

Homogenization法の熱伝導解析への適用

APPLICATION OF HOMOGENIZATION METHOD TO HEAT CONDUCTION ANALYSIS

松田秀一* 藤川富夫** 京谷孝史*** 三井康司****

By Hidekazu MATSUDA, Tomio FUJIKAWA, Takashi KYOUYA and Yasushi MITSUI

The homogenization method is the mathematical one to determine effective coefficients, like average elastic constants, of materials which have periodic microstructures. This paper discusses an application of the homogenization method to the heat conduction analysis to cope with the increasing interest in the thermal properties of composite materials. Namely, a homogenized equation connected with the heat conduction is formulated to evaluate effective thermal conductivities and this scheme is found to be useful, especially in such a case that the value of thermal conductivity of the distributed material is larger than that of the matrix thermal conductivity by some numerical experiments.

Key Words: homogenization method, periodic microstructure, heat conduction analysis, effective thermal conductivity

1. はじめに

土木材料を含む多くの材料は、鉄筋コンクリート、繊維強化複合材料に代表されるように均一な材質からなっており、いくつかの材料の集合体である。一般に材料の複合化の目的は、微視的に見た個々の素材の特性を巨視的なレベルで生かすことにある。その中でも多いのが、軽量化、力学的強化を目的としたものであり、それゆえ巨視的に見た複合材料のこれらの特性に対する研究は多く見られる。

複合材料の中には他に、個々の素材が断熱性、耐熱性などの熱的特性を持つものが多く、近年、宇宙機器に代表されるように、高温での使用が増加している。そのためマクロレベルでの、複合材料の熱的特性に対する関心が増加してきている。実際高温で材料を使用する場合、熱応力、クリープ現象の発生、降伏強度の低下などを事前に予期する必要がある。しかし熱応力解析、あるいはそれに付随する熱伝導解析に通常用いられる有限要素法は、解析領域を構成する各材料の特性を考慮した要素分割が要求される。そのため複合材料に対しては、節点数、要素数は莫大なものとなり、解析が困難となることが多い。そこで何らかの方法で弾性定数、また熱膨張率、熱伝導率など熱的特性に関する物性値を、数値解析上で効果的な巨視的なレベルで評価する必要がある。

本論文では、従前より微視的周期構造を有する材料の弾性解析に適用されていたHomogenization法²⁾⁴⁾を

*	信州大学大学院	工学系研究科	(〒380 長野市若里500)
**	東急建設(株)	土木技術開発課 参事	(〒150 渋谷区渋谷1-16-14 渋谷地下ビル)
***	工博 名古屋大学助教授	工学部地圏環境工学科	(〒464-01 名古屋市中千種区不老町)
****	工博 信州大学教授	工学部社会開発工学科	(〒380 長野市若里500)

熱伝導問題に適用し、複合材料の平均熱伝導率算定および非定常熱伝導解析の合理的な手法を示す。これまでも複合材料の平均熱伝導率算定に関しては、いくつかの研究が見られる。例えば、積層複合材料に関しては、熱伝導を電気回路に置き換えて求める簡便な方法が考えられている⁵⁾⁶⁾。基材の中に球状の粒子が一様に分散しているものに関しては、Maxwellによって近似式が求められている⁵⁾。またHanらは、1軸および2軸方向繊維強化複合材料に関して、個々の材料の物性値および体積比だけでなく、繊維の配列パターンを考慮した平均熱伝導率の算定式を求めている⁷⁾。さらにGrovelは1軸方向繊維強化複合材料についてのみであるが、繊維の配列のランダム性を考慮するため、統計学を適用して平均熱伝導率を算定することを考案している⁸⁾。これらの研究に対して本稿で示すHomogenization法の熱伝導問題への適用は、平均熱伝導率算定において新たに次のような利点が考えられる。すなわち、(1) 単位構造内に介在する材料の形状が任意でよい。(2) 単位構造の周期性が2次元、3次元のどちらでも適用できる、など幾何学的制約が少なくなる。また、(3) 周期構造内の局所的な温度勾配の近似解が求まることが可能となる、などである。

本論文では平均的な温度のやり取りのみで表現する熱伝導方程式(熱伝導に関する均質化方程式)を導き、それらより平均熱伝導率を評価する手法を示す。さらにいくつかの数値実験より、本手法の有効性についても検証している。

