

平面骨組の弾塑性分岐挙動の解析法と初期曲げを受ける剛結門型骨組の座屈特性

A Plastic Bifurcation Analysis of Rigid Frames under Primary Bending Moments

後藤 芳顯*、宮下 敏**、松浦 聖*

By Yoshiaki GOTO, Satoshi MIYASHITA and Sei MATSUURA

Authors recently presented a versatile numerical method for the analysis of plastic bifurcation. Different from the customary method based on perturbation technique, this method only utilizes the structural tangent stiffness matrix in order to be easily implemented in the conventional FEM-based plastic analysis. Herein, we demonstrate an application of the proposed method to the bifurcation analysis of plane frames. Since the reliability of the bifurcation analysis is strongly influenced by the accuracy of structural analysis, we discussed how to improve the accuracy and efficiency of elastic-plastic finite displacement analysis of frames. To examine the validity of the proposed method, we analyzed the plastic bifurcation of a simply supported column and compared the results with the perturbation solution obtained by Cicala. As numerical examples, we further investigated the elastic-plastic buckling phenomena of portal frames under primary bending moments.

Key Words: plastic bifurcation, plane frame, stability, numerical analysis

1. まえがき

平面骨組の弾塑性有限変位解析の手法は周知のように、多数報告されている。特に、屈服現象に対応する極限点挙動の解析についてはすでに汎用プログラムとしての実用化がなされ、構造物の耐荷力評価においても広く利用されている。これに比べ、本質的な特異点挙動である弾塑性分岐挙動の解析についてはShanley¹⁾に端を発し、Hill²⁾, Sewell³⁾, Hutchinson⁴⁾らにより一般理論が提示されているが、その解析手法については単純な構造の、しかも座屈前の変形が一樣である場合を対象とした摂動法によるものが見受けられる程度で、剛性法に基づく汎用的な弾塑性分岐解析法は必ずしも十分に明らかにされなかった。最近、著者らは多自由度離散系の接線剛性方程式を用いる範囲で弾塑性分岐挙動を一般的に解析する手法の基本概念を提示し^{5) 6)}、一力部材からなるトラス構造の解析にも適用した⁶⁾。トラス構造の場合、部材の局部座屈を無視すれば、部材断面内および軸方向の変形が一樣であるので弾塑性解析は容易で分岐解析も実行しやすい。

一方、三力部材からなる平面骨組の弾塑性解析の場合、断面内ならびに軸方向の変形が一樣でないで、塑性域の広がりも一樣でなく、弾塑性分岐解析はトラス構造に比べ複雑になる。通常、このような一樣でない塑性域の広がりを考慮するために、平面骨組解析では骨組部材断面をメッシュに、また部材を長さ方向にセグメントに細分割し、塑性領域の広がりを考慮する塑性領域理論(Plastic Zone Theory)によるものが多く用いられる。この理論によると、残留応力も考慮でき、メッシュならびにセグメント分割を小さくしてい

* 工博 名古屋工業大学 教授 社会開発工学科 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)

** 工修 岐阜工業高等専門学校 助手 環境都市工学科 (〒501-04 岐阜県本巣郡真正町)

くと、精度の高い弾塑性解析も可能となる。しかしながら、これらの分割数を増加させると、荷重履歴の記憶容量ならびに要素剛性の評価手続等が増大し、通常の耐荷力解析のような単なる極限点挙動の解析においても、一力部材からなるトラス構造等に比べ非常に多くの計算量が必要となる。さらに、弾塑性分岐解析においては、分岐点でのHillの分岐の条件を満足する分岐経路探索の手続きが追加されるため、繰り返しの過程を含むより一層多くの計算量が要求される。従って、従来の骨組の弾塑性分岐解析では、断面の構成関係を簡易化するため、Shanleyモデル¹⁾（剛体ばねモデル）や上下フランジのみ考慮しウェブを無視したモデル等の簡易モデル⁷⁾が多く用いられており、塑性領域理論を用いた解析はほとんど見られない。

本論文では、まず塑性領域理論を用い、しかも幾何学的非線形性を厳密に考慮して平面骨組の弾塑性分岐解析をなるべく効率的に行うための汎用的な手法を提示する。幾何学的非線形解析については、塑性分岐において、弾性の場合に比べより大きな変形挙動を伴うことを考慮し、要素分割長無限小で有限ひずみ・有限変位の解に収束する剛体変位除去の手法⁸⁾を用いる。

次に提示した骨組の弾塑性分岐挙動の解析法の精度と妥当性を確認するために、塑性域の進展を考慮したCicalaによる柱の弾塑性分岐の摂動解⁷⁾との比較を行う。さらに数値計算例として、座屈前の変形が一樣とならないより複雑な場合である初期曲げを受ける剛結門型骨組の弾塑性座屈挙動を解析する。初期曲げによる座屈前の変形を考慮した弾性骨組の座屈解析としては、古くChawalla⁹⁾により行われ、その後、Mansur¹⁰⁾、Lu¹¹⁾、林¹²⁾らによっても扱われている。近年、著者らも曲げによる軸方向変位(Bowing)を考慮したより正確なはり・柱理論を用い、この問題を解析した^{13) 14)}。その結果、門型骨組では構造パラメータの値により座屈前の変形が大きくなり、水平移動分岐座屈から屈服へ座屈様式が変化し、また座屈が生じない領域もあること等、新しい知見を得た。しかしながら、実際の鋼骨組を対象とする場合、材料の弾塑性挙動も考慮する必要がある、上記の弾性座屈解析の結果をそのまま適用することはできない。したがって、ここでは、鋼材の弾塑性特性を考慮した解析を行うことで、より現実に近い初期曲げを受ける鋼製門型骨組の座屈特性を明らかにする。

