

任意点よりつり合い経路に 到達できる大域的非線形解法

Globally convergent nonlinear schemes to attain equilibrium points

藤井 文夫*、 内藤 幹夫**

Fumio FUJII and Mikio Naito

Globally convergent nonlinear schemes to solve the equilibrium equations in nonlinear elasticity are described. The schemes are useful to attain equilibrium points starting from any arbitrary point. It is also applicable to detect isolated or post-bifurcation paths. The key idea of the proposed schemes is to simply trace the static response of the elastic structure subject to more than one loading parameter in order to attain the target point. Numerical examples are included to test the proposed schemes.

Key Words: Equilibrium Equations, Nonlinear Solution Scheme, Path Tracing

1. ま え が き

非線形現象の基礎方程式をいかにして定式化するかということと、定式化された支配方程式をいかにして解くかということは、本質的に異なるまったく別個の問題である。精密理論であればあるほど（高次の非線形項を考慮すればするほど）、その支配方程式の数理解法は一般に困難となり、より高度な非線形解法のノウハウが必要となるのが通例である^[6]。弾性有限変位理論における支配方程式

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}, p) = \mathbf{0} \quad (1)$$

は、荷重変数 p と節点変位 $\mathbf{u}$ (N 自由度) との間のつり合い関係をうたったもので、式(1)を満足する点 $(\mathbf{u}, p)$ の集合が、 R^{N+1} におけるつり合い経路を定義する。式(1)の解曲線の名称を $\xi^*(p)$ とし、以下他の軌道の名称についても、() のなかに実際に変動する荷重変数を示し、関数と区別するために ** を付ける。 $\xi^*(p)$ の形状が、与えられた荷重条件での構造系の力学的特性を決定するが、実際に計算されるつり合い点がすべて連続的な $\xi^*(p)$ の分枝上にあるという保証は必ずしもないのが現実である。

局所的収束性のある非線形解法の代表格であるニュートン・ラフソン法は、2次の収束が保証されているが、これは目標解の十分近くに初期値が設定されての話である。したがって局所的非線形解法は本来、信頼性の高い近似解が事前に得られてから用いるべきもので、解の精算のための終盤用スキームである。これに対して目標解に近い近似解を与える序盤用のスキームが大域的非線形解法である^[7, 10, 11]。 $\xi^*(p)$ を追跡する弧長法も、

* Dr.-Ing. 岐阜大学助教授 工学部 (〒501-11 岐阜市柳戸1-1) ** 愛知県

☎ 0582-30-1111 内線4111 & FAX 0582-30-1891

連続（変形）法、ホモトピー法、ラン法、死デコ法などの大域的非線形解法のひとつに過ぎない。大域的非線形解法の基本的アイデアは、出発点と目標点とを連続的に結ぶある『軌道』を導入し、軌道追跡法でこの軌道を辿り目標点に至ることである。出発点と目標点とを連続的に結ぶ（と予想される）軌道をいかに定義するか、この軌道設定の巧みさが、大域的非線形解法の鍵である。

非線形つり合い方程式の解法において、任意点よりつり合い点に至る必要性が生じる場合がある。例えば、Navace^[11]ら（1992）は、簡単なモデルについて同一荷重レベルにあるすべてのつり合い解を検出もれなく探査する理論を発表している。またFried^[12]（1984）は、 $\xi^*(p)$ からニュートン・ラフソン法で引き戻すことができないほど遠く逸脱した任意の非つり合い点より、 $\xi^*(p)$ にアクセスする方法を提案している。この他にもアクセスの難しい $\xi^*(p)$ の分岐経路や遊離経路を探査するにあたっても特殊な計算戦略が必要となる。本論文ではこれらの目的に応じたいくつかの工学的な大域的非線形解法を考えてみた。全く任意の点、すなわち任意の非つり合い点、または任意のつり合い点を出発点として、 $\xi^*(p)$ 上の目標点に至ることが可能である。実用計算の立場から高々線形化方程式までを用いており、それ以上の高次項を使用しないことが利点である。例えば経路 $\xi^*(p)$ について言えば、式（1）の一階微分である

$$K \, d u - d p \, e = 0 \tag{2}$$

までを使用することを前提とし、これ以上の高次項は必要としない。式（2）で K は接線剛性行列、 e は p の荷重ベクトルである。

2. 大域的非線形解法

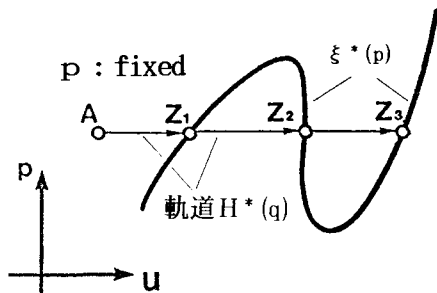


図1 ホモトピー法（荷重規定）

——非線形解法 その1）——
 任意の非つり合い点を出発して、同じ荷重レベルにあるつり合い点に至る方法（図1）
 （ホモトピー法^[7, 10, 11]）

全く任意の非つり合い点 $A(u_A, p_A)$ を設定し、この荷重レベル p_A にあり、

$$E(u, p_A) = 0 \tag{3}$$

を満たすつり合い点 $Z(u, p_A)$ に至ることを考える。まず

$$H(u, p, q) = \begin{Bmatrix} E(u, p) - q E_A \\ p - p_A \end{Bmatrix} = 0 \tag{4}$$