2. 熱伝導に関する均質化方程式の導出

図1に示すような微視的周期構造を有する材料について考える。基本構造単位(ユニットセル)内において急激に変化する熱伝導率を $\lambda_i^e(x)$ ($i=1,2,3$) とすると、各方向に単位時間、単位面積当りに移動する熱量 $q_i^e(x)$ ($i=1,2,3$) はフーリエの法則により次式のように表される⁹⁾。

$$q_i^e(x) = -\lambda_i^e(x) \frac{\partial T^e(x)}{\partial x_i} \quad (1)$$

ここで $T^e(x)$ は領域内の温度を表している。この式より導出される熱伝導方程式は、密度を $\rho^e(x)$ 、比熱を $c^e(x)$ 、発熱率を $\dot{Q}^e(x)$ とするならば、

$$\rho^e(x) c^e(x) \frac{dT^e(x,t)}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\lambda_1^e(x) \frac{\partial T^e(x,t)}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\lambda_2^e(x) \frac{\partial T^e(x,t)}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\lambda_3^e(x) \frac{\partial T^e(x,t)}{\partial x_3} \right) + \dot{Q}^e(x) \quad (2)$$

と表される。上式は任意の重み関数 $v^e(x)$ を用いて近似的に表現するならば、式(3)のようになる。

$$\int_{\Omega} v^e(x) \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\lambda_1^e(x) \frac{\partial T^e(x,t)}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\lambda_2^e(x) \frac{\partial T^e(x,t)}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\lambda_3^e(x) \frac{\partial T^e(x,t)}{\partial x_3} \right) + \dot{Q}^e(x) - \rho^e(x) c^e(x) \frac{dT^e(x,t)}{dt} \right\} d\Omega = 0 \quad (3)$$

ここで微視的スケール ε で変化する関数を取り扱うために、新しく $y_i = x_i / \varepsilon$ ($i=1,2,3$) なる変数を導入する。すなわち熱伝導率等の関数を、次式のように巨視的変数 x_i および微視的変数 y_i の2つの変数を用いて表す。

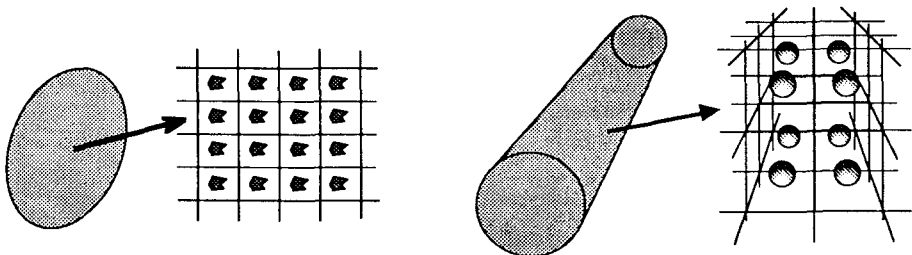


図1 微視的周期構造を有する材料

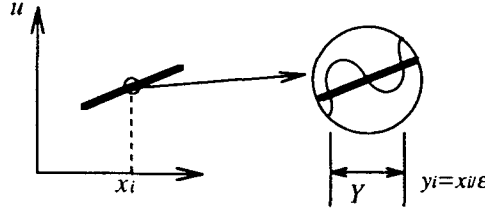


図2 y に対して Y -periodic な関数の2変数表示

$$\begin{aligned}\lambda_i^q(x) &= \lambda_i(x, y), \rho^q(x) = \rho(x, y), c^q(x) = c(x, y), \\ \dot{Q}^q(x) &= \dot{Q}(x, y), T^q(x, t) = T(x, y, t), v^q(x) = v(x, y)\end{aligned}\quad (4)$$

これらの関数は y に対して Y を周期とする関数ならば Y -periodic であると呼ばれている。図2は y に対して Y -periodic な関数の2変数表示の様相を示している。

次に温度変数が次式のように表すことができると仮定する。

$$T^q(x, t) = T(x, y, t) = T^0(x, t) + \epsilon T^1(x, y, t) \quad (5)$$

T^1 は y に依存する関数であり、微視的構造の影響を受けるユニットセル内の乱れの温度を表す。また T^0 は y に依存せず、 $\epsilon \rightarrow 0$ としたとき、すなわち微視的構造が限りなく小さいとしたときの極限であり、巨視的レベルで見た場合の平均的な温度を表していることになる。重み関数についても同様に漸近展開を行う。

$$v^q(x) = v(x, y) = v^0(x) + \epsilon v^1(x, y) \quad (6)$$

次に $\lambda_i^q(x)$ に対して x_i で一回微分、 $T^q(x, t)$ に対して x_i で一、二回微分をすると以下のようになる。

$$\frac{\partial \lambda_i^q(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial \lambda_i(x, y)}{\partial x_i} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \lambda_i(x, y)}{\partial y_i} \quad (7)$$

$$\frac{\partial T^q(x, t)}{\partial x_i} = \frac{\partial T^0}{\partial x_i} + \frac{\partial T^1}{\partial y_i} + \epsilon \frac{\partial T^1}{\partial x_i} \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 T^q(x, t)}{\partial x_i^2} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial^2 T^1}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 T^0}{\partial x_i^2} + 2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial T^1}{\partial y_i} \right) + \epsilon \frac{\partial^2 T^1}{\partial x_i^2} \quad (9)$$

