

骨組構造物の幾何学的非線形解析における 不釣り合い力の補正

CORRECTION OF UNBALANCED FORCES IN THE GEOMETRICALLY NONLINER ANALYSIS OF RIGID FRAMES

石川智巳*、依田照彦**

by Tomomi ISHIKAWA, Teruhiko YODA

The purpose of the present paper is to demonstrate a versatile nonlinear structural analysis of rigid frames using a solution technique of minimizing the residual displacements for correcting unbalanced forces, in which initial stress matrix and internal forces are fully examined. Although the present study is limited to the geometrically nonlinear behavior of elastic structures, the nonlinear analysis is believed to be valid in that the solution procedure produces faster convergence since it employs the technique of minimizing the residual displacements. Numerical examples show that the minimum residual displacement method is efficient as well as simple.

Key Words : Nonlinear Analysis, Rigid Frame, Unbalanced Force.

1. はじめに

骨組構造の非線形解析は、1960年代後半から1970年代の前半にかけての精力的な研究に始まり、最近でも有限要素法に基づく様々な数値解析法が提案されている^{1), 2)}。幾何学的非線形解析手法に関する限り、理論的な基礎はほぼ完成していると考えられる。その一方で、実際に非線形解析を必要とする設計者や技術者にとって、複雑な理論や、煩雑なアルゴリズムよりなる数値解析法を理解するのは、時間的制約もあり困難なものとなっていることも事実である。このため、定式化が簡単であり、既存のアルゴリズムに取り入れやすい解析手法も必要であると思われる。このような現状に鑑み、汎用性の高いと思われる弧長増分法を中心に、非線形性の大きな領域にまで対応できる数値解析法を示す³⁾。特に、初期応力マトリックスの中にみられる初期応力の定式化^{4), 5)}と、反復過程における不釣り合い力の定式化⁶⁾に重点をおいて、非線形構造解析手法を展開している。さらに、初期応力の誘導に際し、節点力で評価したものと、変位で評価したものと2通りを詳細に示し、数値解による比較を行って、精度および適用性について検討した。また解析精度の向上や計算時間の短縮という解析上の問題点を考慮して、S. L. Chan氏によって示された不平衡変位最小法⁶⁾を反復過程に導入し、一般的な弧長増分法と比較して、収束の方向や不釣り合い力の補正量にどのような違いがみられるかを具体的に調べ、この方法が、従来の非線形解析アルゴリズムに容易に導入でき収束計算の効率化につながることを示した。

* 早稲田大学大学院 理工学研究科修士課程

** 工博 早稲田大学教授 理工学部土木工学科

〒169 東京都新宿区大久保 3-4-1

2. 有限要素方程式および数値解析法

2.1 増分形の有限要素方程式（更新ラグランジュ法）

ラグランジュ表示での増分形の仮想仕事の原理は次式で与えられる²⁾。

$$\int_v \delta \{e_0 + \Delta e\}^T \{\sigma_0 + \Delta \sigma\} dv = \int_v \delta \{u_0 + \Delta u\}^T \{f_0 + \Delta f\} dv + \int_s \delta \{u_0 + \Delta u\}^T \{t_0 + \Delta t\} ds \quad (1)$$

ここに、 e_0 , Δe は初期ひずみおよびひずみ増分、 σ_0 , $\Delta \sigma$ は初期応力および応力増分、 u_0 , Δu は初期変位および変位増分、 f_0 , Δf は体積力および体積力増分、 t_0 , Δt は初期外力および外力増分である。また曲げによる非線形性が顕著であるとして軸方向のひずみの高次項を無視すれば、軸方向のひずみ e_x は次式で表される。

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (2)$$

ここに、 u, w はそれぞれ図1に示す x, z 方向の変位である。

次に u, w を、 x に関する1次関数、3次関数で補間し、両端の節点 i, j 点における変位および回転角

$$\{\delta\}^T = \{u_i, w_i, \theta_i, u_j, w_j, \theta_j\}$$

を用いて、

図1：はり要素

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & 6 \left(\frac{x}{l^2} - \frac{x^2}{l^3} \right) z & \left(-1 + \frac{4x}{l} - \frac{3x^2}{l^2} \right) z & \frac{x}{l} & 6 \left(-\frac{x}{l^2} + \frac{x^2}{l^3} \right) z & \left(\frac{2x}{l} - \frac{3x^2}{l^2} \right) z \\ 0 & 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} & x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} & 0 & \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} & -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \theta_i \\ u_j \\ w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (3)$$

と書ける。式(2)、(3)により軸方向ひずみを節点変位で表し、式(1)に代入すれば、以下に示す要素に関する有限要素方程式が得られる²⁾。ただし、体積力は無視した。

$$[k_e] \{\Delta \delta\} = \{\Delta p\} + \{p_0\} - \{p_{int}\} + \{q\} \quad (4)$$

