

塑性解析を用いた粒状体の変形挙動解析

DEFORMATION BEHAVIOR ANALYSIS OF GRANULAR MATERIAL USING PLASTIC ANALYSIS

香月 智^{*}、石川信隆^{**}

By Satoshi KATSUKI and Nobutaka ISHIKAWA

This paper presents a new deformation behavior analysis method of granular material using plastic analysis. The plastic analysis formulation for skeleton structure of an arbitrarily arranged granular materials is derived by using both the linear programming technique and the automatic matrix assembling technique which includes the contact judgement of granules. The granular material is rearranged by the displacement rate of plastic analysis obtained above. The validity and applicability of the proposed method is confirmed by both fundamental numerical examples and a comparison with the results of DEM.

Key Words: granular material, plastic analysis, linear programming

1. 緒言

粒状体解析は、土や砂の挙動のみならず、礫材料またはロックフィルダムなどの比較的大きな粗粒材料の挙動および強度のメカニズムを知るために重要な解析である。近年、カンドルによって提案された個別要素法が粒状体解析に用いられることが多くなってきた^{1,2)}。個別要素法は、動的解析のアルゴリズムを用いているため、粒状体骨格構造が形成する剛性マトリックスの特異性の影響を受けることなく、粒状体の配列の変化に伴って生じる不安定な粒状体骨格構造においても問題なく解析できる。このため、サンドクッションに対する落石の衝突問題³⁾や、ロックフィルダムの地震時応答解析⁴⁾さらに土石流の流下現象⁵⁾などの動的な解析の分野のみならず、礫材のせん断挙動の解析⁶⁾などの準静的な問題まで広い範囲の現象に対して適用されている。しかし、構成則の定数(①要素間接点での法線方向および接線方向の弾性バネ係数、②接線方向バネの降伏条件を決定する摩擦角および粘着項)、動的解析に必要な粘性項(ダンピング)のための定数等の決定法は未だ不明確な部分が多い⁷⁾。また、動的な数値解析を安定させるために、バネ定数に応じた時間増分を用いるために事実上計算可能な要素定数の選び方に限界がある等の問題点もある。一方、比較的遅い現象に対して解析を行う場合には、不必要な計算労力の負担が増大する。岸野⁸⁾は、これらの問題点を解決させるため、粒状体の解析手法として準静的なシミュレーション手法を提案した。

著者らは、コンクリート円筒要素の2次元単純せん断実験を行い、個別要素法を用いてこれをシミュレー

^{*} 工博 防衛大学校講師 土木工学科 (〒239 神奈川県横須賀市走水1-10-20)

^{**} 工博 防衛大学校教授 土木工学科 (〒239 神奈川県横須賀市走水1-10-20)

ジョン⁶⁾するとともに、そのせん断抵抗力～変位関係がRowe理論を応用した解析によって表現できることを示した⁹⁾。Rowe理論¹⁰⁾は、要素の接触状態の幾何学的な関係を基に塑性崩壊メカニズムを求め、塑性崩壊の力の釣合と変形挙動の関係を表わすものである。すなわち、塑性崩壊メカニズムを利用して粒状体の変形挙動を表わせることが示された。しかし、Rowe理論は数個の静定構造モデルの崩壊メカニズムに立脚しているため、一般的な不静定な骨格構造をもつ粒状体の解析を行うことはできない。

そこで本研究は、塑性解析手法^{11,12)}を応用して、粒状体の骨格構造の塑性崩壊メカニズムから得られる粒状体の変形挙動を解析しようとしたものである。すなわち、まず塑性解析の基本式および粒状体の解析モデルの導入について詳述したのち、比較的簡易で基本的な問題に対して提案する解析法の妥当性と応用性について検討するものである。