式(4)~(9)を式(3)に代入すると、

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} (v^0 + \epsilon v^1) \left[\sum_{i=1}^3 \left\{ \left(\frac{\partial \lambda_i(x, y)}{\partial x_i} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \lambda_i(x, y)}{\partial y_i} \right) \left(\frac{\partial T^0}{\partial x_i} + \frac{\partial T^1}{\partial y_i} + \epsilon \frac{\partial T^1}{\partial x_i} \right) + \lambda_i(x, y) \left(\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial^2 T^1}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 T^0}{\partial x_i^2} + 2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial T^1}{\partial y_i} \right) + \epsilon \frac{\partial^2 T^1}{\partial x_i^2} \right) \right\} \right. \\ \left. + \dot{Q}(x, y) - \rho(x, y) c(x, y) \frac{d(T^0 + \epsilon T^1)}{dt} \right] d\Omega = 0\end{aligned}\quad (10)$$

となる。この式に対して $\epsilon \rightarrow 0$ と極限をとると $v^0(x)$ 、 $v^1(x, y)$ は任意関数であるので、それぞれについて次式が成り立たねばならない。

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} v^0 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ \lambda_i(x, y) \left(\frac{\partial T^0}{\partial x_i} + \frac{\partial T^1}{\partial y_i} \right) \right\} d\Omega \\ + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} v^0 \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \lambda_i(x, y) \left(\frac{\partial T^0}{\partial x_i} + \frac{\partial T^1}{\partial y_i} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ \lambda_i(x, y) \frac{\partial T^1}{\partial x_i} \right\} + \dot{Q}(x, y) - \rho(x, y) c(x, y) \frac{dT^0}{dt} \right] d\Omega = 0\end{aligned}\quad (11)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} v^1 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ \lambda_i(x, y) \left(\frac{\partial T^0}{\partial x_i} + \frac{\partial T^1}{\partial y_i} \right) \right\} d\Omega = 0 \quad (12)$$

ここで次の補題²⁾を用いる。

(補題 1) : $\Omega \times R^n$ (R^n は実数空間) で定義された Y について Y -periodic な関数 $\psi(x, y) \in L^1(\Omega \times Y)$ (すなわち $|\psi(x, y)|$ がルベーグ積分可) とする。このとき領域全体にわたる積分について、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \psi(x, y) d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \int_Y \psi(x, y) dY d\Omega \quad (13)$$

が成り立つ。 $|Y|$ は 2 次元問題であればユニットセルの面積、3 次元問題であれば体積である。

この補題を用いると式(11)、(12)は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \frac{v^0}{|Y|} \int_Y \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ \lambda_i(x, y) \left(\frac{\partial T^0}{\partial x_i} + \frac{\partial T^1}{\partial y_i} \right) \right\} dY d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \frac{v^0}{|Y|} \int_Y \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \lambda_i(x, y) \left(\frac{\partial T^0}{\partial x_i} + \frac{\partial T^1}{\partial y_i} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ \lambda_i(x, y) \frac{\partial T^1}{\partial x_i} \right\} \right] + \dot{Q}(x, y) - \rho(x, y) c(x, y) \frac{dT^0}{dt} dY d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \int_Y v^1 \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ \lambda_i(x, y) \left(\frac{\partial T^0}{\partial x_i} + \frac{\partial T^1}{\partial y_i} \right) \right\} \right] dY d\Omega = 0 \quad (15)$$

式(14)は、 Y に対して Y -periodic な関数の導関数の積分ということで、

$$\int_Y \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ \lambda_i(x, y) \left(\frac{\partial T^0}{\partial x_i} + \frac{\partial T^1}{\partial y_i} \right) \right\} dY = 0 \quad (16)$$

$$\int_Y \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ \lambda_i(x, y) \frac{\partial T^1}{\partial y_i} \right\} dY = 0 \quad (17)$$

が成り立つので、

$$\int_{\Omega} \frac{v^0}{|Y|} \int_Y \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \lambda_i(x, y) \left(\frac{\partial T^0}{\partial x_i} + \frac{\partial T^1}{\partial y_i} \right) \right\} \right] + \dot{Q}(x, y) - \rho(x, y) c(x, y) \frac{dT^0}{dt} dY d\Omega = 0 \quad (18)$$

となる。式(15)についても次のように書き換える。

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \sum_{i=1}^3 \left\{ \int_Y v^1 \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ \lambda_i(x, y) \frac{\partial T^1}{\partial y_i} \right\} dY \right\} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \sum_{i=1}^3 \left\{ \left[v^1 \lambda_i(x, y) \frac{\partial T^1}{\partial y_i} \right]_{y=0}^{y=Y} - \int_Y \frac{\partial v^1}{\partial y_i} \lambda_i(x, y) \frac{\partial T^1}{\partial y_i} dY \right\} d\Omega \\ & = \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \sum_{i=1}^3 \left\{ \int_Y \frac{\partial v^1}{\partial y_i} \lambda_i(x, y) \frac{\partial T^1}{\partial y_i} dY \right\} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \sum_{i=1}^3 \left\{ \int_Y v^1 \frac{\partial \lambda_i(x, y)}{\partial y_i} dY \frac{\partial T^0}{\partial x_i} \right\} d\Omega \end{aligned} \quad (19)$$