2. 断面構成則

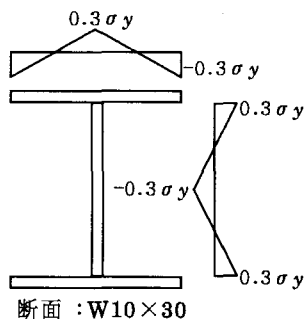
ここでは、塑性領域の部材断面内および要素軸方向での広がり性を考慮するため、いわゆる塑性領域理論を用いる。数値計算において塑性領域理論を用いる場合、通常部材断面をメッシュに分割後、各メッシュ中心点での応力・ひずみ関係で各メッシュ全体の構成則を代表させている。各メッシュの実際の挙動としては、連続的に変化して分布する残留応力が存在したり、作用応力に勾配がある場合、たとえ材料の構成則の接線剛性が不連続（例えば、Bi-linearや Tri-linear型の構成則）でも、メッシュ全体の接線剛性は連続的に変化する。しかしながら、上述したメッシュ中心の応力・ひずみ関係でメッシュ全体の構成関係を代表させる従来の計算方法によると、材料の構成則の接線剛性が不連続なものでは、メッシュの接線剛性は必ず不連続になってしまう。この様な不連続性は構造系全体の接線剛性行列の不連続性をもたらし、接線剛性行列の連続性を前提とした分岐解析法や、Newton-Raphson法に基づく収束計算等に不都合を生ずる場合がある。ここでは、この様な問題を避けるため、各メッシュに対して残留応力を含めた平均的な構成関係を用いる。すなわち、材料の一軸応力・ひずみ関係を

$$\Delta \sigma = E_t \Delta \epsilon \quad (1)$$

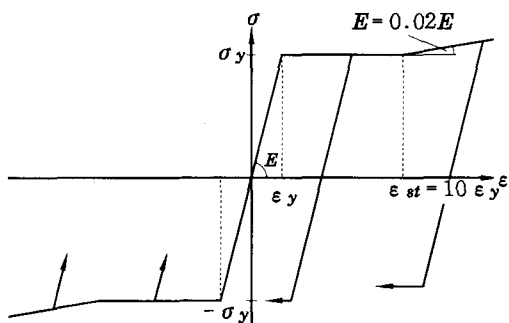
とした場合、メッシュの平均応力・ひずみ関係としては以下のものを用いる。

$$\Delta \bar{\sigma} = \bar{E}_t \Delta \bar{\epsilon} \quad (2)$$

$$\bar{E}_t = \int_{\Delta A_i} E_t dA / \Delta A_i \quad (3)$$



(a) 断面と残留応力分布



(b) 材料の一軸応力ひずみ関係 (ECCS)

図-1 部材断面と材料構成則

ここに、 ΔA_i はメッシュ i の面積を表す。なお式 (3) の積分は各メッシュのひずみ増分が一樣であると考えることにより線形変化を仮定する通常の残留応力分布の場合には解析的に積分可能となる。

このような各メッシュに対して平均的な構成関係を用いることで、残留応力分布が連続で勾配を持つ場合には接線剛性が不連続になることを防ぐことができる上、従来の方法に比べ少ないメッシュ分割で部材断面の構成則を精度よく表すこともできる。

ここでは、この事実を示すために、ある部材断面に対して、従来のメッシュ中心点で構成関係を代表させる方法と、今回提示したメッシュの平均的な構成関係を用いる方法 (本手法) との比較を示す。具体的な部材断面としては図-1 に示す H 型で、これに ECCS¹⁶⁾ で提示されている残留応力と Tri-linear ($E=2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$, $\sigma_y=2400 \text{ kgf/cm}^2$) の材料構成則を与える。結果として、軸力ゼロの場合と、降伏軸力 P_y の 40% を与えた場合について、2 種類の方法で計算した曲げモーメント M - 曲率 ϕ 関係をそれぞれ降伏モーメント M_y 、降伏曲率 ϕ_y で無次元化することで図-2 に示している。なお、メッシュ分割の方法としては

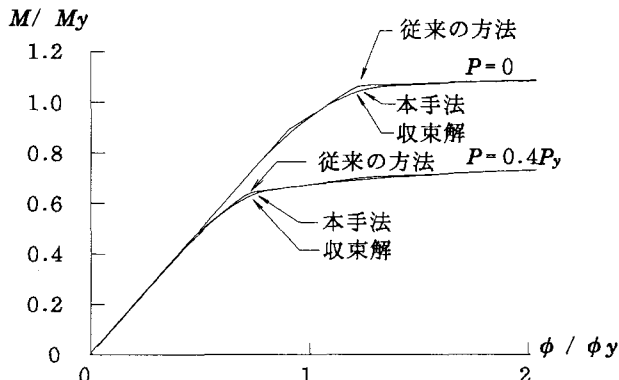


図-2 曲げモーメント-曲率関係

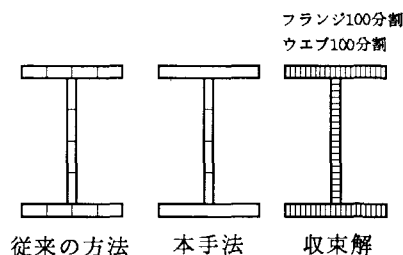


図-3 メッシュ分割

は、図-3 に示すように本手法では上・下フランジを 1 要素、ウェブを 4 メッシュに分割し、従来の方法では残留応力の変化を考慮するためにフランジならびにウェブをそれぞれ 4 分割している。また、従来の方法で上・下フランジならびにウェブのメッシュ分割をそれぞれ 100 とした場合を収束解と考え比較対象としている。図-2 より、本手法では今回の 6 分割で収束解と同等の結果を得ているのに比べ、従来の方法では、メッシュ分割が 12 と多いにもかかわらず、接線剛性の不連続性が顕著に現れている。