ここに、 $[k_e]$: 接線剛性マトリックス

$\{p_{int}\}$: 内力ベクトル

$\{q\}$: 2次以上の高次項

である。また、式(4)を要素ごとに求め、それらを重ね合わせることで全体の増分型剛性方程式

$$[K_T] \{\Delta U\} = \{\Delta P\} + \{P_0\} - \{P_{INT}\} + \{Q\} \quad (5)$$

が得られる。ただし、全体を表すために式(4)のそれぞれの項を大文字で表し、また変位増分は $\{\Delta U\}$ に改めた。

2.2 初期応力および内力の誘導

幾何剛性マトリックスおよび不釣り合い力の中に現れる初期応力と内力は、解の精度を検討するうえで重要な位置を占める。そこで、本論の数値解析例で用いた誘導法を示しその妥当性を検討する。特に、初期応力については、節点力表示による定式化および変位表示による定式化を示し、それぞれの初期応力の定式化による差異を数値解と比較した。

以下、初期応力および内力の誘導に際して、要素 I の第 (n) 形状における節点力、節点変位が既知であるとして、第 $(n+1)$ 形状に至る節点力増分、変位増分が決まったとき、第 $(n+1)$ 形状の初期応力および内力を誘導するものとする。

2.2.1 初期応力の誘導

1) 節点力表示による定式化

第 (n+1) 形状の軸方向の初期応力 $\sigma_i^{(n+1)}$ は次式で与えられる。

$$\sigma_i^{(n+1)} = \frac{N_i^{(n+1)}}{A_i^{(n+1)}} + \frac{M_i^{(n+1)}}{I_i^{(n+1)}} z \quad (6)$$

$A_i^{(n+1)}$, $I_i^{(n+1)}$ は要素 I の第 (n+1) 形状の断面積、断面 2 次モーメント、 $N_i^{(n+1)}$, $M_i^{(n+1)}$ は軸力及び曲げモーメントを表している。また要素 I の第 (n+1) 形状の全体座標系における節点力 $\{P_i^{(n+1)}\}$ 、局所座標系における節点力 $\{p_i^{(n+1)}\}$ をそれぞれ、

$$\{P_i^{(n+1)}\} = \{N_i^{(n+1)}, Q_i^{(n+1)}, M_i^{(n+1)}, N_j^{(n+1)}, Q_j^{(n+1)}, M_j^{(n+1)}\}$$

$$\{p_i^{(n+1)}\} = \{n_i^{(n+1)}, q_i^{(n+1)}, m_i^{(n+1)}, n_j^{(n+1)}, q_j^{(n+1)}, m_j^{(n+1)}\}$$

と表せば、 $N_i^{(n+1)}$, $M_i^{(n+1)}$ は次式のように書くことができる。

$$N_i^{(n+1)} = \frac{n_j^{(n+1)} - n_i^{(n+1)}}{2} \quad (7)$$

$$M_i^{(n+1)} = m_i^{(n+1)} - \left(\frac{m_i^{(n+1)} - m_j^{(n+1)}}{l_i^{(n+1)}} \right) x \quad (8)$$

ここに $\{P_i^{(n+1)}\}$ は

$$\{P_i^{(n+1)}\} = \{P_i^{(n)}\} + \{\Delta P_i^{(n+1)}\} \quad (9)$$

と書ける。また全体座標系における節点力増分 $\{\Delta P_i^{(n)}\}$ は、次式で表せる。

$$\begin{aligned} \{\Delta P_i^{(n+1)}\} &= [T_i^{(n)}]^T [k_i^{(n)}] [T_i^{(n)}] \{\Delta U_i^{(n+1)}\} \\ &= [K_T^{(n)}] \{\Delta U_i^{(n+1)}\} \end{aligned} \quad (10)$$

ここに $[T_i^{(n)}]$, $[k_i^{(n)}]$, $\{\Delta U_i^{(n+1)}\}$ は、第 (n) 形状における要素 I の座標変換マトリックス、要素剛性マトリックスおよび全体座標系における変位増分である。よって式 (10) を式 (9) に代入することにより $\{P_i^{(n+1)}\}$ を求め、次式により、第 (n+1) 形状の局所座標系における節点力 $\{p_i^{(n+1)}\}$ を求めることができる。

$$\{p_i^{(n+1)}\} = [T_i^{(n+1)}] \{P_i^{(n+1)}\} \quad (11)$$

ここで $[T_i^{(n+1)}]$ は要素 I の第 (n+1) 形状における座標変換マトリックスである。

$\{p_i^{(n+1)}\}$ における節点力成分を式 (7)、(8) および (6) に代入すれば、軸方向の初期応力 $\sigma_i^{(n+1)}$ を求めることができる。