さらに次のようなマトリクスを採用する。

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{11}(x, y) & \lambda_{12}(x, y) & \lambda_{13}(x, y) \\ \lambda_{21}(x, y) & \lambda_{22}(x, y) & \lambda_{23}(x, y) \\ \lambda_{31}(x, y) & \lambda_{32}(x, y) & \lambda_{33}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1(x, y) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(x, y) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(x, y) \end{bmatrix} \quad (20)$$

このマトリクスを用い式(19)を次のように表す。

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\{ \int_Y \frac{\partial v^1}{\partial y_i} \lambda_{ij}(x, y) \frac{\partial T^1}{\partial y_j} dY \right\} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\{ \int_Y v^1 \frac{\partial \lambda_{ij}(x, y)}{\partial y_i} dY \frac{\partial T^0}{\partial y_j} \right\} d\Omega \quad (21)$$

ここで新たに次の補題²⁾を用いる。

(補題 2) : $\Omega \times R^n$ で定義された Y について Y -periodic な関数 $\psi^e(x) = \psi(x, y)$ が $\psi(x, y) \in L^1(\Omega \times Y)$ とする。さらに、

$$\exists c > 0; \xi_{ij} \psi_{ijk}(x, y) \xi_{ik} \geq c \xi_{ij} \xi_{ik} \text{ for } \forall \xi_{ij} \quad (22)$$

を満足するとする。このとき、 Y について Y -periodic なベクトル関数 $F(x, y)$ の、方程式

$$\int_Y \psi_{ij}(x, y) \frac{\partial \phi_k(x, y)}{\partial y_i} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY = \int_Y F_k(x, y) v_i dY \quad (23)$$

を満足するY-periodicな解 $\phi_k(x, y)$ が存在するための必要十分条件は、

$$\int_Y F_k(x, y) dY = 0 \quad (24)$$

である。なお式(22)、(23)の表示には総和規約を用いている。

ここで、式(16)、(17)と同様に y に対してY-periodicな関数の導関数の積分ということで、

$$\int_Y \left(-\frac{\partial \lambda_{ij}(x, y)}{\partial y_i} \right) dY = 0 \quad (25)$$

が成り立つので補題2より、

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \int_Y \lambda_{ik}(x, y) \frac{\partial \chi^k(x, y)}{\partial y_k} \frac{\partial v^i}{\partial y_i} dY = \sum_{i=1}^3 \int_Y \left(-\frac{\partial \lambda_{ij}(x, y)}{\partial y_i} \right) v^i dY \quad (26)$$

を満たす $\chi^j(x, y)$ ($j=1, 2, 3$)が存在する。式(26)を式(21)に代入すると、

$$\int_\Omega \frac{1}{|Y|} \sum_{i=1}^3 \left\{ \int_Y \frac{\partial v^i}{\partial y_i} \lambda_{ii}(x, y) \frac{\partial T^i}{\partial y_i} dY \right\} d\Omega = \int_\Omega \frac{1}{|Y|} \sum_{i=1}^3 \left\{ \int_Y \frac{\partial v^i}{\partial y_i} \lambda_{ii}(x, y) \sum_{j=1}^3 \left(-\frac{\partial \chi^j(x, y)}{\partial y_i} \frac{\partial T^0}{\partial x_j} \right) dY \right\} d\Omega \quad (27)$$

式(27)より、微視的に見たユニットセル内の温度勾配は次式で表される。

$$\frac{\partial T^i(x, y, t)}{\partial y_i} = -\frac{\partial \chi^i(x, y)}{\partial y_i} \frac{\partial T^0(x, t)}{\partial x_1} - \frac{\partial \chi^2(x, y)}{\partial y_i} \frac{\partial T^0(x, t)}{\partial x_2} - \frac{\partial \chi^3(x, y)}{\partial y_i} \frac{\partial T^0(x, t)}{\partial x_3} \quad (28)$$

この式より T^1 の一般解は容易に次式で表されることがわかる。

$$T^1(x, y, t) = -\chi^1(x, y) \frac{\partial T^0(x, t)}{\partial x_1} - \chi^2(x, y) \frac{\partial T^0(x, t)}{\partial x_2} - \chi^3(x, y) \frac{\partial T^0(x, t)}{\partial x_3} + \tilde{T}(x, t) \quad (29)$$