3. 平面骨組の弾塑性有限変位解析

分岐解析を正確に行うためには、大変形挙動を解析し得る精度の良い弾塑性有限変位解析法を用いる必要

がある。ここでは各部材要素断面の塑性域の進展は2. で述べた方法で、また、軸方向の塑性域の変化は有限要素をセグメントに分割する方法で考慮する。幾何学的非線形挙動の解析は、文献8)でその精度が確認されている要素分割長無限小で厳密なはりの有限ひずみ・有限変位の理論に収束する剛体変位除去の手法を適用する。この手法により、はり要素の複合非線形性を考慮した高精度の接線剛性方程式が得られるが、骨組全体系の弾塑性有限変位挙動は、これらをもとに組み立てた全体系の接線剛性方程式に増分法を適用することで解析される。増分計算法としては極限点挙動にも対応できるように、Newton-Raphson法による収束計算過程を含む弧長増分法を用いる。弧長増分法は分岐点を除く任意の形状のつり合い経路の解析に適用できるが、本質的な特異点挙動である分岐挙動を解析することはできない。つまり、弾塑性分岐挙動の解析については特別の配慮が必要で、次節では、はり構造を対象とした分岐解析の手法を述べる。

4. 平面骨組の弾塑性分岐解析

著者らが提示した多自由度離散系の弾塑性分岐解析の手法を平面骨組に適用する手法を説明する。Hillの条件²⁾をもとに文献6)で誘導した離散系の弾塑性分岐が生ずるための必要条件は、総和規約を用いて表示すると下式のとおりである。

$$\Delta \Pi = (\Delta U_i^b - \Delta U_i^f) \Delta K_{ij}^c (\Delta U_j^b - \Delta U_j^f) + (\Delta U_i^b - \Delta U_i^f) \{ (\Delta K_{ij}^c - \Delta K_{ij}^f) \Delta U_j^f + (\Delta K_{ij}^b - \Delta K_{ij}^c) \Delta U_j^b \} = 0 \quad (4)$$

ここに ΔK_{ij} は接線剛性行列、 ΔU_j は節点変位ベクトル増分で、分岐点から基本経路(f)、分岐経路(b)方向について、同一の荷重増分 $\Delta P F_i$ (ΔP :荷重パラメータ増分、 F_i :荷重モードベクトル)において、接線剛性方程式がそれぞれ以下のように表されたとしている。

$$\Delta P F_i = \Delta K_{ij}^f \Delta U_j^f, \quad \Delta P F_i = \Delta K_{ij}^b \Delta U_j^b \quad (5, a, b)$$

また、分岐点からの増分に対し、除荷の場合も負荷剛性をとると仮定するComparison Solidsとしての接線剛性行列を ΔK_{ij}^c で表している。

式(4)をBernoulli-Eulerのはり要素から成る平面骨組を対象に書き換えると次のようになる。

$$\Delta \Pi = (\Delta U_i^b - \Delta U_i^f) \Delta K_{ij}^c (\Delta U_j^b - \Delta U_j^f) + \sum_{e=1}^{n_e} \mu_e \quad (6)$$

$$\mu_e = \int_0^{l_e} \int_{A_e} (\Delta \epsilon^b - \Delta \epsilon^f) \{ (E_t^c - E_t^f) \Delta \epsilon^f + (E_t^b - E_t^c) \Delta \epsilon^b \} dA dz \quad (7)$$

ここに E_t^f, E_t^b はそれぞれ基本経路、分岐経路方向での骨組要素内の各点での接線剛性、 E_t^c はComparison Solidsとしての値を表す。 $\Delta \epsilon^f, \Delta \epsilon^b$ は上記各点での基本経路、分岐経路方向のひずみ増分である。また、 A_e, l_e はそれぞれ骨組要素の部材断面積と長さを表し、 n_e は構造系の要素総数である。

数値計算で塑性領域理論を用いる場合は、骨組断面をメッシュに、また要素部材長手方向をセグメントに分割するので、式(7)は次のように離散化される。

$$\mu_e = \left\{ \sum_{j=1}^{n_l} \sum_{i=1}^{n_a} [(\Delta \bar{\epsilon}^b - \Delta \bar{\epsilon}^f) \{ (\Delta \bar{E}_t^c - \Delta \bar{E}_t^f) \Delta \bar{\epsilon}^f + (\Delta \bar{E}_t^b - \Delta \bar{E}_t^c) \Delta \bar{\epsilon}^b \}]_{ij} \Delta A_i \Delta l_j \right\} \quad (8)$$

$(\bar{\cdot})$ は各メッシュに関する2. で定義した平均化した物理量である。 ΔA_i は骨組要素断面を n_a に分割したときのメッシュ i の断面積で Δl_j は骨組要素を長手方向に n_l に分割したときの分割小要素(セグメント) j の長さを示す。