で定義される軌道 $H^*(q)$ を導入する。 E_A は q に付随した荷重ベクトルで、今のところ未定である。出発点 A と目標点 Z とが軌道 $H^*(q)$ の上にあるためには、それぞれ

$$\text{出発点} A \text{ で } q E_A = E(u_A, p_A) \tag{5}$$

$$\text{目標点} Z \text{ で } q E_A = 0 \tag{6}$$

でなければならないので、

$$E_A = E(u_A, p_A) \tag{7}$$

と選べば、ちょうど

$$\text{出発点} A \text{ で } H(u_A, p_A, 1) = 0, \tag{8}$$

$$\text{目標点} Z \text{ で } H(u, p_A, 0) = 0 \tag{9}$$

である。すなわち点Aを出発して軌道 $H^*(q)$ をトレースする。軌道上の各点について q の値の変化を逐次モニターし、 q の符号が反転したら可能なつり合い点を通じたことになるから、軌道追跡を一旦停止する。つぎに現在の点を予測子としてニュートン・ラフソン 法に切り替え、変位の修正子を計算して反復の結果、式 (3) の解に至る。つり合い点 (Z_1) が精算でき、さらに他のつり合い点 (Z_2 、 Z_3 など) も求める必要がある場合には、 $H^*(q)$ の追跡を再開する。このとき後述の その3) に切り替えることも可能である。

その1) は応用数学におけるヒルバート 法そのものである。物理的には出発点Aで本来の荷重条件 $p_A = 0$ を固定し、さらに別の荷重 $q E_A$ をも構造系に作用させる。このときのつり合い応答 $H^*(q)$ を追跡して、 q が0になる点、すなわち $H^*(q)$ と $\xi^*(p)$ との交点を探索していることになる。 $H^*(q)$ 上の任意点では ($p_A = 0$ 、 $q E_A$) の載荷重条件に対して、ちょうどつり合い状態にある。 $H^*(q)$ を追跡中、この載荷条件とはつり合わない不つり合い力を、軌道追跡過程の修正子ステップで除去する。

その1) は $\xi^*(p)$ から大きく逸脱したとき、再び $\xi^*(p)$ に引き戻す時に使える。出発点Aのすぐ近くに $\xi^*(p)$ が通過している必要はなく、任意の長さの軌道 $H^*(q)$ をたどって $\xi^*(p)$ に到達できる。出発点における変形 u_A は全く任意に設定できることから、遊離経路^[5] の発見に使える。

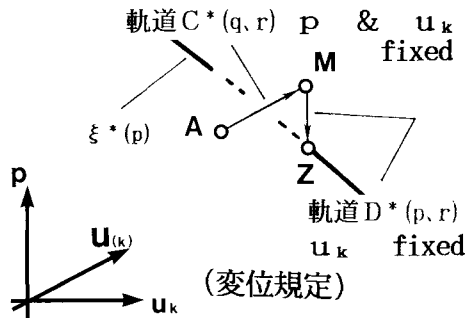


図2 中継点での軌道変更

注) 図2において $u_{(k)}$ とは u から u_k を除いた $(N-1)$ 個の変位成分を表す

まず出発点Aと中継点Mとを結ぶ軌道 $C^*(q, r)$ を

$$C(u, p, q, r) = \begin{Bmatrix} E(u, p) - q E_A - r b \\ p - p_A \\ u_k - u_{kA} \end{Bmatrix} = 0 \quad (10)$$

で定義する。ここに

$$b^T = (0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \quad (11)$$

である。 $r b$ は変位拘束を実現するための拘束力となる。出発点Aで $q = 1$ 、 $r = 0$ で、軌道 $M^*(q, r)$ に沿って進み、 $q = 0$ で中継点M ($r = r_M$) に至る。ここで E_A の荷重 $q E_A$ がまず消滅する。

つぎに中継点Mと目標点Zとを結ぶ軌道 $D^*(p, r)$ を

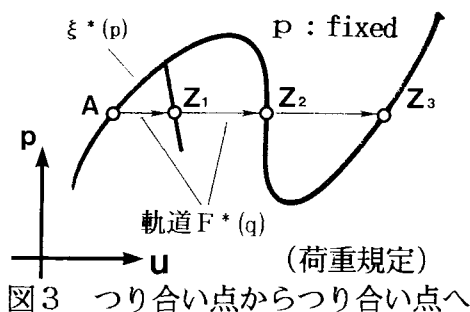
$$D(u, p, r) = \begin{Bmatrix} E(u, p) - r b \\ u_k - u_{kA} \end{Bmatrix} = 0 \quad (12)$$

で定義する。 $D^*(p, r)$ に沿って進み、 $r = 0$ で目標のつり合い点Zとなる (図2)。

中継点Mは、軌道 $D^*(p, r)$ と 荷重一定平面 ($p - p_A = 0$) との交点である。この非線形解法その2) では、出発時に構造系の支持条件を付加し ($u_k - u_{kA} = 0$)、これに必要な拘束力 r が消滅するまで軌道を追跡する。独立な荷重変数が3個あるのが特長である。

非線形解法 その2)
任意の非つり合い点を出発し、
あるひとつの節点変位を拘束しながら、
つり合い点に至る方法 (図2)

その1) では出発点Aと同じ荷重 p_A にあるつり合い点を目標点Zとするが、必ずしも p を拘束する必要はなく、ある特定の変位変数 u_k を出発点での値 u_{kA} に拘束して、 $\xi^*(p)$ に到達することも可能である。ただしこの場合は、出発点Aよりまず中継点Mに至り、ここで追跡すべき軌道を変更して目標点Zを目指す。



非線形解法 その3)

既知のつり合い点より、
同じ荷重レベルにある
別のつり合い点に至る方法 (図3)

出発点Aがすでにつり合い点となっている場合には、式(7)の右辺はゼロベクトルとなり、 E_A は定義できない。そこで式(4)の代わりに

$$F(u, p, q) = \begin{cases} E(u, p) - qf \\ p - p_A \end{cases} = 0 \quad (13)$$