2. 基本式および解析手順

2. 1 塑性解析の基本式^{11,12)}

提案する解析モデルでは理想化したバネモデルを用いるため、降伏条件式は線形関数となる。よって、線形計画法を応用した塑性解析が適用可能である。線形計画法を用いた静的定理（下界定理）による塑性解析の基本式は次のように表わされる。

$$\text{Known} : \mathbb{C}^T, \mathbf{F}, \mathbf{N}^T, \mathbf{R} \quad (1)$$

$$\text{Unknown} : \mathbf{Q}, \alpha \quad (2)$$

$$\text{Objective} : \alpha \rightarrow \max \quad (3)$$

$$\text{Subject to: } \mathbb{C}^T \mathbf{Q} - \alpha \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (4)$$

$$\mathbf{N}^T \mathbf{Q} \leq \mathbf{R} \quad (5)$$

$$\alpha \geq 0 \quad (6)$$

ここで、 $\mathbb{C}^T$ ：釣合マトリックス、 $\mathbf{F}$ ：節点外力ベクトル、 $\mathbf{N}$ ：降伏関数への外向き単位法線マトリックス、 $\mathbf{R}$ ：塑性容量ベクトル、 $\mathbf{Q}$ ：バネ要素の内力ベクトル、 α ：荷重係数ベクトルである。

よって、式(1)～(6)は、力の釣合条件（式(4)）と降伏条件（式(5)）を満足したうえで、最大荷重係数を与える状態を塑性崩壊状態とする数理計画問題となる。この線形計画問題を表の数理計画問題とするとき、裏の双対問題は、運動的定理（上界定理）として次のように表わされる。

$$\text{Known} : \mathbb{C}, \mathbf{F}, \mathbf{N}, \mathbf{R} \quad (7)$$

$$\text{Unknown} : \overline{\mathbf{U}}, \overline{\lambda} \quad (8)$$

$$\text{Objective} : \mathbf{R}^T \overline{\lambda} \rightarrow \min \quad (9)$$

$$\text{Subject to: } \mathbb{C} \overline{\mathbf{U}} - \mathbf{N} \overline{\lambda} = \mathbf{0} \quad (10)$$

$$\mathbf{F}^T \overline{\mathbf{U}} = 1, 0 \quad (11)$$

$$\overline{\lambda} \geq 0 \quad (12)$$

ここで、 $\overline{\lambda}$ ：塑性乗数速度（率）ベクトル、 $\overline{\mathbf{U}}$ ：節点変位速度（率）ベクトルである。

よって、式(7)～(12)は、幾何学的な変形適合条件（式(10)）を満足する全ての崩壊メカニズムのなかで、一定の外力仕事率（式(11)）に対して、内力仕事率が最小となる（式(9)）メカニズムを探す数理計画問題となっている。塑性解析の解の一意性から、静的定理の解と運動的定理の解は常に一致する。また、線形計画法の双対問題の特性から、静的定理で解いた場合の双対変数（裏の変数）は、運動的定理の表の未知数（ $\overline{\mathbf{U}}$ 、 $\overline{\lambda}$ ）に対応している。このため、式(1)～(6)による解析によって、式(7)～(12)の解で得られるべき $\overline{\mathbf{U}}$ と $\overline{\lambda}$ を得ることができる。

ところで、式(10)を見ると節点変位速度ベクトル $\overline{\mathbf{U}}$ は、塑性崩壊状態での降伏要素の内部で生じる塑性内変形速度ベクトル

$$\overline{\mathbf{Q}}^p = \mathbf{N} \overline{\lambda} \quad (13)$$

に対して、構造物の持つ幾何学的な変形適合条件によって関係づけられている。すなわち、変位に伴う幾何学的適合条件の非線形性を無視すると、構造崩壊状態における一次微係数の変位速度（ただし、ここでの速度は時間に対応するものではなく、外力仕事率が1.0となる時のベクトル要素間の比率をあらわす）となっている。提案する手法は、この点に着目し、節点変位速度ベクトルに従って要素の再配列を行い、再配列された構造の釣合マトリックスを逐次に再構成することによって粒状体の変形に伴う幾何学的な非線形を考慮した解析を行うものである。

2. 2 円形要素モデル

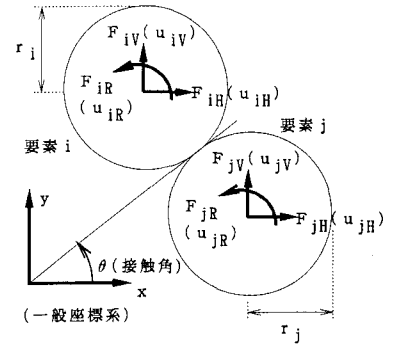
図-1(a)に示すように、円形の要素の中心点に3つの変位自由度を設ける。すなわち、一つの要素*i*には、外力として $\mathbf{F}_i^T = [F_{iH}, F_{iV}, F_{iR}]$ 、変位として $\mathbf{u}_i^T = [u_{iH}, u_{iV}, u_{iR}]$ のベクトル要素が与えられる。ただし、ここで記号H, V, Rはそれぞれ、水平、垂直、回転の方向に対応している。また、要素の接触点には、図-1(b)に示すように法線方向および接線方向にバネを導入する。すなわち、一つの接触点*j*には、内力（バネの圧縮力）として $\mathbf{Q}^T = [Q_n, Q_s]$ 、内変形（バネの縮小量）として $\mathbf{q}^T = [q_n, q_s]$ のベクトル要素が設定される。さらに、回転方向の変形適合条件を考慮して、各要素の中心点に仮想の回転バネ（内力 Q_m 、内変形 q_m ）を仮定する。