ここで $\tilde{T}(x, t)$ は任意関数である。

式(20)、(28)を式(18)に代入すると次のように書き換えられる。

$$\int_\Omega v^0 \left[\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{|Y|} \int_Y \lambda_{ij}(x, y) \left(\delta_{ij} - \frac{\partial \chi^j(x, y)}{\partial y_i} \right) dY \frac{\partial T^0}{\partial x_j} \right) \right\} + \frac{1}{|Y|} \int_Y \dot{Q}(x, y) dY - \frac{1}{|Y|} \int_Y \rho(x, y) c(x, y) \frac{dT^0}{dt} dY \right] d\Omega = 0 \quad (30)$$

ここで δ_{ij} はクロネッカーのデルタ記号である。式(30)からは T^1 の項がなくなり、この式が熱伝導に関する均質化方程式ということになる。

次に式(3)に、

$$\lambda_{ij}^e(x) = \delta_{ij} \lambda^e(x) \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (31)$$

という変数を導入すると、

$$\int_\Omega v^0(x) \left[\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij}^e(x) \frac{\partial T^0(x, t)}{\partial x_j} \right) \right\} + \dot{Q}^e(x) - \rho^e(x) c^e(x) \frac{dT^0(x, t)}{dt} \right] d\Omega = 0 \quad (32)$$

と表される。式(30)と(32)の比較を行うと、平均熱伝導係数およびその他の平均物性値は次式で与えられる。

$$\lambda_{ij}^e(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \lambda_{ij}(x, y) \left(\delta_{ij} - \frac{\partial \chi^j(x, y)}{\partial y_i} \right) dY = \frac{1}{|Y|} \int_Y \lambda_{ij}(x, y) \left(\delta_{ij} - \frac{\partial \chi^j(x, y)}{\partial y_i} \right) dY \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (33)$$

$$\dot{Q}^e(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \dot{Q}(x, y) dY \quad (34)$$

$$\langle \rho(x)c(x) \rangle'' = \frac{1}{|Y|} \int_Y \rho(x,y)c(x,y) dY \quad (35)$$

3. 数値解析および考察

2. で示した熱伝導問題におけるHomogenization法の有効性を検討するために、図3に示すような正方形の不均質介在物を周期的に有する材料の2次元非定常熱伝導解析を行う。解析対象は、ユニットセルとその中に介在する材料の一辺の長さの比 L_2/L_1 が0.25、0.50、0.75で、それぞれに対して基材と介在物の熱伝導率の比 λ_2/λ_1 を0.001、0.01、0.1、10、100、1000となるよう λ_2 を変化させる。

まず式(26)、(33)により平均熱伝導率を算定する。本研究では式(26)の未知数 χ^j ($j=1,2$) を、三角形一次要素を用いた有限要素法により求める。ユニットセル内の要素分割は、要素数の増加による解析値の精度の向上を確認するため、縦、横方向に均等に8、16、24分割（要素数は $2 \times 8 \times 8=128$ 、 $2 \times 16 \times 16=512$ 、 $2 \times 24 \times 24=1152$ ）と3通りおこなう。境界条件は χ^j が周期関数であることから、ユニットセルの左右の縁に関しては x_2 軸に対称な節点での χ^j が等しい、また、上下の縁に関しては x_1 軸に対称な節点での χ^j が等しいとして

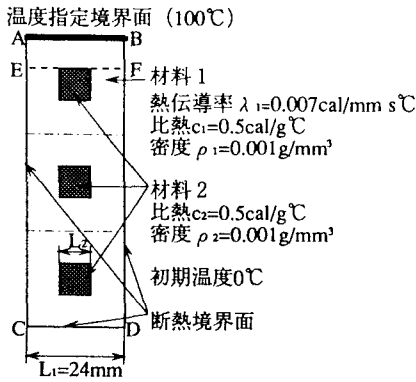


図3 解析モデル図

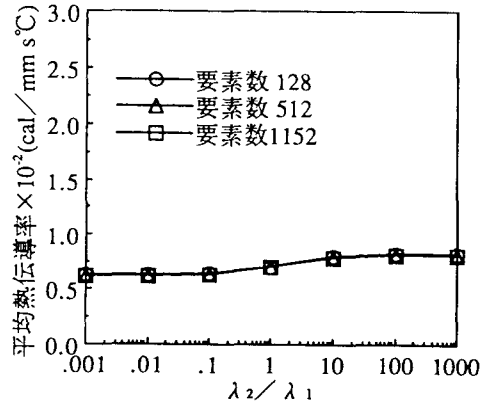


図4 λ_2/λ_1 と平均熱伝導率 ($L_2/L_1=0.25$)