2) 変位表示による定式化^{4), 5)}

第 (n+1) 形状の初期応力 $\sigma_i^{(n+1)}$ は、 $\sigma_i^{(n)}$ を既知として局所座標系における変位増分 $\{\Delta \delta_i^{(n+1)}\}$ に対する応力増分 $\Delta \sigma_i^{(n+1)}$ を考えれば、次式で与えることができる。

$$\sigma_i^{(n+1)} = \sigma_i^{(n)} + \Delta \sigma_i^{(n+1)} \quad (12)$$

また、応力増分 $\Delta \sigma_i^{(n+1)}$ は、式 (6) と同様に次のように書くことができる。

$$\Delta \sigma_i^{(n+1)} = \frac{\Delta N_i^{(n+1)}}{A_i^{(n+1)}} + \frac{\Delta M_i^{(n+1)}}{I_i^{(n+1)}} z \quad (13)$$

ここで $\Delta N_i^{(n+1)}$ 、 $\Delta M_i^{(n+1)}$ は、それぞれ軸力増分、曲げモーメント増分である。また、これらは、節点力増分を用いて、

$$\Delta N_i^{(n+1)} = \frac{\Delta n_j^{(n+1)} - \Delta n_i^{(n+1)}}{2} \quad (14)$$

$$\Delta M_i^{(n+1)} = \Delta m_i^{(n+1)} - \left(\frac{\Delta m_i^{(n+1)} - \Delta m_j^{(n+1)}}{l_i^{(n+1)}} \right) x \quad (15)$$

と書ける。ここで増分間では、応力と歪の関係が線形であると仮定すれば、応力増分 $\Delta \sigma_i^{(n+1)}$ において

$$\Delta \sigma_i^{(n+1)} = E \frac{\partial \{\Delta \delta_i^{(n+1)}\}}{\partial x} = E [B_u] \{\Delta \delta_i^{(n+1)}\} \quad (16)$$

が成り立つ。ここに、 $[B_u]$ はいわゆるBマトリックスである²⁾。

第 (n) 形状の局所座標系における変位増分を

$$\{\Delta \delta_i^{(n+1)}\} = \{\Delta u_i^{(n+1)}, \Delta v_i^{(n+1)}, \Delta \theta_i^{(n+1)}, \Delta u_j^{(n+1)}, \Delta v_j^{(n+1)}, \Delta \theta_j^{(n+1)}\}$$

とすれば、式 (14)、(15) は、

$$\Delta N_i^{(n+1)} = \frac{E_i^{(n+1)} A_i^{(n+1)}}{l_i^{(n+1)}} (-\Delta u_i^{(n+1)} + \Delta u_j^{(n+1)}) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \Delta M_i^{(n+1)} = & E_i^{(n+1)} I_i^{(n+1)} \left\{ \left[\frac{6}{l_i^{(n+1)2}} \Delta w_i^{(n+1)} + \frac{4}{l_i^{(n+1)}} \Delta \theta_i^{(n+1)} - \frac{6}{l_i^{(n+1)2}} \Delta w_j^{(n+1)} \right. \right. \\ & + \left. \frac{2}{l_i^{(n+1)}} \Delta \theta_j^{(n+1)} \right] \left(1 - \frac{x}{l_i^{(n+1)}} \right) - \left[\frac{6}{l_i^{(n+1)2}} \Delta w_i^{(n+1)} + \frac{2}{l_i^{(n+1)}} \Delta \theta_i^{(n+1)} - \frac{6}{l_i^{(n+1)2}} \Delta w_j^{(n+1)} \right. \\ & \left. \left. + \frac{4}{l_i^{(n+1)}} \Delta \theta_j^{(n+1)} \right] \frac{x}{l_i^{(n+1)}} \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

で表すことができる。

2.2.2 内力項の誘導⁵⁾

本論では、内力を考えると、変位増分に対する内力増分を考え、次式により第 $(n+1)$ 形状の内力を誘導する。

$$\{p_{in}^{(n+1)}\} = \{p_{in}^{(n)}\} + \{\Delta p_{in}^{(n+1)}\} \quad (19)$$

ここで、式 (4) より

$$\{\Delta p_{in}^{(n+1)}\} = \int_v [B_u]^T \Delta \sigma_i^{(n+1)} dv \quad (20)$$

したがって、未知量は応力増分 $\Delta \sigma_i^{(n+1)}$ であり、これは 2.2.1 の 2) で求めた応力増分と等価である。よって、式 (13)、(17)、(18) から応力増分が求まり、式 (19)、(20) により内力を求めることができる。