2. 3 力の釣合条件式

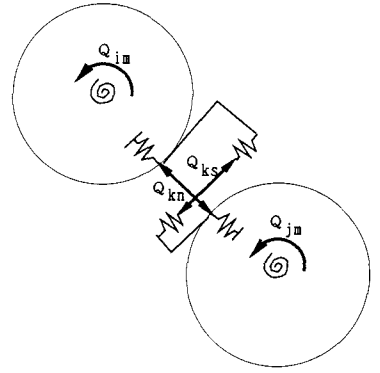
図-1に示す2個要素における力の釣合条件式（式(4)）は、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & -\cos\theta & 0 & 0 \\ r_i & 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ r_j & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{ks} \\ Q_{kn} \\ Q_{im} \\ Q_{jm} \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} F_{iH} \\ F_{iV} \\ F_{iR} \\ F_{jH} \\ F_{jV} \\ F_{jR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

上式の係数（釣合）マトリックスは、接触する二つの要素の番号（*i*, *j*）と接触角 θ の3種類のパラメータを与えることにより、要素数および接触点数の変化に応じて規則的かつ比較的容易に生成することが可能である。



(a) 要素の外力 $\mathbf{F}$ 及び変位 $\mathbf{u}$



(b) 接触バネ及び回転バネの力 $\mathbf{Q}$

図-1 円形要素モデル

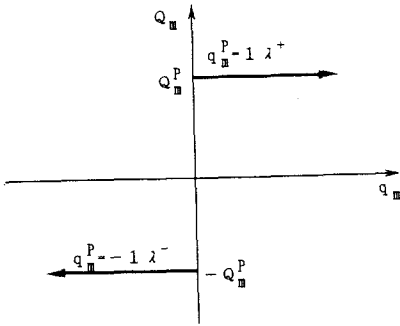


図-2 回転バネの剛塑性挙動

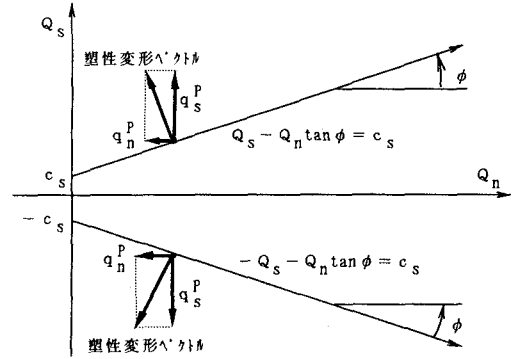


図-3 クーロイ滑り降伏関数と関連流れ塑性変形

2. 4 降伏条件式

要素の回転バネの剛塑性挙動を、図-2に示す。この場合の降伏条件式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{im} \\ Q_{jm} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} Q_m^P \\ Q_m^P \\ Q_m^P \\ Q_m^P \end{bmatrix} \quad (15)$$

ここで、 Q_m^P ：回転バネの降伏力。回転バネは前述のように、回転方向の変位を幾何学的に適合させるために仮想に設けたものであるので、 Q_m^P は、要素の回転方向での力のアンバランスに対して鋭敏に降伏する必要がある。このため、 Q_m^P の値は、数値計算上の問題がない程度に微小な値を用いる。

滑りバネの限界値 Q_s^P は、法線方向バネ力 Q_n を補助変数として一般的に次のように表わされる。

$$|Q_s^P| \leq c_s + Q_n \tan \phi \quad (16)$$

ここで、 c_s ：粘着項、 ϕ ：摩擦角。

式(16)の右辺にある法線方向のバネ力 Q_n は、当初の解析では未知数である。よって、これを降伏条件式として展開すると、次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} 1 & -\tan \phi \\ -1 & -\tan \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{ks} \\ Q_{kn} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} c_s \\ c_s \end{bmatrix} \quad (17)$$