で、現在のつり合い点Aと、別のつり合い点Zとを結ぶ軌道 $F^*(q)$ を定義する。ベクトル f は、非ゼロベクトルで

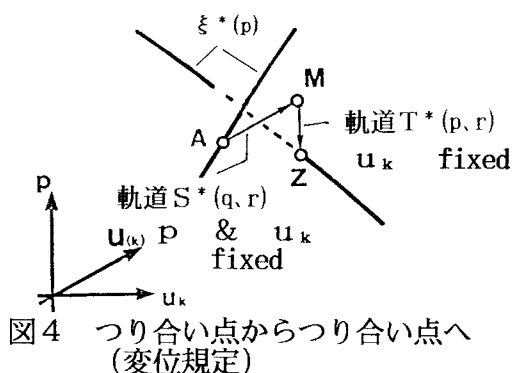
あれば基本的には何でも良いが、構造系を現在の状態から、別のつり合い状態の方向に誘導するためには、どのようなベクトルが最も確実性が高いかが問題となる。例えば単純分岐点付近では、最小固有値の固有ベクトル方向が最も有利であるから(例えば文献^[3]参照)、たとえ近似的でもこの方向に変形を押し進めるようなベクトルなら何でもよく選択の幅が広い。これは逆べき乗法で、最小固有値の固有ベクトルを求める際に、これと直交しない任意のベクトルが初期ベクトルとして選べることに相当し、出発点Aにおいて $F^*(q)$ の接線ベクトル(予測子)を計算することは、ちょうど逆べき乗法を1ステップだけ実行して、出発点Aで近似的に固有ベクトル方向に変形させることになる。分岐経路に限らず、 $\xi^*(p)$ の別の分枝の接近に対しても固有ベクトルが鋭敏に反応することが知られているので、出発点Aでの接線剛性行列の固有値問題

$$K \theta_j = \lambda_j \theta_j \quad (14)$$

を解いて、

$$f = \theta_j \quad (15)$$

とするのが最も堅実である。ここに θ_j ($j=1, 2, \dots, N$)は接線剛性行列の固有ベクトルである。軌道を追跡しながら q をモタ-すること、ニュートン・ラフソン法への切り替え方法については、その1)と同じである。近接する遊離経路や分岐経路への切り替えに使える。



非線形解法 その4)

既知のつり合い点より、
あるひとつの節点変位を拘束しながら、
別のつり合い点に至る方法 (図4)

その3)のように p を拘束せず、ある節点変位 u_k を拘束して、現在のつり合い点から別のつり合い点に至ることもできる。その2)と その4)との違いは、その1)と その3)との対比からも明らかのように、出発点Aが非つり合い点か、つり合い点かの違いで、軌道の支配方程式の基本的な構成は同じである(式(4)と式(13)の比較)。そこで出発点Aより目標点Zに至るのに、その2)と同じく、中継点Mで道筋を変更する。

注) 図4において $u_{(k)}$ とは u から u_k を除いた $(N-1)$ 個の変位成分を表す

まず出発点Aと中継点Mとを結ぶ軌道 $S^*(q, r)$ を

$$S(u, p, q, r) = \begin{Bmatrix} E(u, p) - q f - r b \\ p - p_A \\ u_k - u_{kA} \end{Bmatrix} = O \quad (16)$$

で定義する。出発点Aで $q=0$, $r=0$ で、軌道 $S^*(q, r)$ に沿って進み、再び $q=0$ で中継点M($r=r_M$)に至る。この中継点Mでは f の荷重 r が消滅する。

つぎに中継点Mと目標点Zとを結ぶ軌道 $T^*(p, r)$ を

$$T(u, p, r) = \begin{Bmatrix} E(u, p) - r b \\ u_k - u_{kA} \end{Bmatrix} = O \quad (17)$$

で定義する。 $T^*(p, r)$ に沿って進み、 $r=0$ で目標のつり合い点Zに至る。

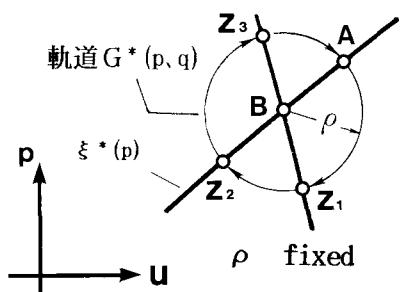


図5 分岐経路の球面探索
(球面半径規定)

——非線形解法 その5)——

分岐点近傍の既知のつり合い点を出発して、分岐点を中心とする球面とつり合い経路との交点を求める方法(図5)

その3)を用いて分岐経路を探索する場合、対称(不)安定分岐に対して、過って分岐荷重の下(上)側に出発点Aを設定すると、分岐経路への移行に失敗する。そこで分岐点B(u_B, p_B)を中心に半径 ρ の球面とつり合い経路(主経路と分岐経路)との交点を通過する軌道 $G^*(p, q)$ を

$$G(u, p, q) = \begin{Bmatrix} E(u, p) - q f \\ (u - u_B)^T(u - u_B) + (p - p_B)^2 - \rho^2 \end{Bmatrix} = O \quad (18)$$

で定義する。ここで出発点を分岐点近傍のつり合い点A(u_A, p_A)にとると、球面の半径は

$$\rho^2 = (u_A - u_B)^T(u_A - u_B) + (p_A - p_B)^2 \quad (19)$$

で規定され、球面上のつり合い点(単純分岐では少なくとも4個ある)で $q=0$ である。分岐点Bの位置(u_B, p_B)が必ずしも精度よくポイントできていない場合、 ρ が小さ過ぎるとうまく探索できないこともあるので、出発点Aの設定には注意を要する。

以上、出発点と軌道の支配方程式を種々に変えて、目標のつり合い点に至る全部で5種類の大域的非線形解法を提案した。応用数学の分野で研究されている大域的非線形解法は、その1)の射影法 関連のものがほとんどで、節点変位を拘束したままつり合い解に至る方法や分岐経路への経路切り替え方法などのように構造工学のための大域的非線形解法は、著者らが知る限り本論文以外では提案されていない。

3. 軌道追跡方法

実際の軌道追跡法とニュートン法による中継点・目標点の精算方法を、簡単に表1から表3にまとめた。その1)と その3)については、比較の目的で掲げた従来の弧長法との類似性が注目に値する。その2)、その4)、および その5)についても、同時に変動する荷重変数が複数個であったり、中継点の前後で軌道の支配方程式が異なるが、基本的には従来の予測子・修正子計算であるため、数行の修正だけ

