

Smagorinsky の渦粘性モデルを用いた円柱まわりの高レイノルズ数流れの解析

NUMERICAL SIMULATION OF HIGH REYNOLDS NUMBER FLOWS
AROUND A CIRCULAR CYLINDER USING THE SMAGORINSKY'S EDDY VISCOSITY野村卓史* モンコル・ジラヴァシャラデット**
By Takashi NOMURA and Mongkol JIRAVACHARADET

High Reynolds number flows [$Re=10^3-10^7$] around a circular cylinder are simulated by using a finite element implementation of the standard large eddy simulation with the Smagorinsky's eddy viscosity. Restricted by computer capacity with respect to future extension to flow-induced vibration analysis, the average flow is assumed two dimensional and fairly rough mesh is used. However, by introducing the Van Driest damping function with some modifications, the famous drag drop crisis between the sub-critical regime and the super-critical regime is captured. The present computations have been encouraged by the "coherent structure capturing" concept, newly proposed by Ferziger, and may be regarded as supporting the concept.

Key Words: large eddy simulation, damping function, circular cylinder

1. はじめに

構造物や構造部材の対風特性を数値流体解析によって評価しようとするときに、乱流状態にある高レイノルズ数流れをどのように解析するかが重要な問題となる。本研究では最も基本的な構造部材である円柱まわりの流れ（レイノルズ数範囲： $Re=10^3\sim 10^7$ ）の解析を試みた。本研究で試みた解析法は以下のような背景と方針に基づいて選択し、若干の工夫を加えた上で問題に適用したものである。

乱流モデルを何も用いない、いわゆる直接シミュレーション (Direct Numerical Simulation ; DNS) は厳密に言えば流れの変動のすべてのスケールに対応した解析メッシュ、すなわち局所的に層流とみなし得るほど細かい分解能を有する解析メッシュを用いる必要がある。よく言われる見積りでは解析メッシュの節点数が3次元で $Re^{9/4}$ 程度必要とされる¹⁾。つまりレイノルズ数を1桁上げると約100倍の節点数が必要ということになり、非現実的なほど膨大な計算機資源を必要とする。ただし、DNSといわれるものの中には良好な特性を有する人工粘性の効果により、前述の見積りよりはるかに少ない節点数で円柱や角柱まわりの高レイノルズ数領域の渦放出過程をとらえることに成功しているものがある²⁾。このような解析法をDNSに含めることには異論³⁾もあるが、このことについては後述する。

* 工博 東京大学助教授 工学部土木工学科 (東京都文京区本郷7-3-1)

** 東京大学大学院 博士課程 土木工学専攻 (東京都文京区本郷7-3-1)

乱流モデルを用いる場合、流れを平均成分と変動成分とに分離する方法に、時間平均によるものと空間平均によるものの2つがある。構造部材の対風特性を評価することを考えた場合、渦放出にともなう振動問題を視野に入れる必要があるから、平均流速成分が時間変化する、空間平均に基づく方法、いわゆる Large Eddy Simulation (LES) を用いることが自然な選択といえる。時間平均に基づく場合でも、平均操作をする時間スケールを短くすれば平均流の変動を扱うことができる⁴⁾。しかし乱れエネルギーや散逸など新たな変数とそれらに関する偏微分方程式が誘導され、経験的パラメータも多くなる。これと比較すれば、偏微分方程式の数と形式がもとのナビエ・ストークス方程式と同じでパラメータが1つだけの方法を基本とする LES の方が数値解析の対象として都合がよい。このような判断で本研究では空間平均 (filtering) に基づく LES と、その基本的乱流モデルである Smagorinsky の渦粘性モデルの適用を検討した。

一口に LES といっても、現在行われている研究は大きく2つのグループに分けられるようである。1つは Deardorff⁵⁾ に始まり、Moin & Kim⁶⁾ や Horiuti⁷⁾ らの研究に代表されるように、複雑な領域形状といってもせいぜい Backstep 流れどまりの、基本的には3次元直方体領域のチャンネル流れを対象とした研究である。厳密な意味での DNS 解析との照合を通じて Dynamic Eddy Viscosity や Renormalization Groupe Theory などの先端的な乱流モデルが追及されている⁸⁾。もう一方のグループは、Murakami⁹⁾ らによる建物まわりの風の問題や地球規模の海流シミュレーションなどへの応用である。第1のグループの解析と比較すれば相当に粗い解析メッシュを用い、複雑な境界形状の問題を扱っている。第1グループの研究者からは批判されがちであるが、Murakami らの報告のように、流れのパターンや風圧分布などを実験や観測のデータと比較して工学上満足できる予測ができていることも事実である。

