

# 積雪の比較的大きな変形を対象とした個別要素解析手法

## A DISTINCT ELEMENT METHOD FOR LARGE SNOW DEFORMATION ANALYSIS

阿部和久\*・青木 究\*\*

By Kazuhisa ABE and Kiwamu AOKI

A distinct element procedure in which mechanical property of the assembly is not affected by deformation is developed for snow deformation analysis. Through a theoretical study, it is found that the viscosity of the assembly depends on the distance between particles in contact with each other  $r$ , the contact point density function  $\psi$  and the mass density of the assembly  $\gamma$ . Since these values are changed by deformation, the property of the assembly is altering through the analysis. In order to control the mechanical behaviour of the assembly, viscous coefficient of each dashpot is adjusted based on the values of  $r$ ,  $\psi$  and  $\gamma$ . Several numerical experiments show that the proposed procedure can be an effective strategy to large snow deformation analysis.

**Key Words :** *distinct element method, snow deformation analysis, property of granular assembly*

### 1. はじめに

これまで著者らは、個別要素法を用いた積雪の変形解析手法の構成について検討を行ってきた<sup>1),2)</sup>。長時間に亘る変形を対象とする場合、積雪の力学的挙動は粘性体として捉えることができる<sup>3),4)</sup>。そこで、接触要素間に粘性ダッシュポットを挿入した個別要素集合体により、積雪の有するいくつかの基本的特性を反映した解法の構成を試みた。その結果、巨視的性質が積雪に概ね一致する粘性粒子集合体を構成することが可能であるが、一軸応力下における引張、圧縮時にポアソン比が0.5,0.0と、それぞれ異なる値を示す雪の特性<sup>5)</sup>に、粒子集合体の特性を完全に一致させることは不可能であることがわかった。また、粘性粒子集合体の巨視的性質は各粒子間の接触状態に依存するが、変形の進行に伴い接触点の位置が変化するため、粒子集合体の巨視的粘性係数やポアソン比などは変形と共に変動し、一定とはならない。実際に観測される積雪の変形は、積雪どうしや地表面、構造物との間に滑動や接触を伴い複雑な挙動を示す。このような問題に対する個別要素法の特徴の一つは、連続体から非連続体までの挙動を一貫して解析可能な点にあり、そのような観点からの研究もいくつか見られる<sup>6)</sup>。個別要素法による積雪の変形解析においても、最大の利点はこれらの複雑で比較的大きな変形過程を簡単なアルゴリズムの下で解析可能な点にあるが、当問題に対する個別要素法の適用においては、巨視的性質が変形に依存することのない個別要素集合体の構成が不可欠である。

そこで著者らは最初の試みとして、通常の粘性体への適用を対象に、上述の問題点に対する改善策について検討を行った<sup>7)</sup>。本論文では、さらに積雪を対象とし、巨視的性質が変形に依存することのない個別要素解析手法の構成について検討する。以下ではまず、粘性粒子集合体の運動方程式系を、ランダムな格子上で

\* 工博 新潟大学工学部 (新潟市五十嵐二の町 8050 番地)

\*\* 三井建設株式会社

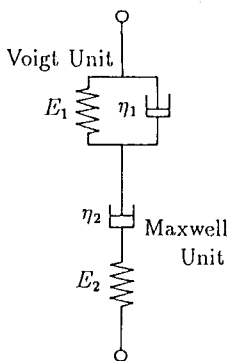


図-1 積雪の粘弾性モデル

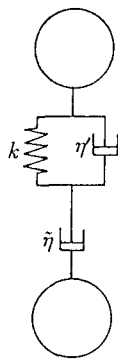


図-2 個別要素モデル

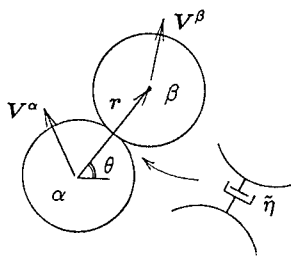


図-3 粘性粒子モデル

定義された陽的差分方程式として捉え、その方程式が近似している連続体との関係を誘導し、巨視的性質の変形依存性について考察する。次に、粒子集合体の接触状態に基づき各ダッシュポットの粘性係数を設定することで、変形に依存しない粒子集合体が構成可能であることを示し、巨視的粘性係数やポアソン比の、積雪との適合性について検討する。最後に、実際の解析において以上の方法を適用するために必要となる各要素毎の接触状態と巨視的密度の評価方法について検討する。

## 2. 粘性粒子集合体の巨視的性質の変形依存性

積雪の粘弾性的性質は、図-1に示すようなモデルで表現することができる<sup>3)</sup>。特に長時間に亘る変形挙動では粘性体と見なすことができ、Maxwellユニット内のダッシュポット $\eta_2$ で表現可能である。そこで、個別要素法による積雪の粘性的挙動の解析には、図-2に示す要素モデルを採用する<sup>1), 2)</sup>。要素集合体の粘性的挙動は直列ダッシュポット $\tilde{\eta}$ により表現されるが、積雪のように粘性係数が密度により大幅に変動する問題を解析する場合、ダッシュポット単独では安定解を得ることが困難であり、文献1)に示したように、Voigtユニットを挿入することにより解の安定性を改善することができる。ただし、要素集合体の粘性的挙動は、ダッシュポット $\tilde{\eta}$ のみを挿入した要素モデルを考えることで把握することができ、その巨視的性質の検討には図-3のような粘性粒子を考えればよい。なお、通常の個別要素解析では、せん断に対する接触モデルも用いられているが、本研究では図のように接触面に垂直な方向にのみ抵抗するモデルを採用しており、引張に対して機能させることで、巨視的なせん断変形に抵抗し得る要素集合体を構成している。したがって、ここで対象とする個別要素集合体は、接触面の垂直方向にのみ力が作用する粒子集合体となる。