で既成のコードに組み込むことが可能である。表1から表3では、修正子が予測子に直交するよう反復計算を行っているが、必ずしもこれが全てではないことを付言しておく（他にも数多くあるバージョンの機能性について、個々に議論することはこの論文の目的ではない）。

表 1	弧長法	その 1) ホモトピー法	その 3) 経路切替
支配 方程式	$E(u, p)=0$	$E(u, p_{\Lambda})-q E_{\Lambda}=0$	$E(u, p_{\Lambda})-q f=0$
予測子 方程式	$K d u-d p e=0$ $d u^T d u+d p^2=\Delta^2$	$K d u-d q E_{\Lambda}=0$ $d u^T d u+d q^2=\Delta^2$	$K d u-d q f=0$ $d u^T d u+d q^2=\Delta^2$
連立方程 式の解法	$K d u_p=+e$ $d u_p$ について解く	$K d u_q=+E_{\Lambda}$ $d u_q$ について解く	$K d u_q=+f$ $d u_q$ について解く
予測子	$d p=\pm \frac{\Delta}{\sqrt{d u_p^T d u_p+1}}$ $d u=d p d u_p$	$\left\{\begin{array}{l} d q=\pm \frac{\Delta}{\sqrt{d u_q^T d u_q+1}} \\ d u=d q d u_q \end{array}\right.$	
修正子 方程式	$K \delta u-\delta p e=-E$ $d u^T \delta u+d p \delta p=0$	$K \delta u-\delta q E_{\Lambda}=-(E-q E_{\Lambda})$ $d u^T \delta u+d q \delta q=0$	$K \delta u-\delta q f=-(E-q f)$ $d u^T \delta u+d q \delta q=0$
連立方程 式の解法	$K \delta u_0=-E$ $K \delta u_p=+e$	$K \delta u_0=-(E-q E_{\Lambda})$ $K \delta u_q=+E_{\Lambda}$	$K \delta u_0=-(E-q f)$ $K \delta u_q=+f$
修正子	$\delta p=-\frac{d u^T \delta u_0}{d u^T \delta u_p+d p}$ $\delta u=\delta u_0+\delta p \delta u_p$	$\delta q=-\frac{d u^T \delta u_0}{d u^T \delta u_q+d q}$ $\delta u=\delta u_0+\delta q \delta u_q$	
目標点 Z (q = 0) の精算スキーム			
修正子		$K \delta u=-E$ (δu について解く)	

表1 その1) と その2) における計算ステップ

表2	その2) 変位拘束	その3) 変位拘束
支配方程式	$E(u, p_{\Lambda})-q E_{\Lambda}-r b=0$ $u_k-u_{k \Lambda}=0$	$E(u, p_{\Lambda})-q f-r b=0$ $u_k-u_{k \Lambda}=0$
出発点Aから中継点M付近に至るまで (p=p _Λ) の計算スキーム (A→M)		
出発点A	p=p _Λ , q=1 & r=0	p=p _Λ , q=0 & r=0
予測子方程式	$K d u-d q E_{\Lambda}-d r b=0$ $d u^T d u+d q^2+d r^2=\Delta^2$ $d u_k=0$	$K d u-d q f-d r b=0$ $d u^T d u+d q^2+d r^2=\Delta^2$ $d u_k=0$
連立方程式の解法	$K d u_q=+E_{\Lambda}$ $d u_q, d u_r$ に $K d u_r=+b$ ついて解く	$K d u_q=+f$ $d u_q, d u_r$ に $K d u_r=+b$ ついて解く
予測子	$d q=\pm \frac{\Delta}{\sqrt{\left\{d u_q-\omega d u_r\right\}^T\left\{d u_q-\omega d u_r\right\}+1+\omega^2}}$ ただし $\omega=\left(d u_{q k} / d u_{r k}\right)$ $\begin{aligned} d r &=-\frac{\omega d q}{d u=d q d u_q+d r d u_r} \end{aligned}$ $d u_{q k}: d u_q$ の第k成分 $d u_{r k}: d u_r$ の第k成分	
修正子方程式	$K \delta u-\delta q E_{\Lambda}-\delta r b=-E(u, p_{\Lambda})+q E_{\Lambda}+r b$ $\delta u_k=0$ $d u^T \delta u+d q \delta q+d r \delta r=0$	$K \delta u-\delta q f-\delta r b=-E(u, p_{\Lambda})+q f+r b$ $\delta u_k=0$ $d u^T \delta u+d q \delta q+d r \delta r=0$
連立方程式の解法	$K \delta u_0=-E(u, p_{\Lambda})+q E_{\Lambda}+r b$ $K \delta u_q=+E_{\Lambda}$ $\delta u_0, \delta u_q, \delta u_r$ に $K \delta u_r=+b$ ついて解く	$K \delta u_0=-E(u, p_{\Lambda})+q f+r b$ $K \delta u_q=+f$ $\delta u_0, \delta u_q, \delta u_r$ に $K \delta u_r=+b$ ついて解く