3. 不平衡変位最小法

本論文では、不釣り合い力に対して、その時点の全変位を考慮して求められる接線剛性マトリックスを介して、次式により得られる変位を不平衡変位と定義する。

$$\{U_R^{(n)}\} = [K_T^{(n+1)}]^{-1} \{R^{(n)}\} \quad (21)$$

(ただし、 $n \geq 0$)

ここに、 $\{U_R^{(n)}\}$ 、 $\{R^{(n)}\}$ は、それぞれ反復回数 (n) 回目の不平衡変位、不釣り合い力を表し、 $[K_T^{(n+1)}]$ は、 (n) 回目までの全変位から誘導される接線剛性マトリックスである。

反復計算 $(n+1)$ を実行する時、その間、荷重と変位の関係が線形であると仮定すれば、荷重の載荷状態によって定まる参照荷重を与えることによって、その時の参照変位を得ることができる。特に、参照荷重を基準荷重ベクトル、参照変位を基準変位ベクトルと呼ぶことにし、次式で関係づけられる。

$$\{U_0^{(n+1)}\} = [K_T^{(n+1)}]^{-1} \{P_0\} \quad (22)$$

ここに、 $\{P_0\}$ は基準荷重ベクトル、 $\{U_0^{(n+1)}\}$ は基準変位ベクトルである。

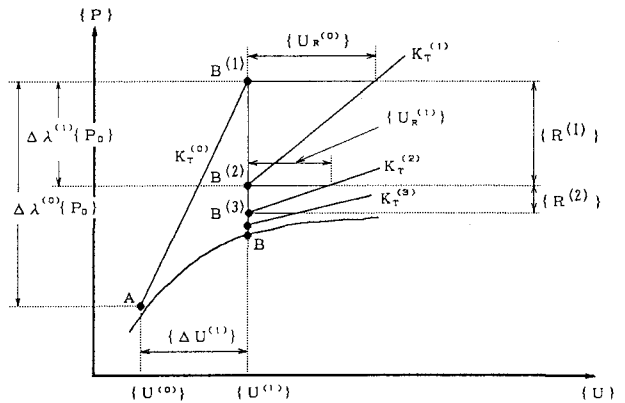


図2：不平衡変位最小法の模式図

上式により得られた基準変位ベクトルを用いて、反復計算 $(n+1)$ 回目の変位増分ベクトル $\{\Delta U^{(n+1)}\}$ を、次のように

$$\{\Delta U^{(n+1)}\} = \{U_R^{(n)}\} + \Delta\lambda^{(n+1)} \{U_0^{(n+1)}\} \quad (23)$$

と仮定する(図2 参照)。ここに、 $\Delta\lambda^{(n+1)}$ は荷重増分パラメータで、荷重の変化量を表す無次元量である。

不平衡変位は、もし解が釣り合い経路上にあれば、零となるベクトル量であるから、この不平衡変位が最小となるような方向に解を修正すれば、反復回数を減らすことができる。そのためには、変位の修正量を最小にすればよい。そこで変位増分ベクトルの2乗和を最小とする $\Delta\lambda^{(n+1)}$ を求めるために次式を導入する⁸⁾。

$$\frac{\partial}{\partial \Delta\lambda^{(n+1)}} [\{\Delta U^{(n+1)}\}^T \{\Delta U^{(n+1)}\}] = 0 \quad (24)$$

式(24)より荷重増分パラメータ $\Delta\lambda^{(n+1)}$ は、

$$\Delta\lambda^{(n+1)} = - \frac{\{U_0^{(n+1)}\}^T \{U_R^{(n)}\}}{\{U_0^{(n+1)}\}^T \{U_0^{(n+1)}\}} \quad (25)$$

と表される。式(25)が反復過程における基礎式である。この不平衡変位最小法の特徴としては、修正変位が少ないことから変位増分法における反復過程と類似の収束方向を持つ点が挙げられる。

4. 数値解析例

初期応力の定式化の違いによる差異および不平衡変位最小法の有用性を確かめるために、エラスティカの問題、Snap-backの問題を取り上げる。数値解析手法としては、増分過程に弧長増分法を適用し、反復過程については、接線剛性に直角に収束解を追っていく最も一般的な方法(以下本論文では、一般的な弧長増分法と呼ぶ)と、本論文で示した不平衡変位最小法との2種類を用いた。また表記上の混乱を避けるため、増分回数を $\sim$ ステップ、反復回数を $\sim$ 回と記述した。