先述したように DNS といわれる解析にも、Tamura らの解析³⁾ のように理論で求められる分解能よりも粗いメッシュで工学的にも物理的にも重要な現象がとらえられているものがある。Ferziger はかつて Tamura らの解析を「人工粘性に基づく LES」と形容した⁴⁾が、最近では LES で要求されるメッシュよりも粗いと述べている⁹⁾。そして、このように DNS や LES で理論的に求められる制約を厳密には満足していないながらも、大規模な渦の挙動やそれに伴う流体力を精度よく評価できている解析に対して、Coherent Structure Capturing (CSC) という呼び名を提案し、これらの解析が成功している原理を解明する必要があると主張している⁹⁾。

この CSC という概念はまだ確立したものではないが、この範疇に入りそうな解析例は他にもある。例えば Song & Yuan¹⁰⁾ は Smagorinsky モデルを用いた LES の定式化⁴⁾によって円柱まわりの流れの解析を行っている。彼らは円柱表面の境界層内の流体の挙動を解析するには不十分な粗いメッシュを用いているものの、境界層での流速分布を Slip, Partial Slip, Nonslip の3つの境界条件によって近似し、境界条件を与える区間を調節することによって実験で得られる抗力係数などを評価できると報告している。この解析も剥離点位置をコントロールすることで後流の大規模渦の挙動をシミュレーションしているわけで、CSC に類するものと考えられる。

以上のような、Ferziger の示唆や Song らの報告を背景に、現有の計算資源に制約された比較的粗い解析メッシュによって Bluff Body まわりの流れがどこまで評価できるかを見極めることが本研究の動機であり、目的である。

なお、本研究では平均流成分に関して2次元の解析を行った。このことについても著者らの立場を述べておく。我々が興味のある柱状構造要素まわりの流れは、部分模型による風洞実験で照査されるようになり2次元性の強い流れである。しかし、渦の挙動や部材軸方向の位相差など、3次元性があることも事実であり、このような問題に対して2次元解析では不十分であるという指摘は多い²⁾。著者らも

これを否定するものではないが、2次元解析と同程度の分解能で3次元解析を行うことは、現在の計算機能能力をもってしても極めて困難である。例えば Tamura らの解析⁹⁾は柱状体まわりのもっとも大規模な解析の1つといえるが、それでも軸方向のメッシュ寸法は断面内のメッシュ寸法よりかなり大きい。また、最近部材軸方向に断面の代表長程度の狭い幅の領域をとった LES が報告されている^{11,12)}が、結果として平均流は軸方向にほとんど変化のない2次元的な流れとなっている。さらに、著者らは将来、本研究で検討する解析の有効性が確認される範囲で、これまで開発してきた構造・流体連成解析法^{13,14)}と組み合わせて空力弾性応答の解析を実現したいと考えている。その場合、部材の振動にともなう解析メッシュを変形させること、および評価しようとする渦励振やフラッタなどの現象が、条件によっては極めて多数の振動を経たのちに定常振幅が求まるような継続時間の長い現象であること、の理由により通常の静止物体まわりの流れの解析よりはるかに多大な計算量を費やすことが予想される。このような実情や見通しのため、本研究では平均流に関して2次元の解析を行い、その適用範囲を明らかにしようとしたものである。

その結果、円柱表面近傍の渦粘性分布に対する取り扱いを工夫することにより、流れが亜臨界領域から超臨界領域へ移る際の抗力係数の低下現象が、十分とはいえないまでもとらえられた。これは大規模スケールの流れパターンの変化をとらえたためであり、上述の CSC の範疇に入るような解析を行うことができたものと思われるので報告する次第である。

2. LES の基礎方程式

非圧縮性粘性流体に対する LES の基礎式は、フィルタリング (filtering) と呼ばれる空間平均操作によって導かれる次のようなフィルター・ナビエ・ストークス方程式である。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 \bar{u}_i \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