<表2・次項に続く>

〈表2・続き〉

修正子	$\delta q = \frac{-d u^T \{ \delta u_0 - \omega \delta u_{0k} \delta u_r \} + \omega \delta u_{0k} d r}{d u^T \{ \delta u_q - \omega \delta u_{qk} \delta u_r \} + d q - \omega \delta u_{qk} d r}$ ただし $\omega = (1.0 / \delta u_{rk})$ $\delta u_{qk} : \delta u_q$ の第k成分 $\delta u_{rk} : \delta u_r$ の第k成分 $\delta u_{0k} : \delta u_0$ の第k成分 $\delta r = -\omega \{ \delta u_{0k} + \delta q \delta u_{qk} \},$ $\delta u = \delta u_0 + \delta q \delta u_q + \delta r \delta u_r$
中継点M ($p = p_A, q = 0$ & $r = r_M$) の精算スキーム	
支配方程式	$E(u, p_A) - r b = 0$ $u_k - u_{kA} = 0$
修正子方程式	$K \delta u - \delta r b = -E(u, p_A) + r b$ $\delta u_k = 0$
連立方程式の解法	$K \delta u_0 = -E(u, p_A) + r b$ $K \delta u_r = +b$ $\delta u_0, \delta u_r \text{ について解く}$
修正子	$\delta r = -\omega, \text{ ただし } \omega = (\delta u_{0k} / \delta u_{rk})$ $\delta u = \delta u_0 + \delta r \delta u_r$ $\delta u_{0k} : \delta u_0 \text{ の第k成分}$ $\delta u_{rk} : \delta u_r \text{ の第k成分}$
中継点Mから目標点Zの近傍に至る ($q = 0$) 計算スキーム ($M \rightarrow Z$ の近傍)	
支配方程式	$E(u, p) - r b = 0$ $u_k - u_{kA} = 0$
予測子方程式	$K d u - d p e - d r b = 0$ $d u^T d u + d p^2 + d r^2 = \Delta^2$ $d u_k = 0$
連立方程式の解法	$K d u_p = +e$ $K d u_r = +b$ $d u_p, d u_r \text{ について解く}$
予測子	$d r = \pm \frac{\Delta}{\sqrt{\{d u_r - \omega d u_p\}^T \{d u_r - \omega d u_p\} + \omega^2 + 1}}$ ただし $\omega = (d u_{rk} / d u_{pk})$ $d u_{rk} : d u_r$ の第k成分 $d u_{pk} : d u_p$ の第k成分 $d p = -\omega d r,$ $d u = d p d u_p + d r d u_r$
修正子方程式	$K \delta u - \delta p e - \delta r b = -E(u, p) + r b$ $\delta u_k = 0$ $d u^T \delta u + d p \delta p + d r \delta r = 0$
連立方程式の解法	$K \delta u_0 = -E(u, p) + r b$ $K \delta u_p = +e$ $K \delta u_r = +b$ $\delta u_0, \delta u_p, \delta u_r \text{ について解く}$
修正子	$\delta u_{pk} (d u^T \delta u_p + d p) \delta p + (d u^T \delta u_r + d r) \delta r = -\delta u_{0k}$ を ($\delta p, \delta r$) について解く。 $\delta u = \delta u_0 + \delta p \delta u_p + \delta r \delta u_r$ $\delta r = -\delta u_{0k}$ $\delta r = -d u^T \delta u_0$ $\delta u_{0k}, \delta u_{pk}, \delta u_{rk}$ は $\delta u_0, \delta u_p, \delta u_r$ の第k成分
目標点Z ($q = 0$ & $r = 0$) の精算スキーム	
修正子方程式	$K \delta u - \delta p e = -E(u, p)$ $\delta u_k = 0$
連立方程式の解法	$K \delta u_0 = -E(u, p)$ $K \delta u_p = +e$ $\delta u_0, \delta u_p \text{ について解く}$
修正子	$\delta p = -\omega, \text{ ただし } \omega = (\delta u_{0k} / \delta u_{pk})$ $\delta u = \delta u_0 + \delta p \delta u_p$ $\delta u_{0k} : \delta u_0 \text{ の第k成分}$ $\delta u_{pk} : \delta u_p \text{ の第k成分}$

表2 その2) と その4) の計算ステップ

表3	その5) 球面探索
支配 方程式	$\begin{aligned} E(u, p) - q f &= 0 \\ (u - u_B)^T(u - u_B) + (p - p_B)^2 - \rho^2 &= 0 \end{aligned}$
出発点Aから目標点Zの付近に至るためのスキーム (A→Z付近)	
予測子 方程式	$\begin{aligned} K d u - d p e - d q f &= 0 \\ 2(u - u_B)^T d u + 2(p - p_B) d p &= 0 \\ d u^T d u + d p^2 + d q^2 &= \Delta^2 \end{aligned}$
連立方程 式の解法	$\begin{aligned} K d u_p &= +e \\ K d u_q &= +f \end{aligned} \quad d u_p, d u_q \text{ について解く}$
予測子	$d q = \pm \frac{\Delta}{\sqrt{(d u_q^T d u_q + 1) + (d u_p^T d u_p + 1) \omega^2 - 2 d u_p^T d u_q \omega}}$ ただし $\omega = \frac{(u - u_B)^T d u_q}{(u - u_B)^T d u_p + (p - p_B)}$ $d p = -\omega d q, \quad d u = d p d u_p + d q d u_q$
修正子 方程式	$\begin{aligned} K \delta u - \delta p e - \delta q f &= -E(u, p) + q f \\ 2(u - u_B)^T \delta u + 2(p - p_B) \delta p &= -(u - u_B)^T(u - u_B) - (p - p_B)^2 + \rho^2 \\ d u^T \delta u + d p \delta p + d q \delta q &= 0 \end{aligned}$
連立方程 式の解法	$\begin{aligned} K \delta u_o &= -E + q f \\ K \delta u_p &= +e \\ K \delta u_q &= +f \end{aligned} \quad \delta u_o, \delta u_p, \delta u_q \text{ について解く}$
修正子	$\begin{aligned} 2 \{ (u - u_B)^T \delta u_p + (p - p_B) \} \delta p + 2(u - u_B)^T \delta u_q \delta q &= \\ = -2(u - u_B)^T \delta u_o - (u - u_B)^T(u - u_B) - (p - p_B)^2 + \rho^2 \\ (d u^T \delta u_p + d p) \delta p + (d u^T \delta u_q + d q) \delta q &= \\ = -d u^T \delta u_o & \\ \text{を } (\delta p, \delta q) \text{ について解く。} & \\ \delta u = \delta u_o + \delta p d u_p + \delta q d u_q & \end{aligned}$
目標点Z (q=0) の精算スキーム	
修正子の 方程式	$\begin{aligned} K \delta u - \delta p e &= -E(u, p) \\ 2(u - u_B)^T \delta u + 2(p - p_B) \delta p &= -(u - u_B)^T(u - u_B) - (p - p_B)^2 + \rho^2 \end{aligned}$
連立方程 式の解法	$\begin{aligned} K \delta u_o &= -E \\ K \delta u_p &= +e \end{aligned} \quad \delta u_o, \delta u_p \text{ について解く}$
修正子	$\begin{aligned} \delta p &= \frac{-(u - u_B)^T(u - u_B) - (p - p_B)^2 + \rho^2 - 2(u - u_B)^T \delta u_o}{2(u - u_B)^T \delta u_p + 2(p - p_B)} \\ \delta u &= \delta u_o + \delta p d u_p \end{aligned}$