ところで、式(1)～(6)と式(7)～(12)の関係で明らか

に、線形計画法による塑性解析では、降伏条件式に対する関連流れ則に従う変形適合条件を暗黙のうちに前提としている。そこで、

式(17)に対する関連流れ則による塑性変形を見ると、図-3で表わされるように、滑り方向の塑性変形

(q_s^P)に組み合わされて常に法線方向の塑性変形(q_n^P)が生じることになる。この塑性変形関係を模式

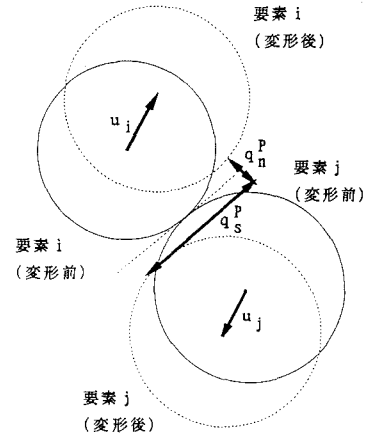


図-4 関連流れ則に基づく塑性変形挙動

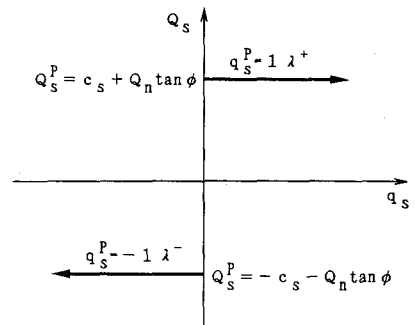


図-5 修正された滑りバネ剛塑性挙動

的にあらわすと、図-4に示すように滑りと変位にともなって要素は互いに間隙を広めるような動きをすることになり、ダイレイタンスーを伴う挙動となる。本研究では、滑りによる法線方向への影響をなくすために、第2段階目の塑性解析を次の修正された降伏条件式を用いて解析した。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{ks} \\ Q_{kn} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} c_s + \overline{Q_{kn}} \tan \phi \\ c_s + \overline{Q_{kn}} \tan \phi \end{bmatrix} \quad (18)$$

ここで、 $\overline{Q_{kn}}$: 式(17)を用いた塑性解析で得られた法線方向バネ力。

式(18)の降伏条件式を用いた場合の滑りバネの剛塑性関係は、図-5に示すように法線方向バネの挙動に無関係となる。

2. 3 要素の再配列 (移動)

第2段階目の塑性解析で得られた変位速度ベクトルを用いて、次段階の各要素の位置座標 D は次式によって与えられる。

$$D = D_0 + \delta \overline{u} \quad (19)$$

ここで、 D_0 : 現段階の位置座標ベクトル、 δ : 変位増分制御係数。

変位増分制御係数 δ は、いずれの要素の変位量もその要素の半径に対して設定される比率 ε を越えないように設定した。すなわち、

$$\max |\delta u_j| / r_j = \varepsilon \quad (20)$$

2. 4 解析手順

以上の基本式を用いた解析手順を、図-6に示す。

- ① 解析の基本定数 (要素の半径、クーロン滑りの定数等) および要素の初期配列を与える。
- ② 要素間の接触判定を行い、接触している要素間の釣合マトリックスを逐次構成する。同時に、降伏条件式のための単位法線マトリックスおよび塑性容量ベクトルを作成する。なお、この時の接触判定の手法は個別要素法のものと同じである。
- ③ 要素と境界線の間の接触判定を行い、釣合マトリックス、単位法線マトリックスおよび塑性容量ベクトルを作成する。
- ④ 線形計画法を用いた塑性解析のための基本マトリックスを作成する。
- ⑤ 線形計画法による塑性解析を行う。
- ⑥ 線形計画法による解が得られない場合には、崩壊モードが存在しないものとして解析を終了する。
- ⑦ 解が得られた場合には、修正された降伏条件式を用いて、再度塑性解析を行う。
- ⑧ 得られた解に基づき、増分変位ベクトルを算定する。
- ⑨ 現在の各要素の位置座標に、増分変位ベクトルを付加し、要素の配列を変更する。
- ⑩ ステップ②に戻り、解析を繰り返す。