4.1. 初期応力の定式化の違いによる数値解の検証

2.2. で誘導した2通りの初期応力を検証するために、エラスティカの問題(10分割、初期不整 $L/20$)を考える。図3は、反復計算せずに、増分法のみを用いて求めた釣り合い曲線である。いくつかの適当な弧長を与えて釣り合い曲線を求めたがほぼ同じ傾向を示したので、本論文では特に、節点力評価を用いた場合、荷重レベル10に達するまでに75ステップを要したもの、変位評価を用いた場合、節点力評価で用いた弧長の1/10を与えて290ステップまでを図示した。また図中のプロットは10ステップ毎に打っている。初期応力を節点力から評価した場合、解析解に近い曲線が求まり、さらにステップ数を増減させても定性的な結果が得られるのに対し、変位から評価した場合、Snap-back現象が描けず、さらにステップ数を増やしても定性的な解を得ることができなかった。この現象は、変位評価による初期応力から求めた剛性が実

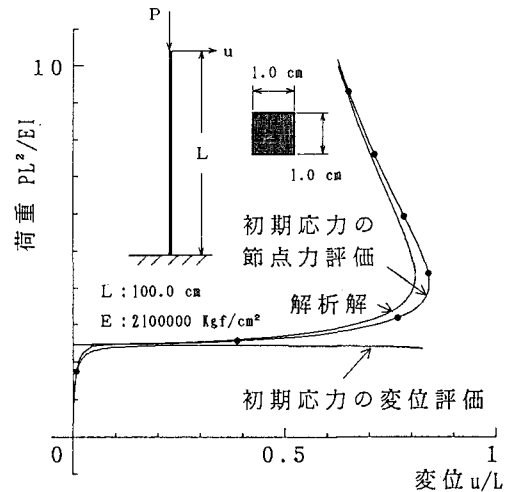


図3：釣り合い曲線(収束計算なし)

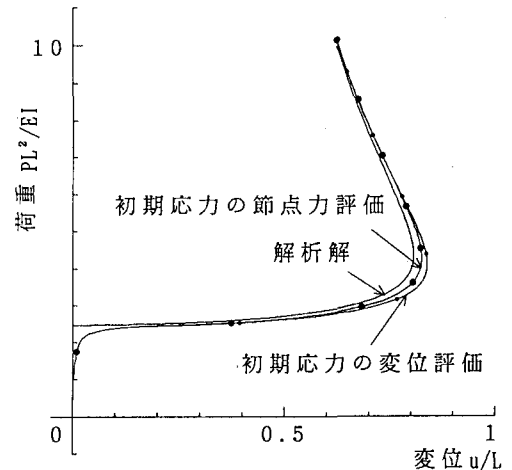


図4：釣り合い曲線(収束計算1回)

際の剛性よりも過小評価され、そのために不釣り合い力の蓄積量が大きくなることに起因すると考えられる。

次に図4は、一般的な弧長増分法を用いて反復計算を1回のみ行ったときの釣り合い曲線である。いずれの場合も図3の節点力評価で用いた弧長を使用した。この時、荷重レベル10に達するまでに、節点力評価の場合90ステップ、変位評価の場合76ステップ要している。この結果、どちらの初期応力を用いても定性的な解が得られたが、節点力評価を用いた方がより解析解に近い曲線となった。

以上の結果より、初期応力を節点力で評価した方が、より実際の剛性に近い値を与えていることがわかる。よって精度および効率の面からみて有効な定式化だといえる。また、現状では、初期応力を求めるのに変位評価が一般的に用いられているが、その方法では非線形性の強い領域を含むような構造物を対象とする場合、収束計算を併用したアルゴリズムを用いる必要がある。節点力で評価した初期応力を用いれば、非線形性の弱い場合には増分法のみを、非線形性の強い場合には、増分法に反復法を併用した手法を交互に使用するといったことが可能であり、数値計算の効率化を図るために適用できる。

4.2. 不平衡変位最小法の検証

1) エラスティカの解析例

4.1と同様な構造諸元を有するエラスティカの問題を解析対象とする。また数値解析においては要素数および弧長も同一なものを使用した。図5は、不平衡変位最小法による解析結果で、収束計算を1回行ったときのエラスティカ（10分割・初期不整 $L/200$ ）の釣り合い曲線である。このとき荷重レベル10に達するまでに、不平衡変位最小法で、132ステップであった。また同様の条件における一般的な弧長増分法による解は、先の図4のとおりである。