表3 その5) の計算ステップ

4. 計算例

以上紹介した大域的収束性を有する非線形スキームのうち、その1)とその3)の応用例については、すでに文献^[1, 2, 7]のなかにある。以下ではひとつの共通のベンチマーク問題に、5種類の非線形解法の全部を応用してみた。支配方程式が解析的に与えられ、なおかつ結果の簡単な検証と再現が可能であるように、ベンチテストとして図6に示すキャナルバー（長さL、曲げ剛性EI、軸方向の非伸縮性）の有限変位問題を採用する。3本要素に対する離散化エラスティカ方程式^[3]はつぎのように与えられる。

$$\begin{cases} E_1(\phi_1, \phi_2, \phi_3, p) = (+31\phi_1 - 15\phi_2 + 3\phi_3) - 26p \sin\phi_1 = 0 \\ E_2(\phi_1, \phi_2, \phi_3, p) = (-15\phi_1 + 19\phi_2 - 9\phi_3) - 26p \sin\phi_2 = 0 \\ E_3(\phi_1, \phi_2, \phi_3, p) = (+3\phi_1 - 9\phi_2 + 7\phi_3) - 26p \sin\phi_3 = 0 \end{cases} \quad (20)$$

ここに (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) は各要素の有限剛体回転角である。接線剛性行列とpの荷重ベクトル e はそれぞれ、

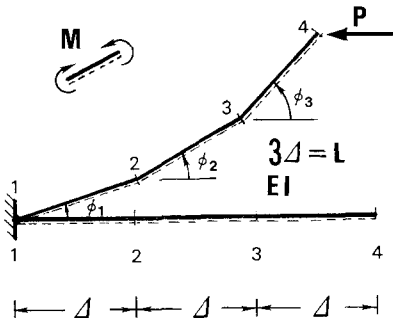


図6 エラスチカ
非線形モデル

$$K = \begin{bmatrix} +31-26p \cos \phi_1, & -15 & +3 \\ -15 & +19-26p \cos \phi_2, & -9 \\ +3 & -9 & +7-26p \cos \phi_3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

および、

$$e = (+26 p \sin \phi_1, +26 p \sin \phi_2, +26 p \sin \phi_3)^T \quad (22)$$

となる。なおここでは (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) と、節点における曲げモーメントとの間にある つぎの線形関係を活用した。

$$\begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{Bmatrix} = (1/26) \begin{bmatrix} +19, & -5, & +1 \\ -12, & +10, & -2 \\ +3, & -9, & +7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

荷重変数と曲げモーメントをそれぞれ、

$$p = P \Delta^2 / (6EI) = PL^2 / (54EI), \quad (24)$$

$$\text{および } m = M \Delta / (6EI) = ML / (18EI) \quad (25)$$

で無次元化してある。この3自由度モデルは $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$ の主経

路 I 上の $p_{cr} = (0.046745, 0.5000, 1.6455)$ において分岐点 (BP_1, BP_2, BP_3) が発生し、それぞれ分岐経路 II_1 、 II_2 、および II_3 が枝分かれしている。初固有値に対する固有ベクトルはそれぞれ、

$$\text{分岐点 } BP_1 \text{ にて } \Theta_1 = (+0.21132, +0.57735, +0.78867)^T \quad (26)$$

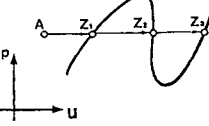
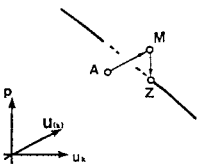
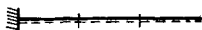
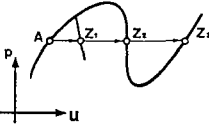
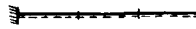
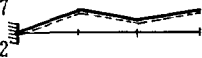
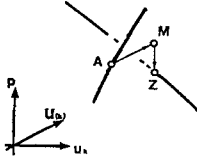
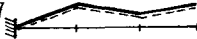
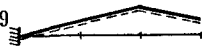
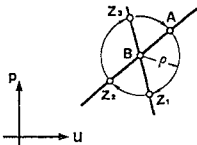
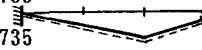
$$\text{分岐点 } BP_2 \text{ にて } \Theta_2 = (+0.57735, +0.57735, -0.57735)^T \quad (27)$$

$$\text{分岐点 } BP_3 \text{ にて } \Theta_3 = (+0.78867, -0.57735, +0.21132)^T \quad (28)$$

である。以下この非線形モデルに、その1)～その5)のすべてについて、出発点と軌道設定を種々に変えて数多くの試行を繰り返してつり合い点を探索してみた。各解法について代表的な結果をひとつずつ表4にまとめた。表4以外の試行についても、その多くのものが成功し目標点を捕獲することができた。提案する非線形解法が唯一機能しなくなる原因は、設定した軌道が出発点と目標点とを連続的に接続していないか、目標点に至る途中で軌道が枝分かれするかのいずれかである。このような軌道の不連続性や枝分かれに対しては、出発点や軌道の設定を変更することにより対処できる。