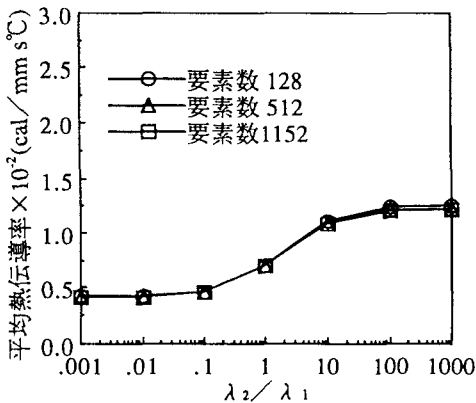


図5 λ_2/λ_1 と平均熱伝導率 ($L_2/L_1=0.50$)

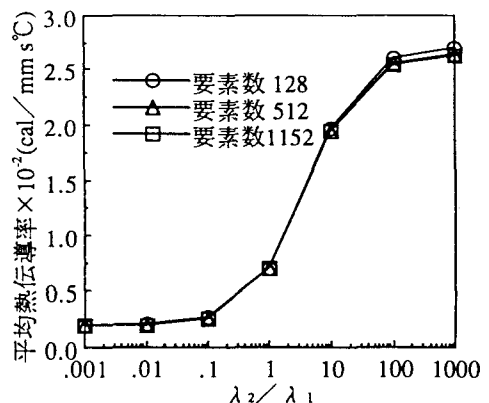


図6 λ_2/λ_1 と平均熱伝導率 ($L_2/L_1=0.75$)

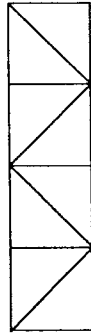


図7 要素分割図（解析A-1～A-3）

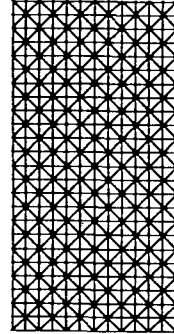


図8 要素分割図（解析B）

いる。また式(26)中の ν は有限要素法への定式化段階で消える。図4～6に算定した平均熱伝導率を示す。これらの図から、 $L_2/L_1=0.75$ 、 $\lambda_2/\lambda_1=1000$ のとき、要素数128と512、1152の間で解析値に若干差ができてはいるが、総じて同じような値が得られているのがわかる。詳細に検討するならば、要素数が増加すると平均熱伝導率を小さく評価する傾向が見られる。

次に式(26)、(33)より算定した平均熱伝導率を利用して、有限要素法で非定常熱伝導解析を行う。以下、算定した平均熱伝導率を用いる熱伝導解析を、式(26)を解く際の要素分割が粗いものから順に解析A-1、A-2、A-3と呼ぶ。時間刻みは1秒で解析を行う。解析A-1～A-3に用いた1セル当たりの要素分割（対称性を考慮して解析領域は水平方向に1/4）を図7に示す。さらに1セル当たりに対して、図8に示すように L_2/L_1 の値に関わらず個々の材料の特性を考慮できる要素分割（対称性を考慮して解析領域は水平方向に1/2）を行い、非定常熱伝導解析を試み（以下解析Bと呼ぶ）、A-1～A-3の解析値と比較、検討をする。なお解析Bについても時間刻みは1秒である。図9～11に、図3に示すC-D面の初期状態から100秒後の平均温度を示す。

まず $\lambda_2/\lambda_1 > 1$ の場合について述べると、 $L_2/L_1=0.25$ 、 0.50 の場合、A-1～A-3のいずれもBの解析値とよく一致しておりHomogenization法の適用の有効性がわかる。ここでも詳細に検討するならば、 L_2/L_1 の値に関わらず、A-3、A-2、A-1の順に解析Bの値に対して差の小さい解析値を示している。図12～14に、 $\lambda_2/\lambda_1=1000$ の場合について、C-D面の初期状態から100秒後までの平均温度の変化を示すが、これらの図からも今述べたことと同様のことがわかる。

次に $\lambda_2/\lambda_1 < 1$ の場合について述べる。 L_2/L_1 の値に関わらず $\lambda_2/\lambda_1 > 0.1$ の範囲では、先に述べた場合と同様に、解析A-1～A-3はA-3、A-2、A-1の順でBの解析値とよく一致している。しかし $\lambda_2/\lambda_1 < 0.1$ では、解析A-1～A-3は λ_2 が低下するにつれ巨視的レベルでの熱伝導速度が小となる傾向が得られたが、解析Bでは λ_2 をある値よりさらに低下させていくと、逆に巨視的レベルでの熱伝導速度が大となる傾向が得られる。すなわち、平均熱伝導率が最小値となる介在物の熱伝導率 λ_2' が $0 < \lambda_2'/\lambda_1 < 1$ で存在することになる。 λ_2' の値は L_2/L_1 の値によって異なるが、この λ_2' より介在物の熱伝導率が小さい範囲で、A-1～A-3とBの解析値に大きな誤差が見られるようになり、その差は上記の場合と逆にA-1、A-2、A-3の順で増加していく。解析Bの値が示す傾向については次のように解釈ができる。