図-3のように、互いに接触し合っている二つの粒子 $\alpha$ と $\beta$ を考える。粒子 $\beta$ から粒子 $\alpha$ に作用する力 $F^\beta$ は次式で与えられる。

$$F^\beta = [(V^\beta - V^\alpha) \cdot n] \tilde{\eta} n \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 $(\cdot)$ は内積を意味し、 $V^\alpha, V^\beta$ は各粒子の速度ベクトルであり、 $n$ は粒子 $\alpha$ と粒子 $\beta$ の中心点を結ぶベクトル $r$ に平行な、接触面の単位法線ベクトルで次式のように与えられる。

$$n = r / |r| \dots \dots \dots (2)$$

粒子 $\alpha$ に作用する外力は、式(1)と同様にして定義される全接触粒子からの作用力の総和により与えられる。すると、粒子 $\alpha$ の運動方程式は次式で与えられることとなる。

$$m^\alpha \dot{V}^\alpha = \sum_\beta F^\beta \dots \dots \dots (3)$$

ここで、 $m^\alpha$ は粒子 $\alpha$ の質量で、 $\dot{\mathbf{V}}^\alpha$ は加速度である。また、右辺の総和は接触している全粒子に対してとる。

個別要素法では、式(3)より要素の加速度を求め、陽的時間積分スキームを適用することで、各要素毎の次ステップにおける運動状態が計算される。なお、本研究ではオイラースキームを時間積分法として用いている<sup>1)</sup>。

以下では二次元問題について考える。また、式(3)の運動方程式系で支配される粘性粒子集合体の巨視的性質について調べるため、集合体の変形状態は巨視的に十分滑らかなものと仮定する。ある力学状態における粒子集合体全体の接触状態を表す接触点密度関数 $\psi(\theta)$ <sup>8)</sup>を導入し、式(3)の右辺の総和に対する巨視的な値を $\psi(\theta)$ による重み付き積分で置き換えると、力学的状態を代表している粒子 $\alpha$ に対して、次の運動方程式を得る。

$$\int_0^{2\pi} \tilde{\eta}[(\mathbf{V}^\beta - \mathbf{V}^\alpha) \cdot \mathbf{n}] n \psi(\theta) d\theta = m^\alpha \dot{\mathbf{V}}^\alpha \dots\dots\dots (4)$$

なお、 $\theta$ は水平軸と $\mathbf{n}$ とがなす角度であり、接触点密度関数 $\psi(\theta)$ は、 $\theta$ 方向に存在する単位ラジアン当りの接触点数を意味する。また、粒子 $\alpha$ から見た粒子 $\beta$ との接触角を $\theta$ とすると、 $\beta$ から見た $\alpha$ との接触角は $\theta + \pi$ となるから、 $\psi(\theta) = \psi(\theta + \pi)$ である。

式(4)を各成分で表すと次式のようにになる。

$$\int_0^{2\pi} \tilde{\eta}(V_j^\beta - V_j^\alpha) n_j n_i \psi d\theta = m^\alpha \dot{V}_i^\alpha \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 $V_i^\alpha$ は $\mathbf{V}^\alpha$ のベクトル成分である。また、繰り返し指標は総和規約に従うものとする。

式(3)の右辺は式(1)より与えられるが、これは粒子集合体の接触構造下で与えられるランダムな格子上の差分式と見なすことができる。そこで、この差分に対応する連続体の運動方程式を、式(5)より誘導する。

式(5)において、粒子 $\beta$ の速度ベクトル $V_j^\beta$ を粒子 $\alpha$ に関して Taylor 展開すると次式を得る。

$$V_j^\beta - V_j^\alpha = V_{j,k}^\alpha \Delta x_k + \frac{1}{2} V_{j,kl}^\alpha \Delta x_k \Delta x_l + \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $(\cdot)_{,k} = \partial/\partial x_k$ であり、 $\Delta x_k$ は次式で与えられる。

$$\Delta x_k = r n_k, \quad n_1 = \cos \theta, \quad n_2 = \sin \theta \dots\dots\dots (7)$$

引張力の作用している接触点における接触粒子どうしの中心点間距離 $r$ は変形の進行に伴い増加する。逆に圧縮力の作用している接触点の $r$ は減少する。また、引張と圧縮の接触点分布は巨視的変位場に依存する。したがって一般に $r$ は接触角 $\theta$ の関数であり、接触点密度関数と同様に $r(\theta) = r(\theta + \pi)$ となる。そこで、 $r$ と $\psi$ の周期性を考慮し、式(6)を式(5)へ代入すると、 $\Delta x_k$ の一次の項の積分はゼロとなり、次式を得る。

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} n_i n_j n_k n_l r^2 \psi \tilde{\eta} d\theta V_{j,kl}^\alpha + O(r^4) = m^\alpha \dot{V}_i^\alpha \dots\dots\dots (8)$$