つぎの例題(図7)は、より自由度の多い例題(60節点変位)で、上述のキャンパルについて軸方向の非伸縮性の仮定を解除して、20本の直線はり要素で離散化したもの($EA=1000$, $EI=1$, $L=1$)である。軸方向変形のみが発生する主経路と $(PL^2/EI)=150$ の荷重一定平面との交点を出発点Aとして、大域的非線形解法 その3)を用いて、第4座屈荷重より上に位置するこの荷重レベルにおけるすべてのつり合い解を求めることをねらったものである。式(13)のベクトル $\mathbf{f}$ として、原点における固有ベクトルを採用した場合の、出発点Aと目標つり合い点とをつなぐ軌道 $F^*(q)$ に沿う系の変形を図7に示す。ステップ番号の0, 6, 17, 30, 42がそれぞれ、主経路と各座屈点から派生する分岐経路上のつり合い解を示す。軌道の反対方向にも探索すると全く対称の結果が得られる。

最後の例題(図8)は、水圧分布を受ける弾性円形リング($EA=1000$, $EI=1.0$, 半径1.0, 20要素、58節点変位)の分岐問題で、これも大域的非線形解法 その3)を用いて、分岐経路への移行をねらったものである。非保存系の問題の定式化は文献^[17]に依り、非対称接線剛性行列の固有値解析は、まず Danilevsky法で特性多項式の係数を求め、この根を Graeffe法で求めた。変形の対称性から円の左半分(6・9・12時)を解析対象とし、図8に主経路上から枝分かれする最初の5本の分岐経路を示す。横軸は左半円の中央断面(9時の位置)の水平変位を、中心に向かう向きを正としてプラスし、縦軸は水圧を示す。より高い荷重レベルの分岐点になるにつれ円周方向の波数が増え、分岐後も対称性を保ったまま変形が進行して行く。

大域的非線形解法	出発点A 設定条件・略変形図	目標点Z 略変形図
その 1) 	非 $\phi_1 = 0.0$ $\phi_2 = -\pi/2$ $\phi_3 = -\pi$ $p = +2.0$ $q = +1.0$ p 拘束 	つ $\phi_1 = +2.47457$ $\phi_2 = +2.47457$ $\phi_3 = -2.47457$ $p = +2.0$ $q = 0.0$ Π_2 
その 2) 	合 $\phi_1 = 0.0$ $\phi_2 = -\pi/2$ $\phi_3 = 0.0$ $p = +2.0$ $q = +1.0$ $r = 0.0$ ϕ_1 拘束 	り $\phi_1 = 0.0$ $\phi_2 = 0.0$ $\phi_3 = 0.0$ $p = +0.91297$ $q = 0.0$ $r = 0.0$ I 
その 3) 	つ $\phi_1 = 0.0$ $\phi_2 = 0.0$ $\phi_3 = 0.0$ $p = +1.65$ p 拘束 $q = 0.0$ $f = \theta_3, I$ 	合 $\phi_1 = +0.14179$ $\phi_2 = -0.10357$ $\phi_3 = +0.03782$ $p = +1.65$ $q = 0.0$ Π_3 
その 4) 	合 $\phi_1 = +0.14179$ $\phi_2 = -0.10357$ $\phi_3 = +0.03782$ $p = +1.65$ $q = 0.0$ ϕ_1 拘束 $r = 0.0$ $f = \theta_2, \Pi_3$ 	い $\phi_1 = +0.14179$ $\phi_2 = +0.14179$ $\phi_3 = -0.14179$ $p = +0.50167$ $q = 0.0$ $r = 0.0$ Π_2 
その 5) 	点 $\phi_1 = 0.0$ $\phi_2 = 0.0$ $\phi_3 = 0.0$ $p = +0.49$ $\rho = 0.01$ $q = 0.0$ BP_2 の下, I 	点 $\phi_1 = -0.0057735$ $\phi_2 = -0.0057735$ $\phi_3 = +0.0057735$ $p = +0.50$ $q = 0.0$ Π_2 

注) 変数 ($\phi_1, \phi_2, \phi_3, p, q, r$) は無次元量

表 4 大域的非線形法によるつり合い点の探索結果 (代表例のみ)

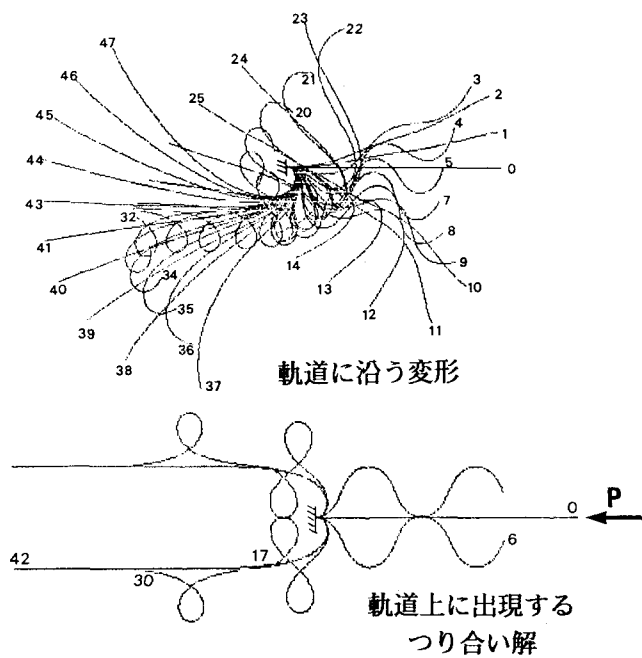
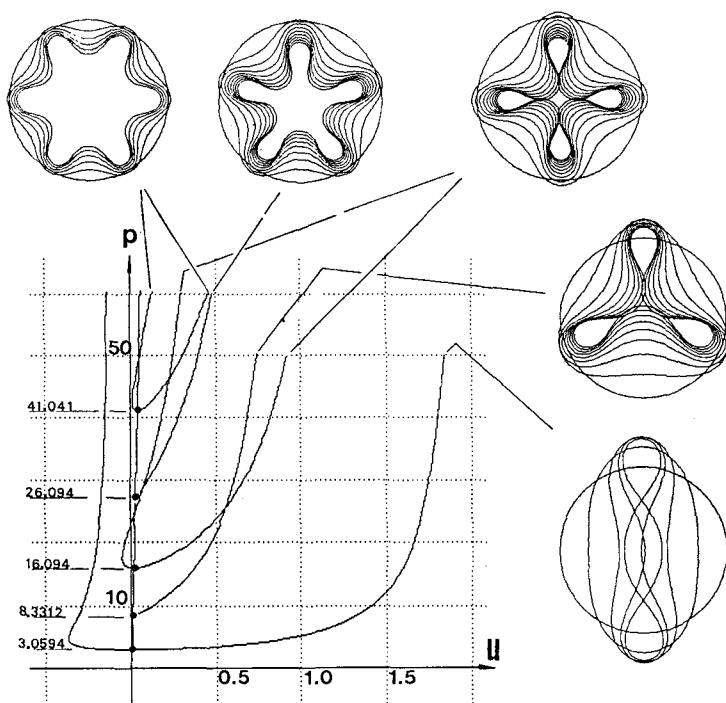