文献6)のトラス構造と同様、要素各メッシュにおいて、除荷負荷挙動に関する可能な全ての挙動を検討すると、式(8)に関して次の関係が常に成立する。

$$\mu_e \geq 0 \quad (9)$$

ここでは、弾塑性分岐が構造物の耐荷力に関与する重要な場合ということで、極限点荷重以下の単調増加する基本経路上において分岐が生ずる場合を対象とする。このとき、分岐前には基本経路が単調増加することにより、

$$|\Delta K_{ij}^c| \geq 0 \quad (10)$$

が成立する。従って、2. の構成則より $|\Delta K_{ij}^c|$ が連続的に変化することを考慮すると分岐が初めて可能となるのは式(6)が零となる時で、これは下記の条件を満足する場合である。

$$|\Delta K_{ij}^c| = 0, \mu_e = 0 \quad (11, a, b)$$

式(11, a)により分岐点が特定できるとともに、分岐経路の方向は式(11, b)を満足するものとして決定される。分岐方向の算定法として、文献6)では試行錯誤による方法と ΔK_{ij}^c の零固有値に対応する固有ベクトルを用いる方法とを提示しているが、式(8)からわかるように、はり要素の場合、試行錯誤による方法では除荷負荷を検討するメッシュ、セグメント数が非常に多いので、事実上その適用は不可能になる。したがって、ここでは、固有ベクトルを用いる方法により分岐経路方向を特定する。すなわち、 ΔK_{ij}^c の零固有値に対応する固有ベクトルを ΔU_j^c とすると、分岐方向の増分変位ベクトルは

$$\Delta U_j^b = \Delta U_j^f + c \Delta U_j^c \quad (12)$$

と表され、定数 c は式(11, b)を満足する条件、即ち次式(13)により決定される。

$$c = -\text{sign}\left(\frac{\Delta \varepsilon^f}{\Delta \varepsilon^g}\right) \cdot \text{Min}\left|\frac{\Delta \varepsilon^f}{\Delta \varepsilon^g}\right| \quad (13)$$

ここで、 $\Delta \varepsilon^g$ は固有ベクトル方向のひずみ増分を表す。また $\text{sign}(\cdot)$ は $\cdot$ の符号をとることを、 $\text{Min}|\cdot|$ は $\cdot$ の絶対値の最小値をとることを示す。

5. Cicalaによる単純支持柱の弾塑性分岐解析結果との比較

柱の弾塑性分岐挙動はShanley¹⁾により剛体ばねモデルを用い初めて解析されたことは有名であるが、塑性域の進展を考慮したいいわゆる連続体としての解析は少ない。ここでは、連続体として柱の弾塑性分岐を扱ったCicalaの解析結果⁷⁾との比較を行うことで、本弾塑性分岐解析の精度・妥当性を検証する。

Cicalaは図-4に示すような上・下フランジのみを考慮しウェブを無視したはりモデルを用い、材料の構成則としてはBi-linear型のもので採用した。また、幾何学的非線形解析は、いわゆる線形化はり・柱理論に基づいている。これらの支配微分方程式の解法には摂動法を用い5次までの展開を行った。ここでは、残留応力のない図-4の断面を有する4種類の長さ(L)の柱を対象に、本解析法とCicalaによって得られた解の比較として、図-5に圧縮荷重と柱端部の回転角の関係を示している。また図-6には長さ $L=50$ inch(127 cm)の柱について、分岐後の除荷域ならびに再降伏域の進展を図-5の圧縮荷重と柱端部の回転角の関数と対応させて表示している。なお、本解析では断面は上下フランジとも分割せず(1分割)また、長さ方向は収束性を考慮して10分割の有限要素に分割している。さらに、各有限要素では軸方向の塑性領域の進展を考慮するため2つのセグメントに分割している。

図-5より、本解析、Cicalaの解いずれによっても、塑性座屈特有の柱の分岐直後に生ずる除荷に起因した荷重上昇の傾向は良く解析されている。しかしながら、分岐荷重値、ならびに分岐後の挙動特性について

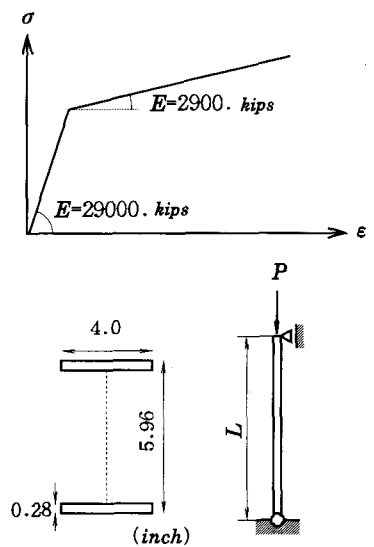


図-4 Cicalaの解析モデル

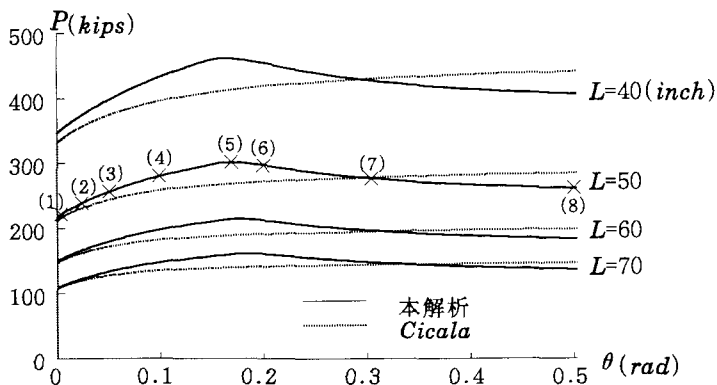


図-5 荷重-回転角曲線

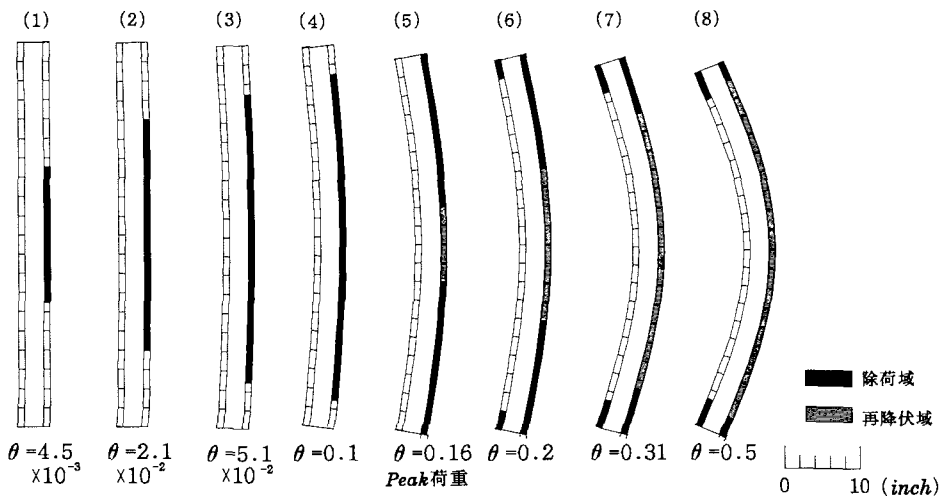


図-6 分岐後の変形の進展 ($L=50inch$)