ここで $O(r^4)$ は $r^4$ のオーダーの項を意味する。

代表粒子の粒子半径を $a$ 、粒子の質量密度を $\rho$ とし、集合体の巨視的密度を $\gamma$ とすると、粒子の質量 $m^\alpha$ は次式で与えられる。

$$m^\alpha = \pi a^2 \rho = \frac{\pi a^2 \rho}{\gamma} \gamma \dots\dots\dots (9)$$

式(9)を(8)の右辺に代入し、 $r \simeq 2a$ とすると次式を得る。

$$\eta_{ijkl} V_{j,kl}^\alpha + O(a^2) = \gamma \dot{V}_i^\alpha \quad (r \simeq 2a), \quad \eta_{ijkl} = \frac{\gamma}{2\pi a^2 \rho} \int_0^{2\pi} n_i n_j n_k n_l r^2 \psi \tilde{\eta} d\theta \dots\dots\dots (10)$$

式(10)より、粘性粒子集合体は、粘性係数が $\eta_{ijkl}$ で定義されている粘性体の運動方程式を、粒子半径 $a$ の2次のオーダーで近似していることがわかる。また、変形の進行に伴い $r, \psi, \gamma$ は変動するため、その結果、粒子集合体の巨視的粘性係数は変形に依存したものとなる。さらに、一般に $\psi$ と $r$ は方向性を有するため、粒子集合体の巨視的粘性係数は異方性を示し、その度合も変形に伴い変化する。

### 3. 巨視的性質が変形に依存しない粒子集合体の構成

2.において、粒子集合体の巨視的性質が $r, \psi, \gamma$ に依存することを示した。巨視的粘性係数が変形に依存するのは、 $r, \psi, \gamma$ の値が変形と共に変動することが原因である。そこで、接触点における各ダッシュポットの粘性係数 $\tilde{\eta}$ をそれぞれ異なる値に設定し、 $r, \psi, \gamma$ の影響を相殺することで、変形に依らず、また等方性を有する粘性粒子集合体を構成する方法について検討する。

式(10)において、ダッシュポットの粘性係数 $\tilde{\eta}$ を $r, \psi, \gamma$ に基づき次式のように設定する。

$$\tilde{\eta} = \frac{2\pi a^2 \rho}{r^2 \psi \gamma} C \quad (C: \text{定数}) \dots\dots\dots (11)$$

式(11)を(10)の第二式に代入すると、右辺における被積分項より、 $r^2, \psi$ の項が無くなる。その結果、容易に積分を行うことができ、 $\eta_{ijkl}$ は次式で与えられる。

$$\eta_{ijkl} = \frac{\pi C}{4} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\delta_{ij}: \text{Kroneckerのデルタ}) \dots\dots\dots (12)$$

式(12)より、式(11)のように $\tilde{\eta}$ を設定することによって、変形に依存しない粒子集合体が構成できることがわかる。

ところで、等方性体における $\eta_{ijkl}$ は次式で与えられる。

$$\eta_{ijkl} = \frac{\eta}{2(1+\nu)} \left( \frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right) \dots\dots\dots (13)$$

ここで、 $\nu$ はポアソン比であり、 $\eta/2(1+\nu)$ はせん断変形に対する粘性係数である。

一方、式(12)において定数 $C$ の値を $C = 8\eta/5\pi$ と設定することにより、粒子集合体に対して次の巨視的粘性係数を得る。

$$\eta_{ijkl} = \frac{2}{5} \eta (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \dots\dots\dots (14)$$

式(14)は、式(13)において $\nu = 1/4$ とした場合に一致する。すなわち、式(10)においてダッシュポットの粘性係数を

$$\tilde{\eta} = \frac{16a^2 \rho}{5r^2 \psi \gamma} \eta \dots\dots\dots (15)$$

と設定すれば、変形に依存することのない $\nu = 1/4$ なる等方体を近似することが可能となる。

式(15)のように接触点密度関数 $\psi$ の影響を $\tilde{\eta}$ により相殺したモデルでは、 $\psi \tilde{\eta}$ の値が $\theta$ に関して一定となるが、この巨視的性質は一様な接触状態( $\psi(\theta) = \text{const}$ )における粒子集合体の性質に相当しており、その場合に $\nu = 1/4$ となる。なお、同様の考察は、Bažant & Gambarova<sup>9)</sup>によりコンクリートのマイクロプレーンモデルにおいてなされており、マイクロプレーンの存在があらゆる方向に一様な場合に $\nu = 1/4$ となることが示されている。

本研究では、せん断に抵抗する個別要素モデルを用いていないため、ポアソン比が $\nu = 1/4$ である集合体しか構成することができないが、さらにせん断に抵抗し得るモデルを導入すれば、他のポアソン比を有する集合体も構成可能である。

### 4. 積雪変形解析における $\tilde{\eta}$ の設定

積雪は通常の粘性体と著しく異なる性質を有する。例えば、粘性係数 $\eta$ は積雪の密度 $\gamma$ と雪温 $\theta$ に関して指数的に変化し、 $\gamma \geq 0.1(g/cm^2)$ の雪に対しては次式のようになることが実験的に確かめられている。

$$\eta = \bar{\eta} \cdot e^{C_1|\theta|+C_2\gamma} \dots\dots\dots (16)$$

ここで、 $C_1, C_2$ は正の定数であり、例えば含水率0%のしまり雪に対しては、 $C_1 = 0.089, C_2 = 25.3$  という値が示されており<sup>5)</sup>、密度に対して特に鋭敏である。