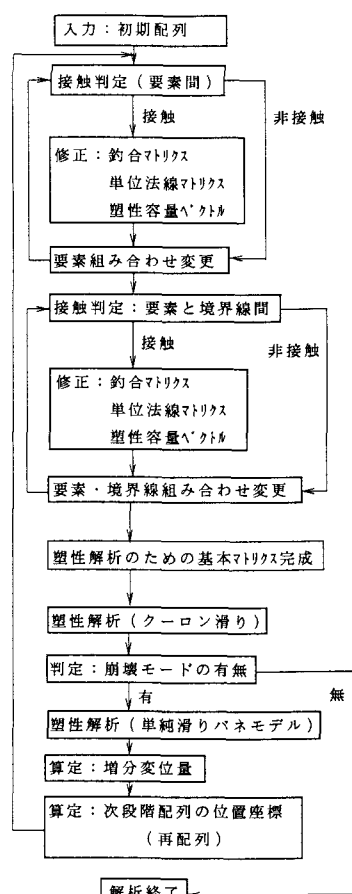


図-6 解析手順

3. 数値計算例

3. 1 斜面上の1個要素

連続した変形挙動の解析を行う前に、塑性解析の基本的性質を確認するために、図-7に示す傾斜度 30° の斜面上の円形要素に、水平、垂直および斜面に直交する荷重を作用させた場合の塑性解析を行った。要素半径は $r=1.0$ 、荷重 $F=1.0$ 、斜面と要素の滑り摩擦角 $\phi=10^\circ$ 、粘着項 $c_s=1.0 \times 10^{-3}$ 、仮想回転バネの降伏力 $Q_n^p=1.0 \times 10^{-3}$ である。これは、比較的滑らかな表面を持つ(金属)材料に相当する。

まず、水平荷重を作用させた場合には、塑性崩壊荷重係数 $\alpha=1.15 \times 10^{-3}$ となり、その際の斜面と要素の間に働く法線方向バネ力 $Q_n=0.577 \times 10^{-3}$ 、接線バネ力 $Q_s=0.577 \times 10^{-3}$ となる。この崩壊モードは、要素の仮想回転バネの降伏によるものであり、クーロン滑りバネの降伏によるものではない。この崩壊荷重に対応する塑性崩壊の変位速度ベクトルは、斜面の方向と平行して移動する速度 $u_P=1.15$ 、および回転変位速度 $u_R=1.15$ となっている。要素の回転 u_R による要素外周上の並進変位 u_s は、次式となる。

$$u_s = r u_R \quad (21)$$

この量 u_s が得られた u_P と一致することは、要素の回転による斜面との間の滑りが生じない幾何学的な変形適合条件を満足し、また、この塑性崩壊荷重がクーロン滑りの降伏条件をアクティブとしないことと対応している。

垂直の荷重を作用させた場合にも、仮想の回転バネの降伏条件によって崩壊荷重が決定される。この場合の変位速度ベクトルも、斜面平行の並進方向ベクトルと回転変位速度ベクトルが節点変位の滑りが生じない条件を満足している。なお、この際の変位速度の量が、先の1.15から2.00に大きくなっているのは、式(11)の外力仕事 1.0 となる条件を満足するためである。

斜面に直交する外力を作用させた場合には、無限に大きな外力に対しても、要素は滑りも回転も生じない。よって、塑性解析の結果は「崩壊モードなし」となる。これは、連続した塑性変形解析における解析終了条件に相当する。

3. 2 平面上の3個要素

接触点の変化と粒状体の骨格構造の変化が存在する場合、本法の適用性を基本的に確認するために、図-8に示す平面上に孤立した2

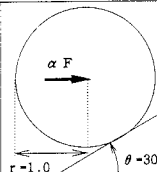
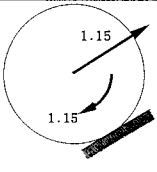
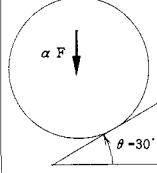
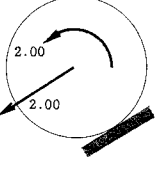
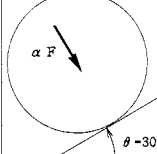
	解析条件	解析結果	
	$(F=1.0, \phi=10^\circ)$ $(Q_n^p=c_s=1.0 \times 10^{-3})$	接触力(崩壊荷重係数)	変位速度ベクトル
水平荷重		$\alpha=1.15 \times 10^{-3}$ $Q_n=0.577 \times 10^{-3}$ $Q_s=1.0 \times 10^{-3}$	
垂直荷重		$\alpha=2.0 \times 10^{-3}$ $Q_n=1.73 \times 10^{-3}$ $Q_s=1.0 \times 10^{-3}$	
直交荷重		崩壊モード(荷重)なし	