添字 i, j は1~3の範囲をとるものとする。式(1)は運動方程式、式(2)は連続方程式、 ρ は流体の密度、 ν は動粘性係数である。物体力は無視した。 $\bar{u}_i$, $\bar{p}$ はそれぞれフィルタリングによって平滑化された流速と圧力で、平滑化される前の流速 u_i 、圧力 p との間に次の関係がある。

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i, \quad p = \bar{p} + p' \quad (3a, b)$$

ここで u'_i , p' は subgrid スケールの変動成分である。

式(1)の左辺第2項の非線形項については、cross 項などを無視して次のように置く。

$$\overline{u_i u_j} = \bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{u'_i u'_j} \quad (4)$$

右辺第2項が格子レイノルズ応力である。これに格子渦粘性 ν_T を導入した勾配拡散モデルを仮定する。

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u'_k u'_k} - \nu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (5)$$

渦粘性 ν_T に対し、次の Smagorinsky モデルを用いる。

$$\nu_T = C^2 h^2 \bar{S}^{1/2}, \quad \bar{S} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (6a, b)$$

ここで h は粗視化のスケール、 C は経験的な定数パラメータである。

式(4) から 式(6) を式(1) に代入すると LES の運動方程式が次のように得られる。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + (\nu + \nu_T) \nabla^2 \bar{u}_i \quad (7)$$

ここで

$$P = \bar{p} + \frac{\rho}{3} \delta_{ij} \overline{u'_i u'_j} \quad (8)$$

変数 P はフィルタリングされた圧力 $\bar{p}$ そのものではなく、格子レイノルズ応力の水圧成分を含んでいる。

以上の式(7)、(2)、(6) が3次元乱流に対する LES の典型的な基礎方程式である。本研究では平均流速 $\bar{u}_i$ が2次元であると仮定する。

$$\bar{u}_3 = 0 \quad (9)$$

式(9) を適用した2次元の方程式に Brooks らの SUPG 法¹⁵⁾ を適用して有限要素方程式を導いた。有限要素は平均流速 $\bar{u}_i$ を要素内双線分布、変数 P を要素内一定とする混合補間の4辺形要素である。有限要素方程式の解法も Brooks らに準じている。

粗視化のスケール h [式(6a)] は各要素の面積の平方根とした。パラメータ C の値は文献や解析対象によって0.1~0.2程度のいろいろな値が用いられているが、ここでは0.1を用いた。流速勾配 $\partial \bar{u}_i / \partial x_j$ を要素中心の1点でのみ評価したので、渦粘性 ν_T は要素ごとに一定の値として算出している。

3. 壁面境界の扱い

乱流の数値解析では固体壁面近傍に特別な処理をするのが通常である。Smagorinsky の渦粘性を用いる LES の場合でも、式(6)のように渦粘性 ν_T が流速勾配の関数であるため流速変化の大きい境界層で渦粘性が過大な非現実的な分布となる [図1]。これを補正するものとして Van Driest の damping function¹⁶⁾：

$$W(\zeta^+) = 1 - \exp(-\zeta^+ / A^+) \quad (10)$$

がよく用いられている。ここで

$$\zeta^+ = \sqrt{\tau_w / \rho} \zeta / \nu \quad (11)$$

は壁面直交方向の無次元距離、 τ_w は壁面せん断応力、 ζ は壁面からの距離である。また A^+ は無次元パラメータで通常は $A^+ = 25$ に設定される。式(10)の W を渦粘性 ν_T に乗じて解析が行われている。