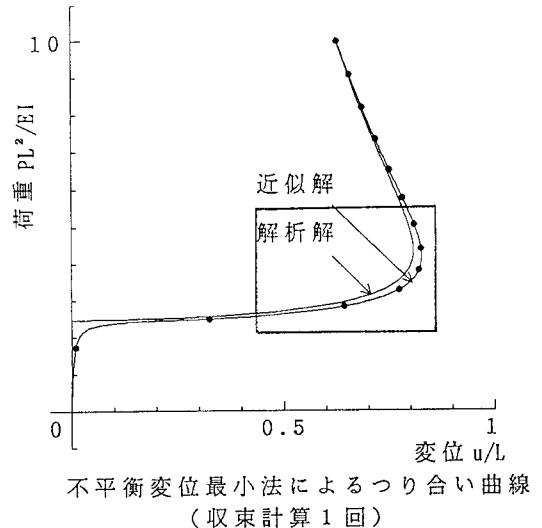
次に、一般的な弧長増分法と不平衡変位最小法による収束方向を検討する。図6、図7は非線形性の強い位置（図5□部）での収束方向を示したものである。一般的な弧長増分法では接線剛性にほぼ直角に、不平衡変位最小法では真下方向に収束していることが分かる。このことは、一般的な弧長増分法は接線剛性を法線とする平面と解曲線との交点方向に収束点を追っているのに対し、不平衡変位最小法では、とりうる最小の補正変位（変位増分ベクトル）を与えるため、増分過程によって決まる変位の近傍に収束点を追うものと考えられる。また、この特性が全体のステップ数の差を生んだ原因となっている。

これらに関連して反復計算を1回、2回、3回行った後の不平衡変位のユークリッドノルム（以下、残留不平衡変位と呼ぶ）を図8、9に示す。さらに残留不平衡変位は、非線形性の強弱によっても変化するため、この量だけで収束の良否を判断することができない。そこで、不平衡変位残留率を導入し、それを図10、11に示した。ここに、不平衡変位残留率は式(26)で定義される量で収束計算後に残した不平衡変位のノルムを増分時に生じた不平衡変位のノルムで除すことにより、無次元化したものである。

$$(\text{不平衡変位の残留率}) = \sqrt{\frac{\{\Delta U_R^{(k)}\}^T \{\Delta U_R^{(k)}\}}{\{\Delta U_R^{(0)}\}^T \{\Delta U_R^{(0)}\}}} \times 100 (\%) \quad (26)$$

ただし $k=1, 2, 3$

図8、9より、一般的な弧長増分法で2回以上反復計算を行わなければ、不平衡変位最小法で1回のみ反復計算した残留不平衡変位に達することができない。また不平衡変位残留率からみると、一般的な弧長増分法で3回反復計算した値が、不平衡変位最小法のほぼ1回分に相当する。この理由は、収束方向の違いによ



るものであり、反復過程における補正変位（変位増分ベクトル）を最小にすることが計算精度、効率の向上につながる。

以上の解析結果より、一般的な弧長増分法で不平衡変位最小法と同様の精度を得るには、各反復過程において、少なくとも2回～3回の収束計算が必要となるので、逆マトリクス演算回数を計算時間の目安とすれば、不平衡変位最小法では、全ステップ数が多いことを考慮しても、かなり計算時間の効率化が図れることになる。またステップ数の多さは近似精度を上げる要因と考えられ、この点からも本解析法が有効であるといえる。