また、一軸応力下の変形過程において、引張時には $\nu = 0.5$  となり体積変化は生じず、圧縮時には $\nu = 0.0$  となる。そのため、粘性係数も応力状態に応じて異なる値をとり、平面ひずみ状態においては、引張、圧縮、せん断に対する粘性係数の比は $\eta_t : \eta_c : \eta_s = 4 : 2 : 1$  となる。

このような積雪の特性を個別要素モデルに可能な限り反映させるために、これまで著者らは、ダッシュポットの粘性係数 $\tilde{\eta}$ を引張と圧縮とで異なる値 $\tilde{\eta}_t$ と $\tilde{\eta}_c$ にとり、粒子集合体の巨視的粘性係数が、引張と圧縮に対し2 : 1 となるように $\tilde{\eta}_t$ と $\tilde{\eta}_c$ との比を設定する方法を採った。本研究においても同様に、 $\tilde{\eta}_t$ と $\tilde{\eta}_c$ の比を設定し、その下で各ダッシュポットの粘性係数を式(15)のように与える方法を探る。

引張と圧縮におけるダッシュポットの粘性係数の比を

$$\tilde{\eta}_r = \frac{\tilde{\eta}_t}{\tilde{\eta}_c} \dots\dots\dots (17)$$

と、ある一定値にとり、 $\tilde{\eta}_t$ を式(15)と同様に次式で与える。

$$\tilde{\eta}_t = \frac{a^2 \rho}{r^2 \psi \gamma} C \quad (C : \text{定数}) \dots\dots\dots (18)$$

引張と圧縮とで $\tilde{\eta}$ を異なる値にとる場合の、一様応力下における粒子集合体の巨視的粘性係数については、文献1),2)と同様に式(10)より導くことができる。以下にその結果のみを示す。

平面ひずみ状態において、 $\sigma_{22} \neq 0, \sigma_{11} = \sigma_{12} = 0$  の応力下での巨視的粘性係数 $\eta$ を次式で定義する。

$$\sigma_{22} = \eta \dot{\epsilon}_{22} \dots\dots\dots (19)$$

ここで、 $\dot{\epsilon}_{22}$ はひずみ速度である。

一方、せん断応力場を $\sigma_{11} = -\sigma_{22}, \sigma_{12} = 0$  により構成し、その下での巨視的粘性係数 $\eta_s$ を次式で定義する。

$$\tau = \eta_s \dot{\gamma}_{12} \dots\dots\dots (20)$$

ここで、 $\tau = \sigma_{22}, \dot{\gamma}_{12} = \dot{\epsilon}_{22} - \dot{\epsilon}_{11}$  である。

また、一様なひずみ場を次の関係式で与える。

$$\dot{\epsilon}_{11} = -\mu \dot{\epsilon}_{22}, \quad \dot{\epsilon}_{12} = 0 \dots\dots\dots (21)$$

ここで、 $\mu$ は未知量であり、引張、圧縮、せん断の各応力状態における値をそれぞれ $\mu_t, \mu_c, \mu_s$ とする。

なお、 $\mu$ とポアソン比 $\nu$ との関係は次式で与えられる。

$$\nu_t = \frac{\mu_t}{1 + \mu_t}, \quad \nu_c = \frac{\mu_c}{1 + \mu_c} \dots\dots\dots (22)$$

また、接触粒子間の相対速度 $(\mathbf{V}^\beta - \mathbf{V}^\alpha) \cdot \mathbf{n}$ の符号が変わる角度 $\theta$ は次式より与えられる。

$$\tan^2 \theta = \mu \dots\dots\dots (23)$$

式(17),(18)のようにダッシュポットの粘性係数を設定する場合、各応力状態における巨視的粘性係数は以下のように与えられる。

一軸引張 ( $\dot{\epsilon}_{22} > 0$ )

式(23)における角度 $\theta_t$ は次の方程式をみたすものとなる。

$$\sin^2 \theta_t \left[ (1 - \tilde{\eta}_r) \left( \frac{\theta_t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\theta_t \right) + \frac{\pi}{4} \tilde{\eta}_r \right] - \left[ (1 - \tilde{\eta}_r) \left( \frac{\theta_t}{8} - \frac{1}{32} \sin 4\theta_t \right) + \frac{\pi}{16} \tilde{\eta}_r \right] = 0 \dots\dots\dots (24)$$

また、巨視的粘性係数 $\eta_t$ は次式で与えられる。

$$\eta_t = \frac{8C}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{4}(1 - \mu_t) + \left( \frac{1}{\tilde{\eta}_r} - 1 \right) \left[ \frac{\theta_t}{2}(1 - \mu_t) - \frac{1}{4} \sin 2\theta_t(1 + \mu_t) \right] \right\} \dots\dots\dots (25)$$

一軸圧縮 ( $\dot{\varepsilon}_{22} < 0$ )

$\theta_c$ に関する方程式:

$$\sin^2 \theta_c \left[ (\tilde{\eta}_r - 1) \left( \frac{\theta_c}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\theta_c \right) + \frac{\pi}{4} \right] - \left[ (\tilde{\eta}_r - 1) \left( \frac{\theta_c}{8} - \frac{1}{32} \sin 4\theta_c \right) + \frac{\pi}{16} \right] = 0 \dots\dots\dots (26)$$