式(10)を適用するに際して、今回具体的には次の方法を用いた。

[1] 式(10)のdamping function の従来の適用例はいずれも平面壁面の問題である。本研究で円柱

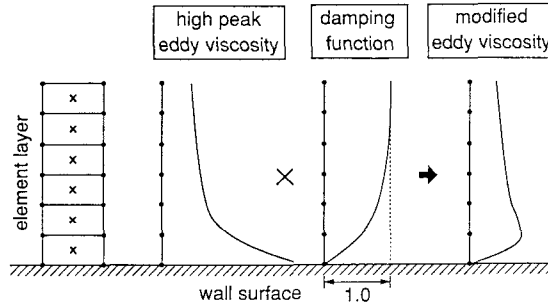


図1 Damping function による壁面近傍の渦粘性の補正

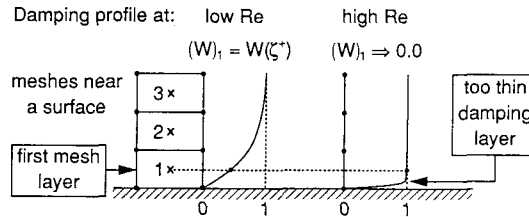


図2 Damping function の立ち上がりが急過ぎる時の処理

まわりの流れを解析するに当たり，試みとして式(10)を次のように補正した．

$$W(\zeta^+, \alpha) = 1 - \exp(-\alpha \zeta^+ / A^+), \quad \alpha \equiv 1 + \frac{\zeta^+}{D^+} \quad (12a, b)$$

ここで $D^+ (\equiv \sqrt{\tau_w / \rho} D / \nu)$ は式(11)と同様に無次元化した円柱の直径である．平面壁面 ($D \rightarrow \infty$) のとき式(12a)は式(10)に一致する．

[2] 壁面せん断応力 τ_w [式(11)] には壁面上の節点流体力の接線方向成分を単位面積当たりの値に換算して用いた．

[3] 要素ごとの渦粘性 ν_t に乗じる damping function W の値は，各要素の中心位置の値とした．このとき図2に示すように，レイノルズ数が相当大きいときには damping function の立ち上がりが急過ぎて，壁面に接する要素の中心ですでに $W = 1$ になってしまう．これでは damping function を用いていないのと同じなので，このような場合には壁面に接する要素の渦粘性 ν_t をゼロとした．

4. 円柱まわりの流れの解析

4.1 解析条件

前章までに述べてきた方法によって円柱まわりの流れの解析を行った．図3に解析対象領域とその境界条件を示す．円柱表面はすべりなしの条件とし，前述の damping function を適用する．上流境界は一様流速，下流境界はトラクション・フリー，側方境界はスリップ境界とした．図4(a)に解析に用

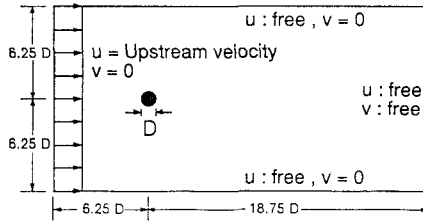


図3 解析対象領域と境界条件

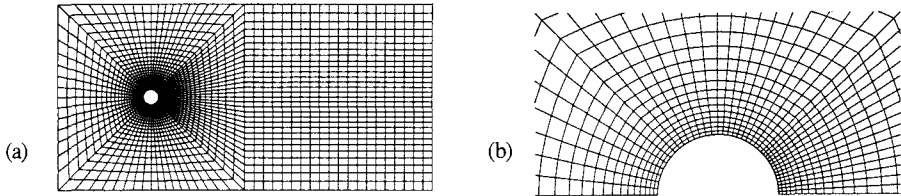


図4 解析に用いた有限要素メッシュ；(a) 全体，(b) 円柱近傍

いた有限要素メッシュ，図4(b)にその円柱近傍の拡大図を示す．節点数は2940，要素数は2840である．

解析した流れのレイノルズ数範囲は $1.0 \times 10^3 \sim 8.4 \times 10^6$ で，時間積分間隔はいずれも無次元時間で $0.03 \sim 0.04$ である．

4.2 解析結果

(1) 抗力とストローハル数

図5と図6に解析から評価された抗力係数 C_D とストローハル数 S_f のレイノルズ数に対する変化を文献17,18に示されている実験値と比較して示す．円柱まわりの流れでは，亜臨界域と超臨界域の間の限界レイノルズ数 ($Re = 3.8 \times 10^5$) 付近で後流幅が縮小して抗力係数が低下する現象が知られている^{17,18)}．

今回の解析では，まず **damping function** を用いないで計算したところ図5に示すように抗力係数がほとんど変化しない結果となった．そこで3．で述べた方法で **damping function** を適用して計算し直した結果，実験値ほど急激ではないものの $Re = 1.0 \times 10^6$ ， 8.4×10^6 のときに抗力係数が低下する結果が得られた．後に示すが，抗力係数の低下とともに剥離点が変わり後流幅が縮小している．

ストローハル数についても，図6に示すように，**damping function** を用いた場合に抗力係数の変化に対応した減少傾向が得られている．ただし円柱表面が滑らかなときのような急激な変化ではなく，むしろ粗い表面のときの傾向に近い．