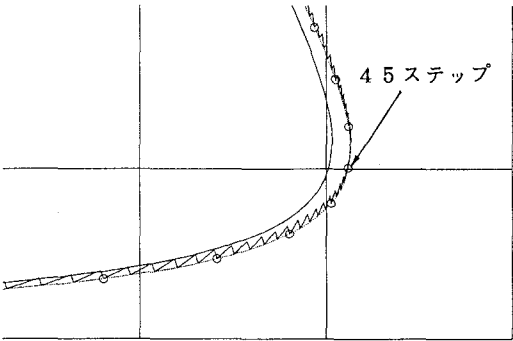


図6：一般的な弧長増分法における収束の方向

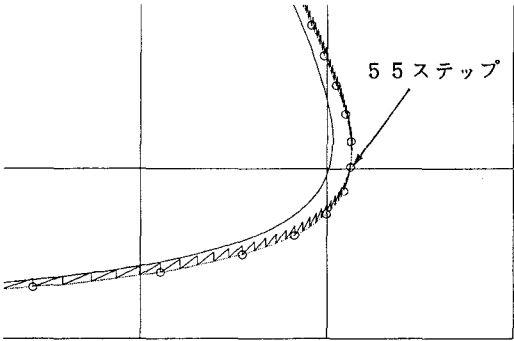


図7：不平衡変位最小法における収束の方向

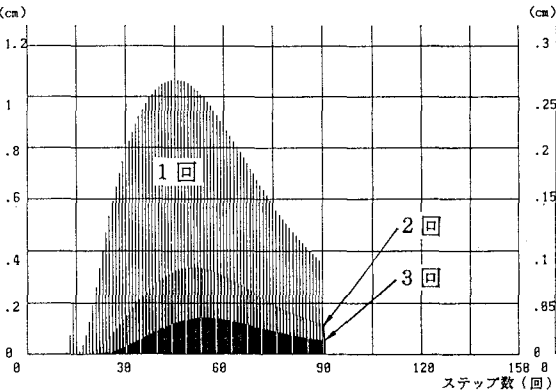


図8：一般的な弧長増分法における残留不平衡変位図

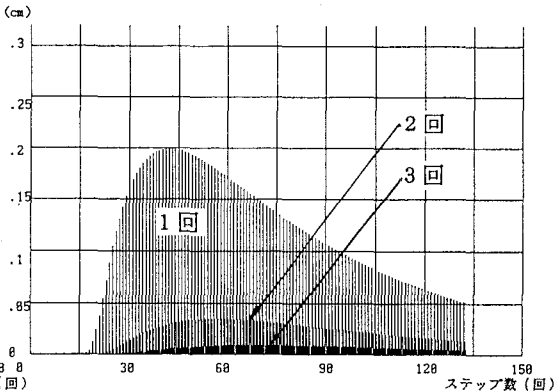


図9：不平衡変位最小法における残留不平衡変位図

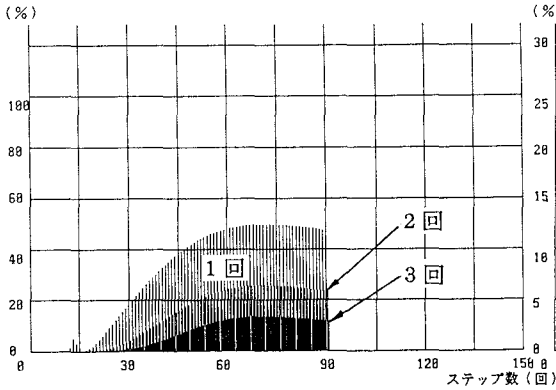


図10：一般的な弧長増分法における不平衡変位の残留率

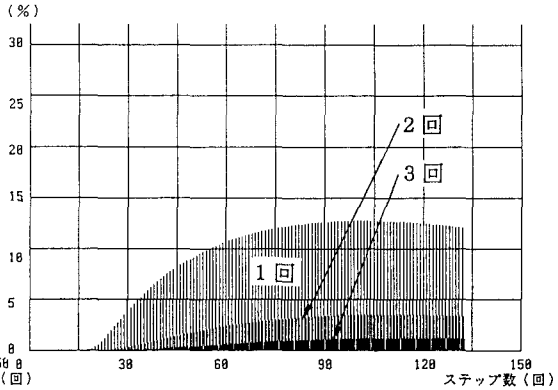


図11：不平衡変位最小法における不平衡変位の残留率

2) Snap Back (Lee' s Frame) の解析例^{7), 8)}

骨組構造のSnap-Backの例として図12に示すLee' s Frame (10分割)を取り上げた。

エラスティカの解析例と同様に、一般的な弧長増分法と不平衡変位最小法とを比較する。図13は一般的な弧長増分法によるつり合い曲線(荷重点における鉛直変位、水平変位)、図14は不平衡変位最小法によるつり合い曲線である。また、図15、図16にプロット点(30ステップ毎)におけるそれぞれのモード図を示す。これらの図において、不平衡変位最小法では、収束計算を1回のみ行ったときのつり合い曲線を示したが、一般的な弧長増分法では、同様の条件で計算した結果、荷重のピークで解が求まらなかったため、条件を不平衡変位最小法で用いた弧長の1/2、収束判定に増分時に生じる不平衡変位ノルムに対する残留不平衡変位の比を用い、それが1/100になる

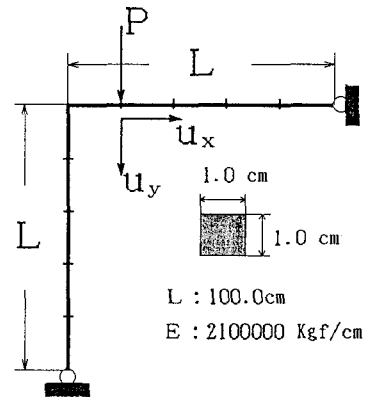


図12: Lee' s Frame

まで収束計算を行ったときのつり合い曲線を示してある。この条件においても、荷重のピーク(211ステップ)において、つり合い経路と異なるところに解が求まり、以降の計算が不能となった。それに対し、不平衡変位最小法では、1回しか収束計算を行わなかったにもかかわらず、容易に極大点を超えることができ、その後のつり合い経路も追跡できた(511ステップ)。一般的な弧長増分法を用いても、さらにステップ数を増やし、収束条件を厳しくすれば、つり合い曲線が得られる可能性があるが、その決定に試行錯誤的な要素が入り、困難さが伴うことになる。