図7 軌道 $F^*(q)$ のトレース



5. まとめ

と* (p) の連続した一本の枝に沿って、言わば『縦断的に』つり合い点を計算して行くのが弧長法であるとするなら、と* (p) の各枝のつり合い点を『横断的に』探査して行くのが、本論文の大域的非線形解法である。と* (p) より遠く逸脱した点から、再び と* (p) に引き戻す際に効果的な計算戦略であり、また遊離経路や分岐経路へのアクセスの際にも有効に使える。これによりつり合い方程式の非線形解法の可能性は、弧長法のみを使用する場合に比べて、飛躍的に増大する。わずかの修正だけで既存の汎用コードに容易に組み込み、そのたどるべき道筋を適宜イテラティブに指定して、つり合い解に至ることが可能となる。出発点から目標点までは複数のルートがあるが、その反面途中で分岐点が出現せず、しかも出発点と目標点とが連続した分枝上にあつて確実に目標点に結びつく軌道の設定には物理的洞察を必要とする。

大域的非線形解法は、目標点に対する情報が全くない場合に有用な非線形解法であり、目標点に至るまでの道のりをこなすために、かなりの計算量を伴う場合がある。その反面計算上の利点として、①つり合い点であろうと、非つり合い点であろうと、全くの任意の点を出発点とすることができ、②たとえ目標点が出発点よりはるか遠方にあつとしても、任意の長さの軌道をたどれば、複数の目標解を探査することもできるため、経済的にも十分に採算の取れる非線形解法である。

参考文献

- [1] Fujii, F. and Asada, K., "Branch-switching in simple spatial bifurcation models", SEIKEN-IASS Symposium on Nonlinear Analysis and Design for Shell and Spatial Structures, October 20-22, 1993, Tokyo
- [2] Fujii, F. and Kitagawa, T., "Branching predictor in bifurcation of 2D elastic frames", 『Computational Mechanics』, Balkema, edited by S. Valliappan, Vol. 2, 733-738, 1993
- [3] Fujii, F., "Scheme for Elasticas with Snap-back and Looping", EM, ASCE, Vol. 115, No. 10, 2166-2181, 1989
- [4] Fujii, F. and Choong, K. K., "Branch-Switching in Bifurcation of Structures", EM, ASCE, Vol. 118, No. 8, 1578-1596, 1992
- [5] Choong, K. K., Fujii, F. and Kitagawa, T., "Access to bifurcated and isolated equilibrium branches of structures", in 『Computational Mechanics』, Balkema, Rotterdam, 463-468, 1991
- [6] 藤井文夫, "非線形増分方程式の解法のための篠原法について", 構造工学論文集, Vol. 35A, 1989年 3月, 195-202
- [7] 藤井文夫, 内藤幹夫, "大域の収束性を有する非線形つり合い方程式の解法", 日本応用数理学会, 93年度年会, 93年9月, 大阪市 龍谷大学にて
- [8] 藤井文夫, 北川竜三, "エラスチカ問題の経路追跡法と経路切りかえ方法", 京都大学数理解析研究所講義録 748, 33-42, 短期共同研究『連立非線形方程式の大域における数値解法とその応用』, 1991年
- [9] 小島政和, "相補性と不動点-アルゴリズムによるアプローチ", 講座・数理計画法9, 産業図書, 1981年
- [10] 伊理正夫, "数値計算-方程式の解法-", 朝倉書店, 理工系基礎の数学12, 1981年
- [11] Navaee, S. and Elling, R. E., "Equilibrium configurations of cantilever beams subjected to inclined end loads", Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 59, Sept. 1992, 572-579
- [12] Fried, I., "Orthogonal trajectory accession to the nonlinear equilibrium curve", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 47(1984), 283-297
- [13] Fujii, F., Choong, K. K. and Gong, S.-X., "Variable displacement control to overcome turning points of nonlinear elastic frames", Computers & Structures, Vol. 44, No. 1/2, 133-136, 1992
- [14] Duxbury, P. G., Crisfield M. A. and Hunt, G. W., "Benchtests for geometric nonlinearity", Computers & Structures, 21-29, 1989
- [15] Eriksson, A., "On accurate descriptions for primary and secondary paths in equilibrium problems", Computers & Structures, Vol. 44, No. 1/2, 229-242, 1992
- [16] Allman, D. J., "Calculation of the stable equilibrium paths of discrete conservative systems with singular points", Computers & Structures, Vol. 32, No. 5, 1045-1054, 1989
- [17] Fujii, F., Naito, M. and Gong, S.-X., "Finite displacement theory of straight beams under configuration-dependent uniform loads", Computers & Structures, Vol. 36, No. 1, 157-167, 1990

(1993年9月16日受付)