参考文献

[1] 土質工学会関西支部、逆問題を身近に考える、平成4年度講話会、1992。

[2] 本城 勇介、他、地下水浸透流解析モデルのパラメータ推定：推定の不確実性とその予測への影響、土木学会論文報告集、400、1988。

[3] 桜井 春輔、武内 邦文、トンネル掘削時における変位計測結果の逆解析法、土木学会論文報告集、337、1983。

[4] 岡本 良夫、逆問題とその解き方、オーム社、1992。

[5] T. Mura. Micromechanics of Defects in Solids, Martinus Nijhoff Publishers, 1987。

(1993年9月16日受付)