図5にはまた，Tamuraら²⁾が3次精度風上差分公式 (Kawamura スキーム) を用いて行った2次元と3次元のDNSの結果を示している．Tamuraらは亜臨界領域での抗力係数がフラットになる結果を得るためには2次元解析でなく3次元解析が必要であるとしている．これに対して今回の解析は平均流について2次元の計算を行っているが抗力係数の変化はフラットである．その理由については断定はできないが，2．で述べたLESの定式過程で，部材軸方向にも平均操作がなされているためと推測している．なおTamuraらの解析で用いられた差分メッシュは，2次元解析で 400×100 ，3次元では $400 \times 100 \times 40$

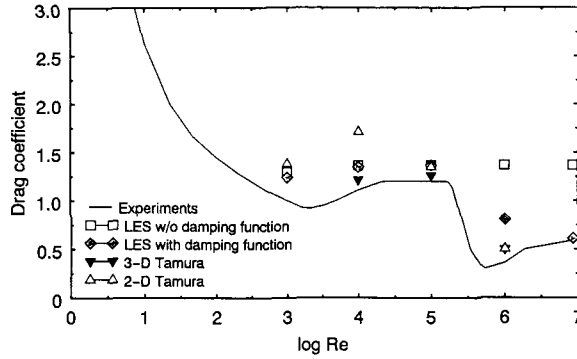


図5 抗力係数の実験などとの比較

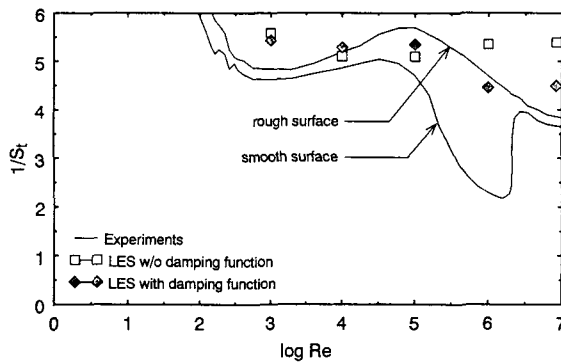


図6 ストローハル数の実験との比較

という極めて大きなものであるのに対し，本研究で用いたメッシュの節点数はわずか3000弱である．

(2) 流速，圧力などの分布

図7にレイノルズ数が $Re = 1.0 \times 10^4$ と $Re = 1.0 \times 10^6$ の2つの場合について変動揚力が上向き最大となる瞬間の流線，渦度および渦粘性 ν_t の分布を示す．限界レイノルズ数を越えた $Re = 1.0 \times 10^6$ では，剥離点位置が後方に移り，後流幅が縮小している．流れパターンのこの変化が抗力係数の低下と対応している．

剥離点が変化していることを確認する目的で，円柱表面節点の1つ外側の節点での流速ベクトルの方向を調べた結果を図8に示す．円柱表面の接線方向は図中に点線で示したように前方($\theta = 0$)で $\phi = +90^\circ$ ，後方($\theta = 180^\circ$)で $\phi = -90^\circ$ となりその間で直線的に変化する．剥離点までは流速ベクトルの方向はほぼ円柱表面接線方向に一致し，剥離後大きく変化する．図8から明らかなように $Re = 1.0 \times 10^6$ のときの剥離点位置は後方に移動している．

図9に円柱表面の圧力分布を， $Re = 1.4 \times 10^5$ と 8.4×10^6 の2つの場合について，対応する実験結果¹⁹⁾と一緒に示す．定量的には十分ではないが，亜臨界領域と超臨界領域の圧力分布の違いがとらえられている．