巨視的粘性係数 $\eta_c$ :

$$\eta_c = \frac{8C}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{4\tilde{\eta}_r}(1 - \mu_c) + \left( 1 - \frac{1}{\tilde{\eta}_r} \right) \left[ \frac{\theta_c}{2}(1 - \mu_c) - \frac{1}{4} \sin 2\theta_c(1 + \mu_c) \right] \right\} \dots\dots\dots (27)$$

せん断場 ( $-\sigma_{11} = \sigma_{22}$ )

$\theta_s$ に関する方程式:

$$\sin^2 \theta_s \left[ (1 - \tilde{\eta}_r)\theta_s + \frac{\pi}{2}\tilde{\eta}_r \right] - \frac{\pi}{4}\tilde{\eta}_r + (\tilde{\eta}_r - 1) \left( \frac{\theta_s}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta_s \right) = 0 \dots\dots\dots (28)$$

巨視的粘性係数 $\eta_s$ :

$$\eta_s = \frac{8C}{\pi} \left[ \left( \frac{1}{\tilde{\eta}_r} - 1 \right) \left( \frac{3\theta_s}{8} - \frac{\sin 2\theta_s}{4} + \frac{\sin 4\theta_s}{32} - \theta_s \sin^4 \theta_s \right) + \frac{3\pi}{16} - \frac{\pi}{2} \sin^4 \theta_s \right] \dots\dots\dots (29)$$

以上より、 $\eta_t/\eta_c = 2$ を与える $\tilde{\eta}_r$ を求めると $\tilde{\eta}_r = 2.19$ を得る。このとき式(25),(27),(29)より各応力状態における巨視的粘性係数の比を求めると $\eta_t : \eta_c : \eta_s = 3.93 : 1.96 : 1$ となり、積雪のそれに近い値を有することがわかる。また、式(22)より引張と圧縮時のポアソン比を求めると、それぞれ $\nu_t = 0.337, \nu_c = 0.176$ であり、積雪の場合と完全に一致はしないが、同傾向の粒子集合体を得られることがわかる。

なお、積雪の粘性係数に見られる式(16)の様な密度依存性を考慮する場合には、式(18)の $\tilde{\eta}_t$ を次のように変更すればよい。

$$\tilde{\eta}_t = \frac{a^2 \rho}{r^2 \psi \gamma} C \cdot e^{C_2 \gamma} \dots\dots\dots (30)$$

## 5. 数値実験に基づく有効性の検討

3.,4.に提案した解析手法により、巨視的性質が変形に依存することのない粒子集合体が実際に構成可能であることを検証するために、数値実験を行った。解析条件を図-4に示す。解析では、半径が0.8cmから1.2cmまでの1056個の個別要素により、図のような40cm×100cmの要素集合体を作成し、上辺に一樣応力 $\sigma_{22}$ を応力一定条件下に加え、一軸引張および一軸圧縮の各変形解析を行った。また、各応力時の巨視的粘性係数 $\eta_t, \eta_c$ は、各時刻における要素集合体の高さを $h$ として、次式に基づき評価した。

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon}, \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{h}}{h} \dots\dots\dots (31)$$

各接点のダッシュポットに対し、式(30)のような設定を行うためには、 $r, \psi, \gamma$ の評価が必要である。 $r$ は各変形段階における接触要素間距離より与えられる。一方、接触点密度関数 $\psi$ と巨視的密度 $\gamma$ は要素集合体の接触状態に基づいて評価しなければならない。ここでは、要素集合体全体が一樣な応力・変形状態にあることから、 $\psi, \gamma$ を集合体全体の状態に基づいて求めることとした。 $\psi$ の評価に対しては、全要素の接触状態より、開き角 $10^\circ$ 毎に接触点数を求め、その値に基づき $10^\circ$ 毎の分布を作成した。また、 $\gamma$ は集合体全体の体積で全要素の質量を割って求めた。

まずはじめに、従来の個別要素法のように全てのダッシュポットの粘性係数を一定値にとる場合と、本研究で提案する方法による場合とを、式(31)で定義した巨視的粘性係数に基づいて比較する。なお、解析では、引張と圧縮におけるダッシュポットの粘性係数を等しくおき( $\tilde{\eta}_r = 1$ )、 $\gamma$ に対する指数関数的依存性に