は、両者の解析結果には差が認められる。まず、分岐荷重は、本手法によるものがCicalaの結果より高めにでており、この差は柱長が短いほど大きくなっている。これは、有限ひずみ・有限変位理論に基づく本手法では座屈前の軸方向変形の影響が正確に考慮されているのに対し、線形化有限変位理論によるCicalaの解析では座屈前の変形が無視されているためである。

分岐後、変形が進展するにつれて本解析とCicalaの解析結果との差が広がる。特に本解析では分岐後、荷重が上昇し極限点が現れ荷重が減少するが、Cicalaの解析結果では荷重が増加し続ける。変形が進展するにつれて両者の解析結果に差が生ずる理由としては、先にも述べたようにCicalaの解が小変形を前提とした近似理論である線形化・はり柱理論に基づいていることと、解自体が分岐点での摂動解ゆえ、分岐点から離れると精度が低下するためと考えられる。また、Cicalaの解で分岐後、極限点が生じないのは図-6に示すように変形の進行に伴い、除荷部分が再降伏するが、この影響が無視されていることによる。

以上の比較からわかるように、弾塑性分岐現象では弾性分岐の場合に比べ、変形が大きくなり、この影響がより強く現れる傾向にある。このことは弾塑性分岐挙動を精度良く解析するには本手法のように有限ひずみ・有限変位の影響を正確に考慮した解析が必要であることを示唆している。

6. 初期曲げを受ける門型骨組の弾塑性座屈解析

提案した平面骨組の弾塑性分岐解析法の適用例として、初期曲げを受ける横拘束のない門型骨組完全系の座屈解析を行い、その特性を検討する。このような解析モデルを選んだ理由としては、座屈前の変形が一樣ではなく、通常の摂動法では扱いにくいということと、工学的にも鋼製ラーメン橋脚等として重要だからである。弾性骨組については初期曲げにより生ずる座屈前の変形のため、構造パラメータによっては設計で常に想定されている横移動分岐座屈が生じず、屈服や単調増加といった挙動を示すことを明らかにした^{13) 14)}。ここでは、鋼製骨組を対象に、有限変形挙動のみならず材料の弾塑性挙動を正確に考慮して、より実

状に近い座屈特性の検討を行う。この検討の主たる目的は、設計で想定される横移動分岐座屈が弾塑性挙動を示す鋼骨組においても常に生ずるか否かを明らかにすることである。

(1) 解析モデル

解析モデルとしては図-7に示すように、柱基部を固定ならびにピン結合とした2タイプの幾何学的初期不整のない門型骨組とし、初期曲げを生ずる荷重としては、はり中央に作用する集中鉛直荷重 P を考える。部材断面は、フランジとウェブ幅が等しいH型断面とする。また残留応力ならびに鋼材の構成則としてはすべての部材について、図-1と同一で、ヤング係数を $E=2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ 、降伏応力を $\sigma_y=2400 \text{ kgf/cm}^2$ としたものを用いる。

通常の骨組では、はりと柱の寸法 L_b 、 L_c が与えられ、設計荷重に対して断面寸法が定められる。従ってここでも設計荷重を定めることで部材断面を設計する。設計手法としては鋼構造物設計指針¹⁶⁾に基づき、はり・柱の部材照査式には次式を用いる。

$$f = \nu \frac{P}{P_{cu}} + \frac{\nu M}{M_{cu}(1 - \nu P/P_{cr})} \leq 1 \quad (14)$$

ここに、

P : 軸方向圧縮力、 P_{cu} : 圧縮耐力、

P_{cr} : オイラー座屈強度、 M : 等価換算曲げモーメント、 M_{cu} : 終局曲げモーメント、 ν : 安全率(1.7)

なお、上記の式では、簡単にするため部材の局部座屈は無視する。また、平面問題に限定することから終局曲げモーメントの評価において横倒れ座屈は生じないものとする。

具体的なはり長 L_b 、柱長 L_c の値としては、解析モデルが門型骨組の偏平なものから背の高いものまで含むように柱長 $L_c=8\text{m}$ として、4種類のはり長 L_b を選んだ。また、はり・柱の断面の上下フランジ間の寸法 h_b 、 h_c は、それぞれの L_b 、 L_c の組み合わせにおいて一律 $P=17.6\text{tonf}$ の設計荷重($\nu P=30\text{tonf}$)に対しい式(14)の照査式の右辺の値が以下のⅠ、Ⅱ、Ⅲの条件を満足する3種類のものを選んだ。

Ⅰ. $f_b=1.0$ 、 $f_c=1.0$

Ⅱ. $f_b=1.0$ 、 $f_c=0.7$

Ⅲ. $f_b=0.7$ 、 $f_c=1.0$

ここに、 f は式(14)の右辺の値で、添字 b, c はそれぞれはり、柱に対応するものであることを示している。Ⅰ～Ⅲの条件としては次のような意味を持つ。すなわち、Ⅰは式(14)を照査式とする設計において、はりと