図10は $Re = 1.4 \times 10^5$ のときの後流中心線上の主流方向流速成分の時間平均値を求め，実験値¹⁹⁾，

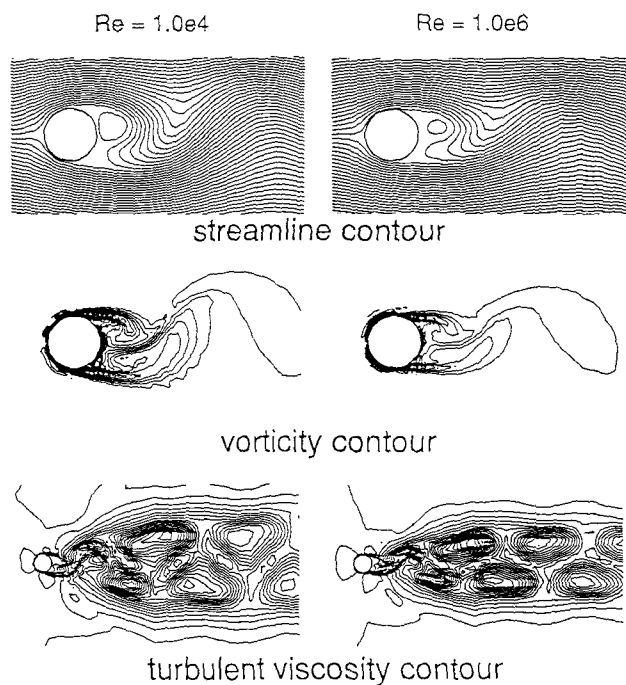


図7 流線，渦度，渦粘性の分布

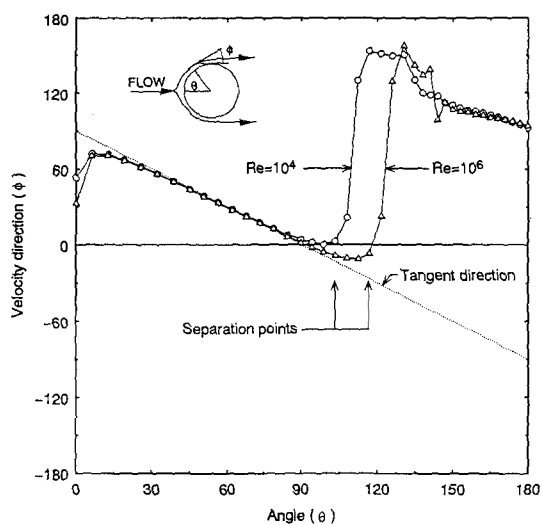


図8 円柱表面節点の1つ外側の節点流速の方向

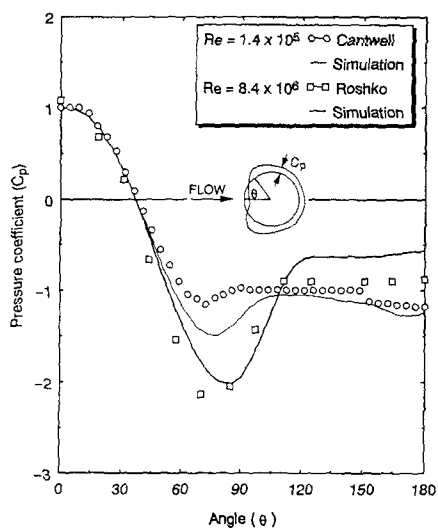


図9 円柱表面の圧力分布と実験データとの比較

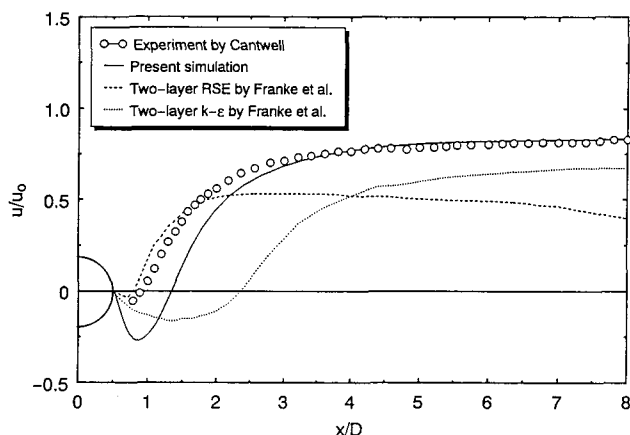


図 10 後流中心線上の主流方向流速成分の時間平均値の比較 ($Re = 1.4 \times 10^5$)

Franke らによる 2 層レイノルズ応力方程式モデルと 2 層 $k-\varepsilon$ モデルによる解析値⁴⁾とともに示したものである。円柱の近傍では実験値と離れているが遠方ではよく一致している。