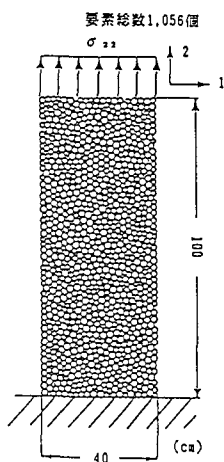


図-4 解析条件

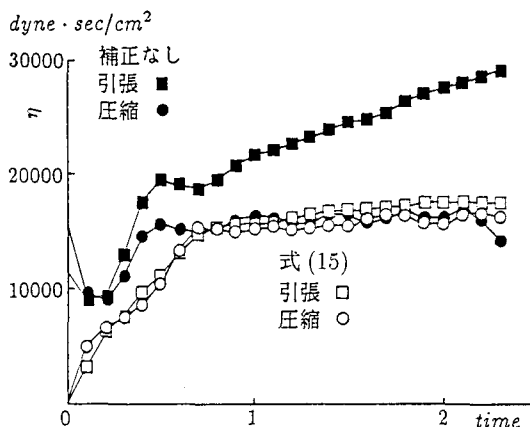


図-5 変形に伴う巨視的粘性係数の変動

については考えず、式(15)のような設定による基本的効果について調べた。結果を図-5に示す。図の横軸は解析上の時刻(秒)を示しているが、時間ステップ幅やダッシュポットの粘性係数等は、安定に解析が進められる範囲で設定したものであり、時間や粘性係数のオーダー自体は具体的物理量を反映したものではない。また、積雪の変形過程に要する時間は一般に安定解析に必要な時間増分に比べ非常に長く、巨視的粘性係数を積雪の粘性係数に設定した実時間での解析は現実的でない。そこで実際の解析では、文献2)に示したように、時間 $t$ と粘性係数 $\eta$ との比が一定( $t/\eta = \tau/\bar{\eta}$ )の下で、解析上適切な時間 $\tau$ と粘性係数 $\bar{\eta}$ に変換する手法が有効となる。なお、変形は、いずれのケースにおいても、解析時間内に供試体の高さで約30%まで達していた。図より、ダッシュポットの粘性係数に何ら補正を行わない従来解法において、引張の粘性係数が変形の進行に伴い大きく増大している様子が認められる。これは、変形と共に接触点が鉛直軸近傍に集中し<sup>2)</sup>、さらにそれらの接触点における要素間距離 $r$ が増加するため、結果的に鉛直方向に対して強い要素集合体へと移行して行ったことによるものと考えられる。一方、圧縮過程においては、接触点は圧縮軸に直行する方向で増加し、圧縮軸方向近傍における接触点での $r$ が減少し、巨視的密度は増加する。これらの効果が相殺し合うため、圧縮時における巨視的粘性係数は変形が進行してもほぼ一定値を示したものと考えられる。

一方、式(15)により各ダッシュポットの粘性係数を設定する場合、引張、圧縮のいずれの応力状態に対しても、巨視的粘性係数はほぼ等しい値を示し、変形に依存せずほぼ一定値を保っており、本研究で提案する手法が変形に依存しない粒子集合体の構成に対して有効であることが確かめられる。

次に、引張と圧縮におけるダッシュポットの粘性係数の比 $\bar{\eta}_r$ を1,2,3と異なる値にとり、 $\bar{\eta}_r$ と $\eta_t/\eta_c$ との関係を求めた。 $\bar{\eta}_r = 2, 3$ に対する引張、圧縮時の巨視的粘性係数を図-6に示す。なお、 $\bar{\eta}_r = 1$ での結果は図-5に示したとおりである。 $\bar{\eta}_r = 3$ の場合における引張時の巨視的粘性係数が多少振動しているが、いずれのケースにおいても変形に依らず概ね一定な粘性係数が得られていることがわかる。これらの解析結果より、各時刻における巨視的粘性係数の平均値を求め、その値に基づき各 $\bar{\eta}_r$ に対する $\eta_t/\eta_c$ を求めた。結果を図-7に示す。図中には、4.に誘導した理論式より求めた値も合わせて示した。解析結果は理論値とほぼ一致しており、いずれにおいても、 $\eta_t/\eta_c = 2$ を与える $\bar{\eta}_r$ として $\bar{\eta}_r \approx 2.2$ が得られていることなどから、本研究に示した手法を適用することで、巨視的性質が変形に依存しない、ほぼ理論通りの粒子集合体が構成されている様子が窺える。

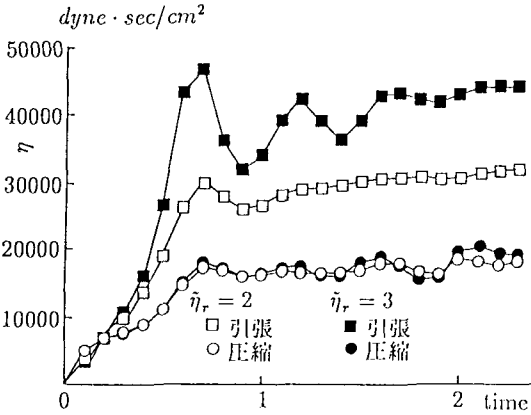


図-6  $\eta_r = 2, 3$  の場合の巨視的粘性係数

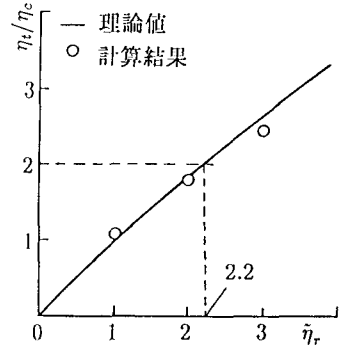


図-7  $\eta_r$  と  $\eta_t/\eta_c$  との関係

## 6. 実際の解析における $\gamma$ と $\psi$ の評価方法の検討

5. においては、3. と 4. に展開した方法の妥当性を検証する目的で、実際の解析で必要となる巨視的密度  $\gamma$  と接触点密度関数  $\psi$  とを要素集合体全体の状態に基づいて求めた。しかし、実際の解析では、集合体全体の応力・変形場は一樣でなく、 $\gamma$  と  $\psi$  も場所により異なる値を示す。そのため、各要素毎に  $\gamma$  と  $\psi$  を評価する必要がある。