図-7 斜面上の1個要素

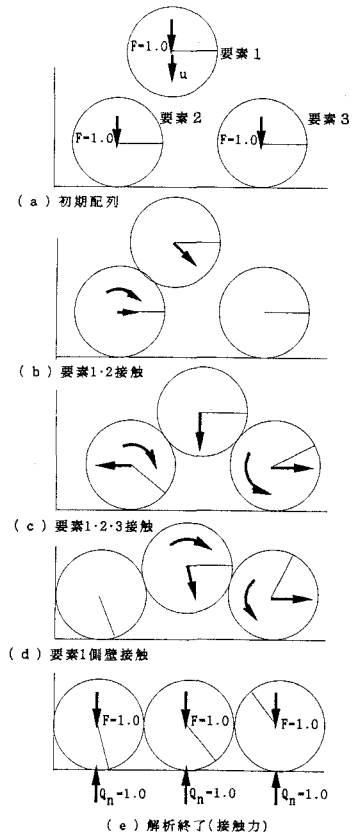


図-8 平面上の3個要素

個要素とその上方に分離して1個の要素が存在する問題を解いた。初期状態は、図-8(a)に示すものであり、要素の中心に垂直方向に1.0の荷重が作用し続けている。なお、増分変位の半径比率 $\varepsilon=5\%$ とした。初期配列のように、要素1が孤立して存在する場合の塑性解析の解は、要素1のみが垂直下向きの変位速度を持つように得られる。これに従って、要素1が次第に落下しながら要素2に近づき、接触状態になる(図-8(b))。よって、要素1と要素2は接続した変位挙動を開始する。この場合、要素1は回転せず接触面に平行した並進移動をする。要素2は要素1の並進に対応して回転し、かつ回転に調和して右方向に並進する。要素1が要素3にも接触すると、3個の要素は三角形の骨格構造を形成し、その挙動は、要素1が要素2および3を対称的に押し広げながら落下を続けるものとなる。すなわち、要素1の落下に伴い要素2および3は、要素1との接触点での摩擦力により回転する。このとき、要素2および3の回転と並進方向は対応しておらず、下面の境界線との接触点においては、回転によるものとは反対の並進運動が生じて滑り摩擦の降伏条件がアクティブとなる。要素2が垂直の壁面に接触すると(図-8(d))要素2の変位速度がなくなり、要素1と3の変位により要素1の落下は続けられる。最終的に、3個の要素が下面の境界線上に並んだ状態(図-8(e))で、塑性崩壊モードがなくなり解析を終了する。この状態では、塑性崩壊モードが存在しないため塑性解析の解は得られないが、式(1)~(6)の基本式に加えて、荷重係数の上限値の制約

$$\alpha \leq 1.0 \quad (22)$$

を加えることにより、この配列における $\alpha=1.0$ に対応する接触バネの力を求めた。結果を図-8(e)に示す。極めて単純な解であるが、下面の境界線からの法線方向接触バネが、要素の外力と釣り合っていることがわかる。この計算過程は、粒状体の詰め込み過程の解析に応用できるものと考えられる。

3.3 斜面上の2段7個要素

図-9(a)に示す斜面上に2段に配列された要素に垂直な荷重が作用する場合の解析を行った。この時の、塑性変位速度ベクトルは、図-9(b), (c)に示すように互いに接続された回転変形によるものである。すなわち、第1段目の4個の要素が反時計周りに、第2段目の要素が時計周りに回転し、斜面に平行する並進方向の速度ベクトルと調和して、要素間の接触点および要素と斜面境界線間の接触点のいずれにも滑りが生じない。解析は、図-9(d)に示すように180ステップ後に先端の要素が側壁に接触して、崩壊モードがない骨格構造を得て終了する。