5. おわりに

Smagorinsky の渦粘性モデルを用いた LES と Van Driest の damping function を用いて円柱まわりの高レイノルズ数流れの解析を行った。解析の目的は、比較的粗いメッシュと、平均流に関して 2 次元の解析がどの程度の適用性を有するかを検討することにあったが、結果として超臨界域で抗力係数が低下する現象を、精度は十分ではないが、とらえることができた。レイノルズ数大きいときに壁面境界に接する要素の damping function をゼロにしている点など、定量的な面で解析法を改善すべき点は多くあると思われるが、風工学への数値流体解析を応用する目的の第 1 段階が抗力係数やストローハル数などの特性値を工学的に意味のある範囲内で予測することにあるとすれば、本研究で用いたアプローチにも展望があるものと考えている。また、本研究の解析は、まだ確立されていない CSC という範疇に含まれ得るものとも考えられ、CSC なる概念を支持する 1 例となったのではないかと考えている。

参考文献

- 1) 谷一郎編：乱流，第 4 章，丸善，1980.
- 2) T. Tamura, I. Ohta and K. Kuwahara : On the reliability of two-dimensional simulation for unsteady flows around a cylinder-type structure, J. Wind Engrg. Ind. Aerodyn., Vol.35, pp.275-298, 1990.
- 3) J. H. Ferziger : Approaches to turbulent flow computation : Applications to flows over obstacles, J. Wind Engrg. Ind. Aerodyn., Vol.35, pp.1-19, 1990.
- 4) W. Rodi : On the simulation of turbulent flow past bluff bodies, J. Wind Engrg., No.52, pp.1-17, 1992.
- 5) J. W. Deardorff : A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds

- number, J. Fluid Mech., Vol. 41, pp.453-480, 1970.
- 6) P. Moin and J. Kim : Numerical investigation of turbulent channel flow, J. Fluid Mech., Vol.118, pp.341-377, 1982.
 - 7) K. Horiuti : Comparioson of conservative and rotational forms in large eddy simulation of turbulent channel flow, J. Comput. Phys., Vol.71, pp.343-370, 1987.
 - 8) J. H. Ferziger : Simulation of complex turbulent flows : Recent advances and prospects in wind engineering, J. Wind Engrg., No. 52 (Supplement), pp.1-19, 1992.
 - 9) S. Murakami : Comparison of various turbulence models applied to a bluff body, J. Wind Engrg., No.52, pp.164-179, 1992.
 - 10) C. S. C. Song and M. Yuan : Simulation of vortex-shedding flows about a circular cylinder at high Reynolds numbers, J. Fluid Engrg., Vol.112, pp.155-163, 1990.
 - 11) 加藤千幸, 池川昌弘 : Large Eddy Simulation による非定常乱流解析, 第 5 回計算力学シンポジウム論文集, pp.81-88, 1991.
 - 12) 持田灯, ほか : LES による 2 次元角柱周りの渦放出流れの 3 次元解析 : DMS, $k-\epsilon$, 実験との比較, 日本風工学誌, pp.79-80, 1991.
 - 13) 野村卓史 : ALE 有限要素法による流れ・構造錬成解析への予測子・修正子法の適用と計算過程に関する技法, 土木学会論文集, No.455/I-21, pp.55-63, 1992.
 - 14) T. Nomura : Finite element analysis of vortex-induced vibrations of bluff cylinders, J. Wind Engrg., No.52, pp.553-558, 1992.
 - 15) A. N. Brooks and T. J. R. Hughes : Streamline upwind / Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navie-Stokes equations, Comput. Meths, Appl. Mech. Engrg., Vol.32, pp.199-259, 1982.
 - 16) E. R. Van Driest : On turbulent flow near a wall, J. Aero. Sci., Vol.23, pp.1007-1011, 1956.
 - 17) 岡内功, ほか : 耐風構造, 丸善, 1977.
 - 18) R. D. Blevins : Flow-Induced Vibration, 2nd edn., Van Nostrand Reinhold, 1990.
 - 19) B. Cantwell and D. Coles : An experimental study of entrainment and transport in the turbulent near-wake of a circular cylinder, J. Fluid Mech., Vol.136, pp. 321-374, 1983.
 - 20) A. Roshko : Experiments on the flow past a circular cylinder at very high Reynolds number, J. Fluid Mech., Vol.10, pp.345-356, 1961.

(1993 年 9 月 16 日受付)