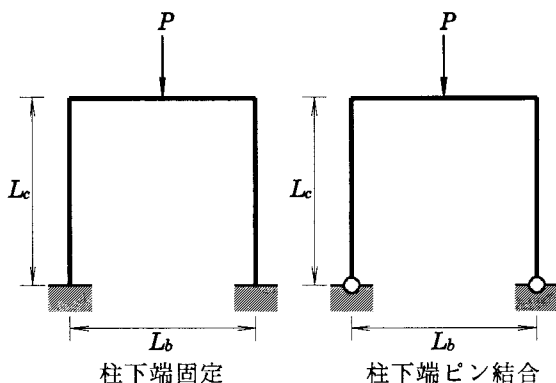


図-7 解析モデル

柱の強度がバランスのとれている場合で、Ⅱは柱を強く、またⅢははりを強く設計した場合である。以上の様な手順で決定された解析モデルの幾何学パラメータをまとめて表-1に示す。これらの断面の構成板要素はすべて限界幅厚比以内におさまっている。なお、各部材については、図-1(a)に示す残留応力分布を考慮する。数値解析では上下フランジは分割せずに、ウェブを4分割した。また収束性を考慮して、はりと柱をそれぞれ20要素に分割し、さらに軸方向の塑性化を考慮するため各有限要素を2つのセグメントに分割した。

(2) 弾塑性座屈特性

初期曲げを受ける表-1に示す各門型骨組の弾塑性座屈挙動の解析結果として、鉛直荷重と柱頭部水平変位の関係を、柱基部固定の構造と柱基部ピン結合の構造について、それぞれまとめて図-8、9に示す。また、参考のため、これらの図には材料の線形挙動を仮定した弾性座屈挙動も対比する形で示している。

まず、初期曲げを受ける柱基部固定の門型骨組の弾塑性座屈挙動を図-8(a)~(c)をもとに

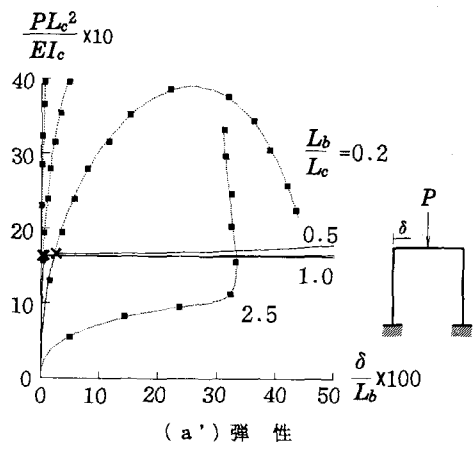
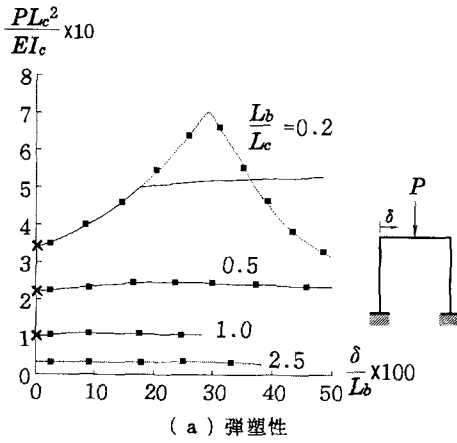
検討する。表-1に示す設計条件Ⅰ、Ⅱ、Ⅲいずれの場合においても、はりと柱の比 $L_b/L_c=0.2, 0.5, 1.0$ の構造は座屈形式として水平移動分岐座屈を生ずるが、 $L_b/L_c=2.5$ の偏平な門型骨組では分岐座屈ではなく、屈服を生ずる。この座屈特性は図-8(a')~(c')に示す弾性骨組の座屈挙動と同様であるが、そのつり合い曲線の形状は大きく異なっている。特に、水平移動分岐座屈に関しては、分岐直後において、弾性分岐では主経路と分岐経路の差が明瞭になるのに比べ、弾塑性分岐では両者の事実上の差はなく、変形が進行してはじめて差が現れる。この特性を、構造系全体の挙動において確認するため、 $L_b/L_c=0.2$ 、設計条件Ⅰの構造について、分岐後の変形モードの変化を弾塑性と弾性的場合とを比較する形で図-10に示す。この図からも確認されるように、弾性的場合は分岐後、直ちに水平移動座屈モードが支配的になるのに比べ、弾塑性の場合は、分岐後もしばらくの間は主経路での変形モードであるはりの塑性メカニズムによる対称変形モードが卓越し、変形が進行して初めて水平移動座屈モードが生ずる。従って、このような塑性メカニズムの生じやすい $L_b/L_c=0.5, 1.0$ のいわゆる偏平な構造や、はりの弱い設計条件Ⅱの構造では、かなり変形が進んではじめて主経路と分岐経路との差が明確に生ずるため、図示の範囲ではほとんど変形が一致しているように見える。以上のように、弾塑性骨組では弾性骨組と異なり水平移動分岐座屈が生ずる場合も、これによってほとんど耐力が低下することはない。

次に、柱基部ピン結合の門型骨組の弾塑性座屈挙動を図-9(a)~(c)により検討する。柱基部ピン結合の構造の座屈形式としては柱に比べはりが相対的に弱い構造（設計条件Ⅱの構造）が $L_b/L_c=5.0$ で屈服する以外、他の構造では $L_b/L_c=0.1\sim 5.0$ の範囲内で全て水平移動分岐座屈を生ずる。一方、弾性骨組の場合は、図-9(a')~(c')に示すように、全構造に関して $L_b/L_c=0.1\sim 1.0$ で水平移動座屈、 $L_b/L_c=5.0$ で屈服を生ずる。このように柱基部ピン結合の門型骨組では基部の固定度が小さいため、基部固定の骨組に比べ、 L_b/L_c の値が大きくなり偏平な構造まで座屈形式は水平移動分岐座屈挙動となる。また、弾塑性分岐