### (1) 巨視的密度 $\gamma$ の評価方法

互いに接触し合っている要素間の相対速度  $\dot{r} = v$  は巨視的ひずみを用いて次のように与えられる。

$$v = r(\dot{\epsilon}_{11} \cos^2 \theta + \dot{\epsilon}_{22} \sin^2 \theta + 2\dot{\epsilon}_{12} \sin \theta \cos \theta) \dots \dots \dots (32)$$

各接触点毎に  $v/r\psi$  を求め、その総和を要素単位でとると、平均的意味において次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \sum \frac{v}{r\psi} &\simeq \int_0^{2\pi} (\dot{\epsilon}_{11} \cos^2 \theta + \dot{\epsilon}_{22} \sin^2 \theta + 2\dot{\epsilon}_{12} \sin \theta \cos \theta) \frac{\psi}{\psi} d\theta \\ &= \pi(\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22}) \end{aligned} \dots \dots (33)$$

そこで、式 (33) に基づき各要素毎の巨視的密度  $\gamma$  を次のように評価する。

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n}{1 + \frac{1}{\pi} \sum \Delta r / r\psi} \dots \dots \dots (34)$$

ここで  $\gamma_n$  は第  $n$  ステップにおける巨視的密度であり、 $\Delta r$  は第  $n$  ステップから  $n+1$  ステップまでにおける接触要素の中心点間距離の増分である。

### (2) 接触点密度関数 $\psi$ の評価

接触点密度関数の評価方法の一つとして、例えば、集合体をいくつかの部分領域に分け、それに属する要素の接触状態より部分領域毎に  $\psi$  を求めることが考えられる。しかし、この方法を比較的大きな変形下で適用するためには、各変形過程で部分領域を適宜設定する必要がある、簡便な計算過程の構成が困難に思われる。また、部分領域の適切な大きさの選定にも曖昧さが残る。

そこで本研究では、以下に示すように各要素毎に  $\psi$  を評価する二つの手順について検討した。

まず、図-8 に示すように、着目している要素  $i$  を含め、それに接触している全要素に対して接触角  $\theta_k$  を求める。この値に基づき、以下のようにして  $\psi$  を評価する。

Case-1: 接触角を  $10^\circ$  毎に 36 等分し、各区間に存在する接触点の個数  $n_j$  ( $j = 1, \dots, 36$ ) を求める。 $n_j$  に基づき、次式より各区間毎に接触点密度関数を計算する。

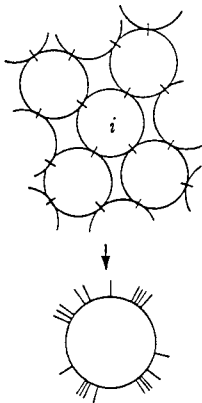


図-8 接触点密度関数の評価

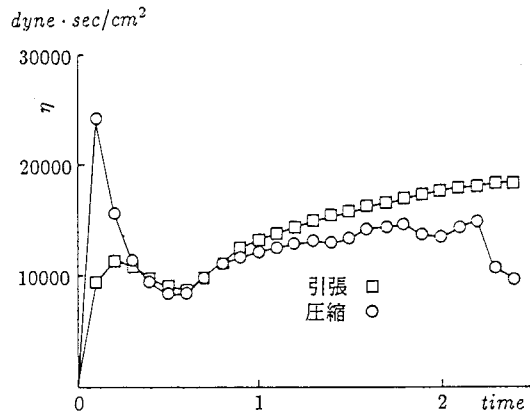


図-9  $\gamma, \psi$ を要素毎に評価した場合の巨視的粘性係数

表-1 巨視的密度の評価

| t   | 引張     |        |        | 圧縮     |        |        |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|     | 密度     | 式 (34) | 精度     | 密度     | 式 (34) | 精度     |
| 0.5 | 0.1956 | 0.1978 | 1.17%  | 0.2056 | 0.2060 | 0.16%  |
| 1.0 | 0.1875 | 0.1890 | 0.77%  | 0.2187 | 0.2168 | -0.85% |
| 1.5 | 0.1816 | 0.1817 | 0.07%  | 0.2307 | 0.2271 | -1.58% |
| 2.0 | 0.1765 | 0.1753 | -0.73% | 0.2424 | 0.2370 | -2.22% |
| 2.5 | 0.1729 | 0.1697 | -1.85% | 0.2558 | 0.2475 | -3.25% |

$$\psi_j = \frac{n_j}{(1+N)\Delta\theta} \quad ((j-1)\Delta\theta \leq \theta < j\Delta\theta, \Delta\theta = \frac{2\pi}{36}) \quad \dots\dots\dots (35)$$

ここで、 $N$ は要素  $i$  に接触している要素総数である。

Case-2: 図-8 のようにして求めた接触角  $\theta_k$  ( $k = 1, \dots, \sum n_j$ ) と、これから  $\Delta n$  個離れた接触点における接触角  $\theta_{k+\Delta n}$  に対しては次の関係を得る。

$$\frac{\Delta n}{1+N} \simeq \psi\left(\frac{\theta_k + \theta_{k+\Delta n}}{2}\right)(\theta_{k+\Delta n} - \theta_k) \quad \dots\dots\dots (36)$$

すると、 $\bar{\theta}_k := (\theta_k + \theta_{k+\Delta n})/2$  における  $\psi$  は次式より評価することができる。

$$\psi(\bar{\theta}_k) = \frac{\Delta n}{(1+N)\Delta\theta_k} \quad (\Delta\theta_k := \theta_{k+\Delta n} - \theta_k) \quad \dots\dots\dots (37)$$