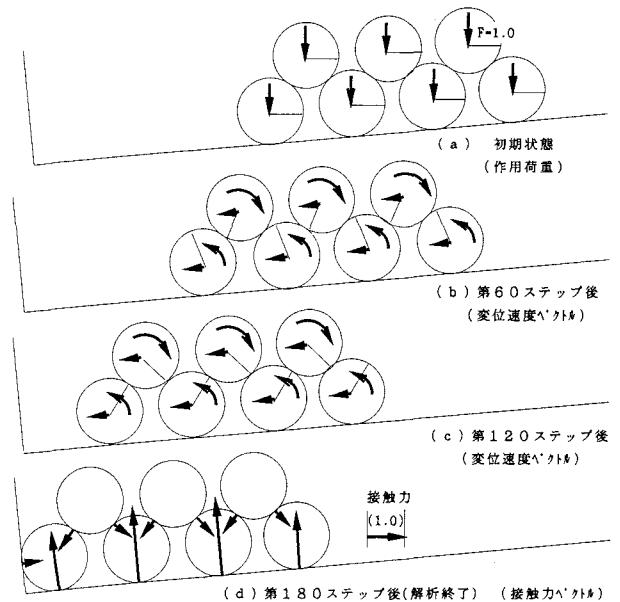


図-9 斜面上の2段7個要素

3.4 斜面上の4段50個要素の個別要素法との比較

先の例題を拡張して、図-10に示す斜面上の4段50個要素の解析を行い、個別要素法との比較を行った。比較を容易にするために、個別要素法の解析条件のうち、斜面の角度、要素形状・配列、作用荷重、摩擦角および粘着項については、提案する解析と同じものを用い、バネ係数および減衰係数については、提案する手法では使用しないので、著者らの個別要素法による研究⁶⁾を参考に、 $k_n=10\text{kgf/cm}$ 、 $c_n=0.25\text{kgfsec/cm}$ 、

$k_s=0.25k_n$ 、 $c_s=0.5c_n$ を用いた。図-10に示す提案する解析法の解は、先の7個要素の場合と同様に各段ごとの回転が調和連接されたものとなり、初期の配列が崩れることなく斜面上を移動し、側壁によって止められて解析を終了する。図-11に、同様の条件で行った個別要素法の解析結果を示す。個別要素法では、50個要素の配列が徐々に先端から崩れ横広く広がりながら斜面を下り降りており、提案する手法が配列を保つこととは異なっている。これは、個別要素法は個々の要素ごとに動的な解析を進めるため全体の骨格構造の持つ釣合条件が解析に及ぼす影響が弱まるためと思われる。この解特性の違いは、適用する問題の特性に応じて検討されるべきものであり、実験等との検証が必要と思われる。なお、本研究では塑性解析に下界定理(式(1)~(6))を用いたために要素数の増加に伴って非常に大きなマトリックス解析が必要となり、計算効率の低下が顕著になる。このため、個別要素法に比して10倍以上の計算時間を要した。よって、塑性解析の数値計算上の工夫が必要と思われる。

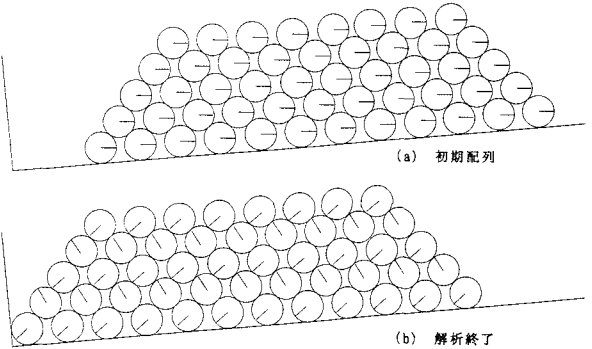


図-10 斜面上の50個要素(提案手法の解)

4. 結 言

本研究で得られた成果を要約すると以下になる。

- ① 塑性解析による粒状体の変形挙動解析手法を提案した。
- ② 提案する解析手法は、静的な塑性解析に立脚するため骨格構造の持つ塑性崩壊メカニズムをその配列の変化に応じて忠実に解析する。
- ③ 提案する手法に必要な物性値は、降伏条件式に関するもの(降伏力、粘着項、摩擦角)のみであり、個別要素法に用いられる弾性的な挙動に関するもの(バネ定数)および動的な挙動に関するもの(減衰係数等)を必要としない。よって、本法は入力データに関しては個別要素法よりも数が少なくかつ比較的入手しやすい明瞭なデータを用いることができる。
- ④ 基本的な問題において、提案する手法が粒状体の骨格構造に応じた適切な塑性変形挙動を得ることが確認された。
- ⑤ 提案する手法と個別要素法の解析結果は一致しない。このため、適用範囲等について検討が必要である。
- ⑥ 提案する手法は、線形計画法による塑性解析手法を直接用いたため、要素数の増加にともない基本マトリックスの組立と、塑性解析の計算過程の効率が低下する。よって、この点に関する改良が必要である。