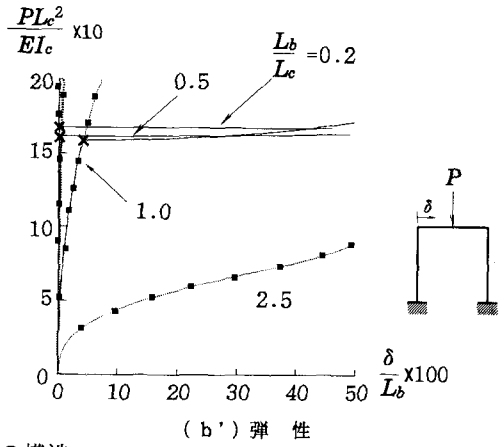
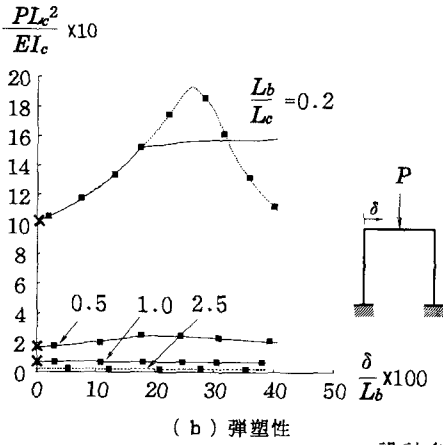
表-1 解析モデルの幾何学パラメータ

骨組タイプ	$\frac{L_b}{L_c}$	設計条件	$\frac{L_b}{h_b}$	$\frac{L_c}{h_c}$	$\frac{A_b}{h_b^2} \times 10$	$\frac{A_c}{h_c^2} \times 10$	$\frac{I_b}{h_b^4} \times 10^3$	$\frac{I_c}{h_c^4} \times 10^3$
柱基部固定門型骨組	0.2	Ⅰ	13.3	57.1	3.79	3.52	5.92	5.53
		Ⅱ	16.0	52.5	4.96	2.23	6.74	3.96
		Ⅲ	13.3	57.1	5.45	5.03	7.39	7.11
	0.5	Ⅰ	25.0	47.0	3.35	1.97	5.62	2.97
		Ⅱ	20.0	47.0	2.21	5.05	3.42	6.85
		Ⅲ	22.2	44.8	3.44	2.50	5.57	4.11
	1.0	Ⅰ	34.7	34.7	4.66	3.56	6.53	5.10
		Ⅱ	33.3	28.6	2.91	1.44	5.01	2.47
		Ⅲ	33.3	38.0	3.03	2.17	5.07	3.65
	2.5	Ⅰ	52.6	24.2	1.82	1.45	3.26	2.29
		Ⅱ	47.6	20.5	1.58	1.33	2.71	2.18
		Ⅲ	50.0	25.8	2.73	2.39	4.70	4.32
柱基部ピン門型骨組	0.1	Ⅰ	8.0	42.0	5.12	3.47	6.56	5.29
		Ⅱ	8.0	40.0	3.83	5.01	5.59	7.03
		Ⅲ	8.0	50.0	5.65	4.36	7.11	6.27
	0.5	Ⅰ	19.0	36.4	1.81	2.28	3.42	4.02
		Ⅱ	18.2	26.7	1.44	2.02	2.69	3.27
		Ⅲ	20.0	36.4	3.30	3.26	5.02	5.06
	1.0	Ⅰ	32.0	29.6	2.95	2.27	4.96	3.66
		Ⅱ	30.8	30.8	2.81	3.89	4.12	5.73
		Ⅲ	34.7	25.0	1.15	3.34	2.03	5.05
	5.0	Ⅰ	50.0	19.5	2.29	1.80	4.02	3.42
		Ⅱ	48.1	18.2	1.86	2.73	3.47	4.63
		Ⅲ	52.5	17.8	2.02	1.76	3.40	2.85

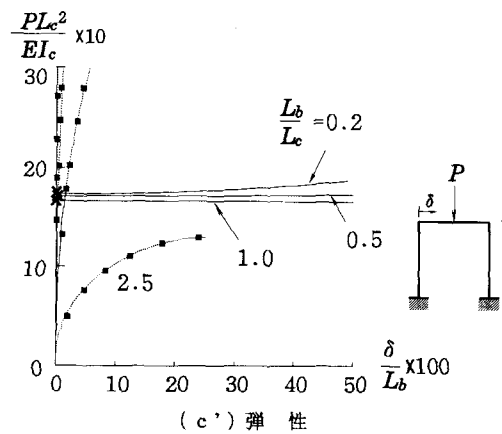
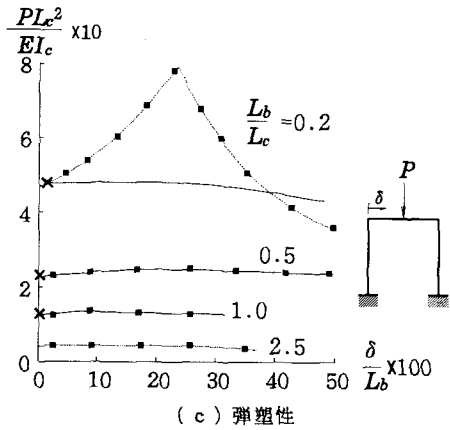
$L_c = 8.00m$