微視的レベルで熱伝導を見ると介在物の熱伝導率を低下させたとき、次の二つの現象が起きていることがいえる。すなわち、（1）ユニットセル内の介在物より熱源側の領域では、基材から介在物へ流出する熱量が減少するため熱伝導速度が大となる。図15にはそれを示すものとして、図3に示すE-F面の初期状態から100秒後までの平均温度の変化を、 $\lambda_2/\lambda_1=1/1000 \sim 1000$ についてそれぞれ示す。（2）ユニットセルの熱源と反対側の境界面までの熱伝導の経路は、介在物を回避するために長くなる、である。しかし介在物の

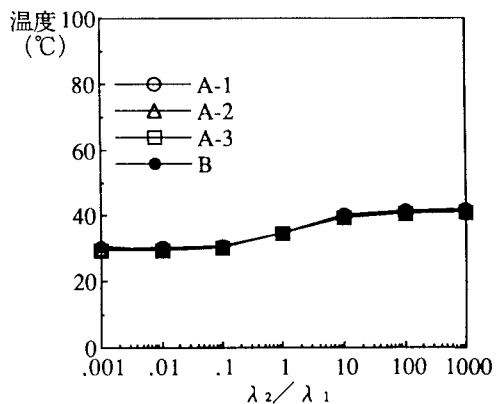


図 9 100秒後のC-D面の平均温度 ($L_2/L_1=0.25$)

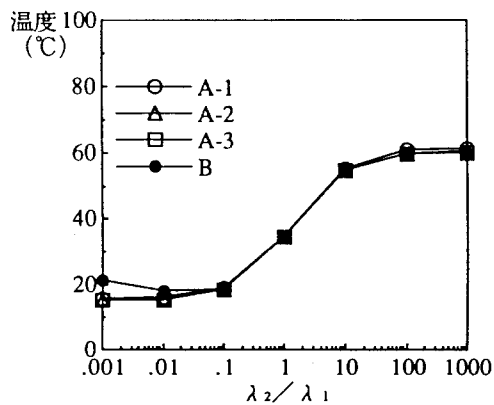


図 10 100秒後のC-D面の平均温度 ($L_2/L_1=0.50$)

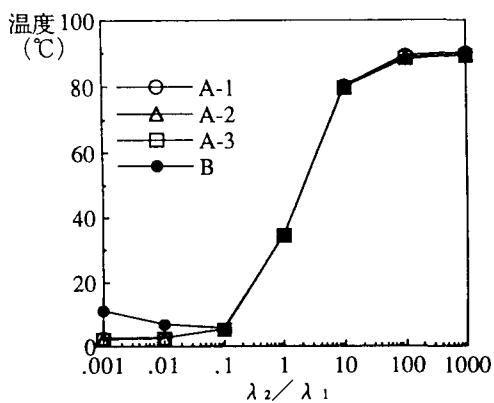


図 11 100秒後のC-D面の平均温度 ($L_2/L_1=0.75$)

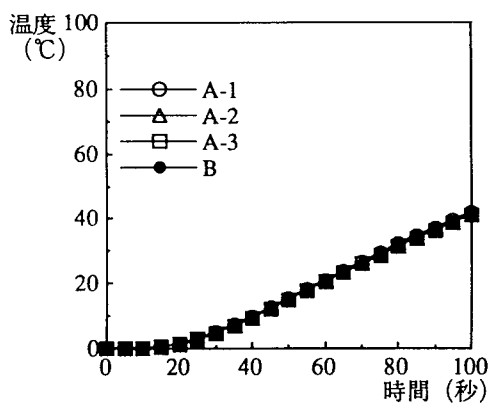


図 12 C-D面の平均温度の変化
($L_2/L_1=0.25$, $\lambda_2/\lambda_1=1000$)

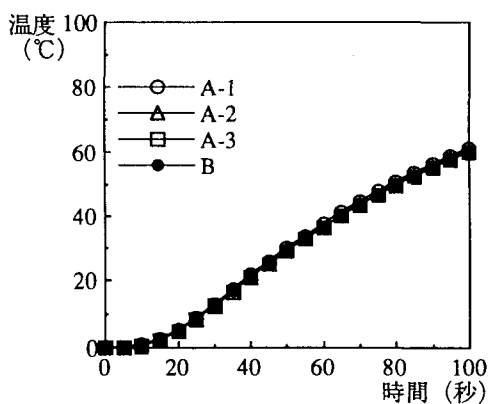


図 13 C-D面の平均温度の変化
($L_2/L_1=0.50$, $\lambda_2/\lambda_1=1000$)