さらに、式 (37) より得た  $\psi(\bar{\theta}_k)$  を区間線形関数で補間し、これを次の三角多項式で近似することにより  $\psi(\theta)$  を作成する。

$$\psi(\theta) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos 2\theta + a_2 \cos 4\theta + b_1 \sin 2\theta + b_2 \sin 4\theta \quad \dots\dots\dots (38)$$

Case-1 では、接触点を持たない区間も存在し得るが、逆に応力の作用する方向において生ずる接触点の局所的な集中を表現することが可能である。一方、Case-2 では、 $\psi$  を三角関数で定義しているため、Case-1 のように急激な変化を表現することはできないが、逆に小数の接触点から評価していることによる極端な  $\psi$  の変動を低く抑えることができる。なお、 $\Delta\theta$  のとり方により、 $\psi$  の評価は多少変動と思われるが、本問題

では要素集合体全体としての平均的評価がより重要であり、解析結果に及ぼす影響についてはさらに検討する必要がある。

### (3) 解析結果に基づく検討

Case-1 と Case-2 による  $\psi$  の評価の妥当性を実際の解析を通して検討した。その結果、ダッシュポットの粘性係数の設定に用いる式 (15) または (18) においては、Case-1 による方が良好な結果を与えることが確かめられた。これは、上述のように Case-1 では変形に伴う接触点分布の鋭敏な変化を適切に表現し得ることによるものと考えられる。一方、式 (34) による巨視的密度の評価においては、Case-2 によって求めた  $\psi$  を用いる方が良好な結果を得ることができた。

そこで、式 (15) の  $\psi$  に対して Case-1 を適用し、式 (34) の  $\psi$  に対しては Case-2 を適用する方法を採用した。この方法に基づいて求めた、一軸応力状態での巨視的密度と巨視的粘性係数をそれぞれ表-1 と図-9 に示す。なお、表-1 における式 (34) に基づく巨視的密度は、各要素毎に式 (34) を適用して得た値の平均値である。この表より、引張、圧縮の両変形過程に対し、3% 程度の範囲内の精度で巨視的密度が求められており、式 (34) による  $\gamma$  の評価が適切であることがわかる。また、図-9 より、引張に対して巨視的粘性係数が多少増加傾向にあり、 $\psi$  の評価方法にさらに検討の余地があるものの、引張と圧縮に対してほぼ等しい値を示しており、何ら補正を行わない従来の解法に比べ、変形に伴う  $\eta$  の変動が低く抑えられており、大幅に改善されている様子が認められる。

## 7. おわりに

積雪の変形解析を対象に、巨視的性質が変形に依存することのない個別要素解析手法について検討した。まず、粘性粒子集合体の運動方程式をランダムな格子上で定義された差分式と見なし、それにより与えられる連続体との関係を誘導した。その結果、粒子集合体は粒子半径  $a$  に対して二次のオーダーで連続体の運動方程式を近似しており、巨視的粘性係数は粒子間距離  $r$ 、接触点密度関数  $\psi$  および巨視的密度  $\gamma$  に依存し、そのため、変形の進行と共に変動することを示した。次に、各ダッシュポットの粘性係数を調整し、 $r, \psi, \gamma$  の影響を相殺することで、巨視的性質が変形に依存しない個別要素解析手法を構成した。理論的考察および数値実験を通して、式 (17), (18) のようにダッシュポットの粘性係数を設定することで、巨視的粘性係数が変形に依らず一定で、引張、圧縮、せん断の各応力状態における巨視的粘性係数の比が、積雪の場合とほぼ一致した集合体が構成可能であることが確かめられた。また、実際の解析において必要となる局所的な  $\psi$  と  $\gamma$  を各要素単位で評価する方法について検討した。実際の積雪における複雑な変形挙動の解析に個別要素法を適用するまでには、さらに多くの問題点を解決しなければならないが、本研究により個別要素法の積雪変形解析への適用性は大きく改善されたものとする。

## 参考文献

- 1) 阿部和久・宮野裕一: 個別要素法による粘性体の変形解析に関する一検討, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集第 15 巻, pp.403-408, 1991.
- 2) 阿部和久・宮野裕一: 積雪変形解析のための個別要素解析手法, 構造工学論文集, Vol.38A, pp.339-350, 1992.
- 3) 日本建設機械化協会編: 新防雪工学ハンドブック, 第 1 章, 森北出版.
- 4) 前野紀一・福田正巳 編: 雪氷の構造と物性, 古今書院.
- 5) 篠島健二: 雪の粘弾性的取扱, 鉄建報告, No.328, 1962.
- 6) Meguro, K. and Hakuno, M.: Fracture analysis of concrete structure by modified distinct element method, Proc. of JSCE, No.410, pp.113-124, 1989.
- 7) 阿部和久・青木 究: 粘性粒子集合体の巨視的性質について, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第 17 巻, pp.109-114, 1993.
- 8) 金谷健一: 粒状体の粒子モデルと仮想仕事の原理, 土質工学会論文報告集, Vol.20, No.3, pp.111-116, 1980.
- 9) Bažant, Z.P. and Gambarova, P.G.: Crack shear in concrete: Crack band microplane model., Proc. of ASCE, SE, Vol.110, pp.2015-2035, 1984.

(1993 年 9 月 16 日 受付)