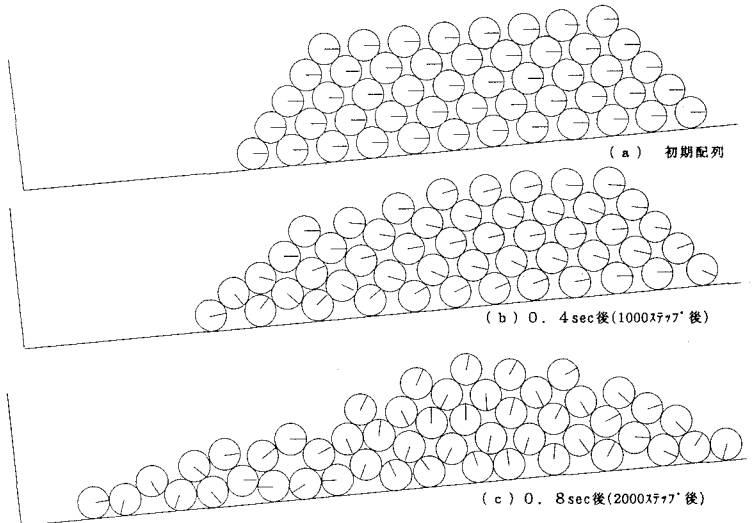


図-11 斜面上の50個要素(個別要素法の解)

謝 辞：数値計算の一部は、当時学生であった佐々木秀一君の援助を受けたことを付記し、ここに謝意を表する。

参考文献

- 1) Cundall, P. A.: A Computer Model for Simulating Progressive Large Scale Movements in Blocky Rock System, Proc. of Symp. ISRM, Nancy, France, Vol. 2, pp. 129~136, 1971.
- 2) 木山英郎、藤村 尚：カンドルの離散剛要素法を用いた岩質粒状体の重力流動の解析、土木学会論文報告集、Vol. 333, pp. 137~146, 1983.
- 3) 吉田博、栢谷浩、今井和昭：個別要素法による敷砂上への落石の衝撃特性に関する解析、土木学会論文報告集、第392号/I-9, pp. 297~306, 1988年4月.
- 4) 大町達夫、荒井靖博：円形粒子の規則的配列をもつロックフィルダム模型の動的破壊機構、土木学会論文集、第388号/Ⅲ-8, pp. 197~206, 1987年12月.
- 5) Lusio Casaverde M., Iwashita, K., Tarumi, Y. and Hakuno, M.: Distinct Element Analysis for Rock Avalanche, JSCE, No. 404/I-11, pp. 153~162, 1989. 4.
- 6) 香月智、石川信隆、大平至徳、鈴木宏：円筒要素モデルを用いた中詰材のせん断抵抗に関する基礎的研究、土木学会論文集、第410号/I-12, pp. 359~368, 1989年10月.
- 7) 大町達夫、荒井靖博：個別要素法で用いる要素定数の決め方について、構造工学論文集, Vol. 21A, pp. 715~723, 1986. 3.
- 8) 岸野佑次：新しいシミュレーション法を用いた粒状体の準静的挙動の解析、土木学会論文集、Vol. 406/Ⅲ-11, pp. 97~106, 1989年6月.
- 9) 香月智、石川信隆、大平至徳、鈴木宏：Rowe理論を応用した中詰材のせん断抵抗解析に関する一考察、構造工学論文集、Vol. 36A, pp. 1337~1346, 1990年3月.
- 10) 最上武雄編著：土質力学、技報堂、pp. 610~618、昭和52年1月.
- 11) 石川信隆、大野友則：入門・塑性解析と設計法、森北出版、昭和63年5月.
- 12) 石川信隆、大野友則、岡元北海：立体骨組構造物の最適塑性設計に関する一考察、土木学会論文報告集、第279号, pp. 45~59, 1978年11月.

(1993年9月16日受付)