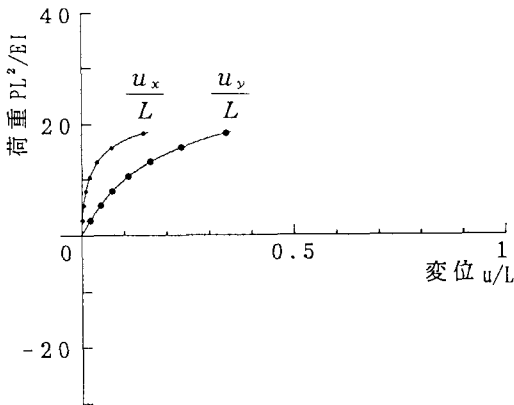


図13: Lee' s Frameのつり合い曲線
(一般的な弧長増分法)

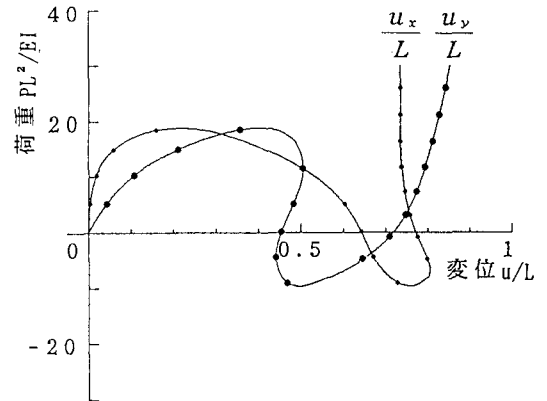


図14: Lee' s Frameのつり合い曲線
(不平衡変位最小法)

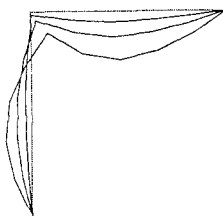


図15: 一般的な弧長増分法
によるモード図

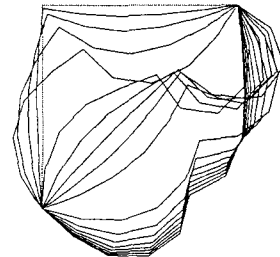


図16: 不平衡変位最小法
によるモード図

5. まとめ

本論文は、骨組構造の非線形構造解析における初期応力マトリックスの誘導と、不釣り合い力を考える上で重要である内力の評価について考察を加え、さらに初期応力については、2通りの定式化を明示し、その検討を行った。また数値計算上、汎用性があるとされている弧長増分法に、新たに不平衡変位最小法を取り入れ、従来の方法との比較を通じて、その妥当性を示すことを試みたものである。得られた結果を要約すると、

- 1) 本論文で示した初期応力マトリックスおよび内力の評価方法は、骨組部材の幾何学的非線形構造解析において有効であり、精度的にも妥当と思われる。
- 2) 初期応力については、変位から直接評価するよりも、節点力から評価した方が精度がよく、幾何学的非線形問題においては汎用性がある。
- 3) 反復過程に不平衡変位最小法を導入することにより、精度よく、また効率的につり合い経路を追跡することができる。
- 4) Lee's Frame の問題の解析例にみられるように、不平衡変位最小法の導入により、非線形構造解析の適用範囲が従来の汎用的な弧長増分法に比べて広がる可能性がある。
- 4) 接線剛性に直角に収束解を追っていく従来の一般的な弧長増分法と比較して、不平衡変位最小法は、定式化が簡単であるのみならず、既存のアルゴリズムに取り入れることが容易である。

参考文献

- 1) 吉田裕：有限要素法による幾何学的非線形構造解析法の現状と課題，土木学会論文集，第374号／I－6，1986年10月。
- 2) 鷲津久一郎他：有限要素法ハンドブックⅡ応用編，培風館，1983年。
- 3) 石川，依田：不釣り合い力の補正に不平衡変位最小法を用いた非線形構造解析について，構造工学における数値解析シンポジウム論文集，第17巻，1993年7月。
- 4) Bath: Finite element procedures in engineering analysis, PRENTICE-HALL.
- 5) 日本建築学会：建築構造力学の最近の発展－応力解析の考え方－，日本建築学会。
- 6) S.L.Chan: Geometric and material nonlinear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 26, 2657-2669 (1988).
- 7) 後藤，羽根，田中：接線剛性法による骨組構造物の大変形解析，土木学会論文集，第238号，1975年6月。
- 8) Fumio Fujii: Scheme for elasticas with snap-back and looping, EM, Proc. of ASCE., Vol. 115, 2166-2181 (1989).

(1993年9月16日受付)