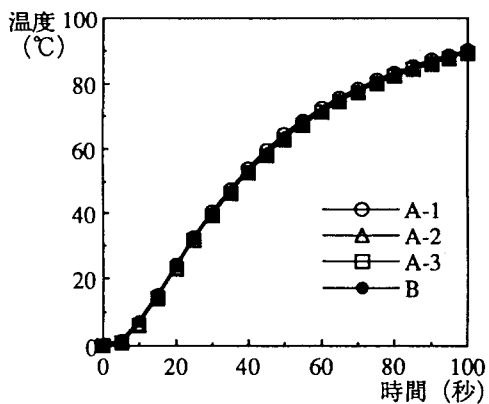


図 14 C-D面の平均温度の変化
($L_2/L_1=0.75$, $\lambda_2/\lambda_1=1000$)

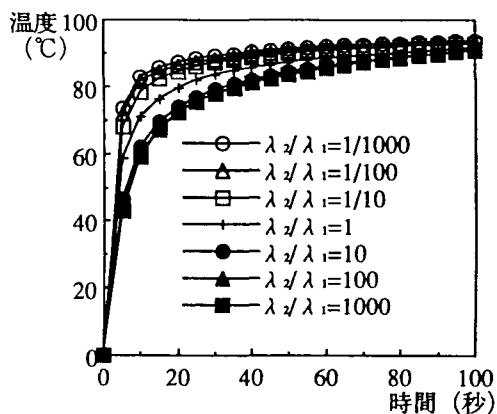


図 1 5 100秒後の E-F 面の平均温度

熱伝導率がある値より小さくなると、(2)で述べた熱伝導経路に変化がなくなると思われる。従って巨視的レベルの熱伝導速度は(1)の現象のみ影響を受けることになり、そのためBのような解析値が得られたものと考えられる。

介在物の熱伝導率が λ_2 より小さい範囲で、A-1～A-3の解析値がBの解析値に対して比較的大きな誤差が生じる原因として、ユニットセル内での温度差が大きくなり、平均的に温度を取り扱うことが困難となることが考えられる。文献7、8、10でも $\lambda_2/\lambda_1 < 0.1$ の場合に関しては取り扱われておらず、今後の課題といえよう。

4. おわりに

本研究では微視的周期構造を有する材料の熱伝導解析にHomogenization法を適用することを提案し、熱伝導に関する均質化方程式を導出した。さらに数値計算例において、同じモデルへのFEMによる非定常熱伝導解析を、本手法によって算定した平均熱伝導率を用いる方法と、領域内において物性値を考慮した要素分割を用いる方法で行った。そしてそれぞれの解析から求められるユニットセルの縁の平均温度を比較することにより本手法の有効性を検討し、その結果次のようなことが得られた。

(1) 介在物の熱伝導率が基材に対して大きいものについては、二つの解析方法によって得られるユニットセルの縁での平均温度がほぼ等しく、Homogenization法の適用が十分に有効であることが確かめられた。

(2) 逆に介在物の熱伝導率が基材に対して小さいものについては、基材と介在物の熱伝導率があまりに異なると、二つの方法によって得られる解析値に誤差が生じた。しかし、(介在物の熱伝導率)/(基材の熱伝導率)が1/10程度ならば、介在物の熱伝導率が基材に対して大きい場合と同様、ユニットセルの縁の平均温度に関して二つの解析方法から同等な解析値が得られ、Homogenization法の適用が十分に有効であることが確かめられた。

なお、本研究を踏まえた上での複合材料の熱応力問題への拡張を今後の課題としたい。

参考文献

- 1) 日本機械学会：先端複合材料、1990年
- 2) Guedes, J.M. and Kikuchi, N. : Preprocessing and Postprocessing for Materials Based on the Homogenization

Method with Adaptive Finite Element Methods, Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, 83, pp.143-198, 1990.

- 3) 京谷孝史：Homogenization法の梁構造物への応用、第5回計算力学シンポジウム報文集、pp.249-256、1991年
- 4) 京谷孝史、渡嘉敷直彦：Homogenization法による琉球石灰岩の力学特性評価について、第2回地下き裂のキャラクタリゼーションワークショップ論文集、pp.249-256、1992年
- 5) 産業技術センター：複合材料技術集成、1976年
- 6) 日科技連：複合材料工学、1971年
- 7) Han, L.S. and Cosner, A.A. : Effective Thermal Conductivities of Fibrous Composites, ASME, J.Heat Transfer, 103, pp.387-392, 1981.
- 8) Grove, S.M. : A Model of Transverse Thermal Conductivity in Unidirectional Fibre-Reinforced Composites, Composites Science and Technology, 38, pp.199-209, 1990.
- 9) 矢川元基、宮崎則幸：有限要素法による熱応力・クリープ・熱伝導解析、サイエンス社、1985年
- 10) Nozad, I. et al. : Heat Conduction in Multiphase Systems-I, Chemical Engineering Science, Vol.40, No.5. pp.843-855, 1985.
- 11) Oleinik. et al. : Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization, North-Holland, 1992.

(1993年9月16日受付)