設計条件Ⅰの構造



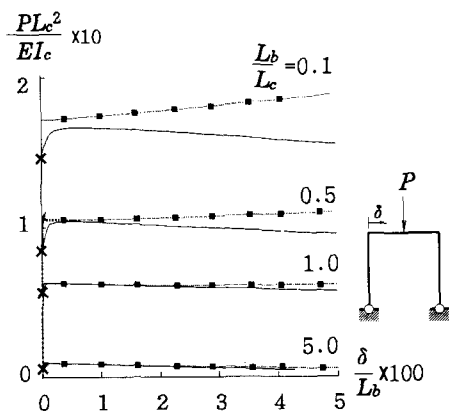
設計条件Ⅱの構造



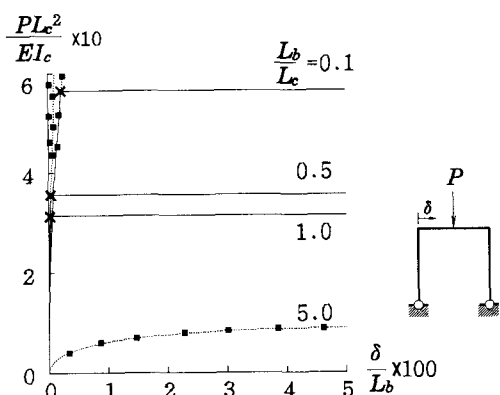
設計条件Ⅲの構造

図-8 柱基部剛結の門型骨組の弾塑性座屈挙動

× 分岐点
 — 分岐経路
 - - - 主経路

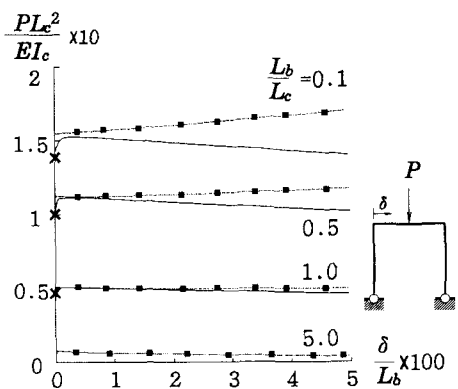


(a) 弾塑性

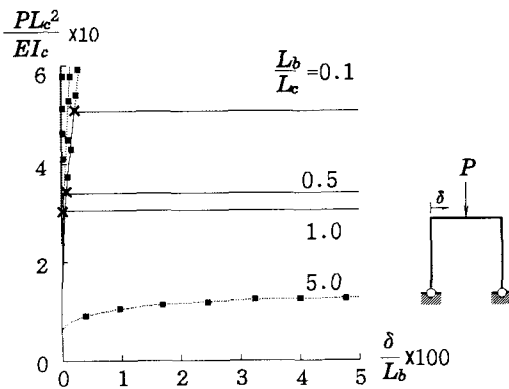


(a') 弾性

設計条件Ⅰの構造

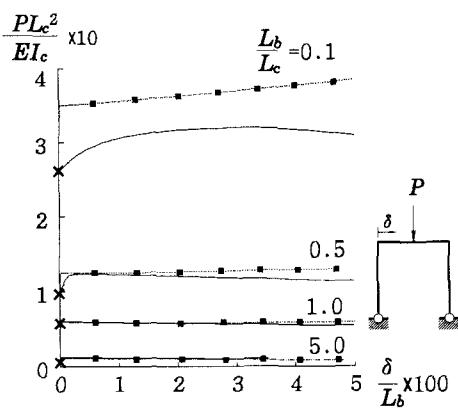


(b) 弾塑性

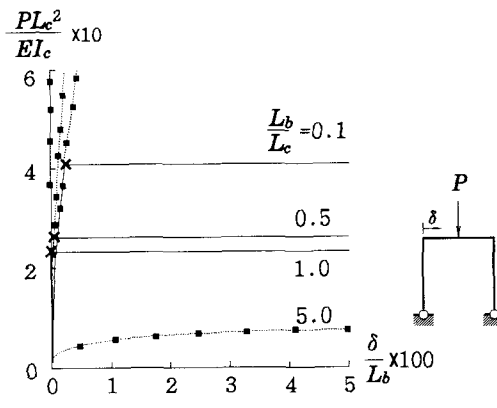


(b') 弾性

設計条件Ⅱの構造



(c) 弾塑性



(c') 弾性

設計条件Ⅲの構造

× 分岐点
—— 分岐経路
····· 主経路

図-9 柱基部ピン結合の門型骨組の弾塑性座屈挙動

座屈挙動の特性については、基本的には先に述べた柱基部固定の構造と同様、 L_b/L_c の値が大きな偏平な構造ほど、主経路と分岐経路の差が現れにくい傾向にある。ただ、この傾向は柱基部固定の構造ほどには強く現れない。

以上のような、材料の弾塑性挙動を考慮した、より現実に近い初期曲げを受ける鋼製門型骨組の座屈挙動に関する検討の結果、その特性は次のようにまとめることができよう。すなわち、材料が弾塑性挙動を示す場合においても、弾性的場合と同様、門型骨組の形状がより偏平になると、その座屈形式としては水平移動分岐座屈から屈服へと変化する。さらに、弾塑性材料の場合、はりが柱に比べて相対的に弱く、はりに塑性メカニズムが生じやすい構造ほど分岐座屈から屈服へと移行しやすい。しかしながら、弾塑性の水平移動分岐座屈の挙動特性は弾性的場合と大きく異なり、はりに塑性メカニズムが生ずると、分岐後においても主経路と分岐経路の差は現れにくく、変形が進行して初めて両者の差が明瞭となる。具体的には図-8、9からわかるように $L_b/L_c \geq 0.5$ の構造では、主経路と分岐経路の差は微小で、水平移動分岐座屈はほとんど耐力の低下をもたらさない。

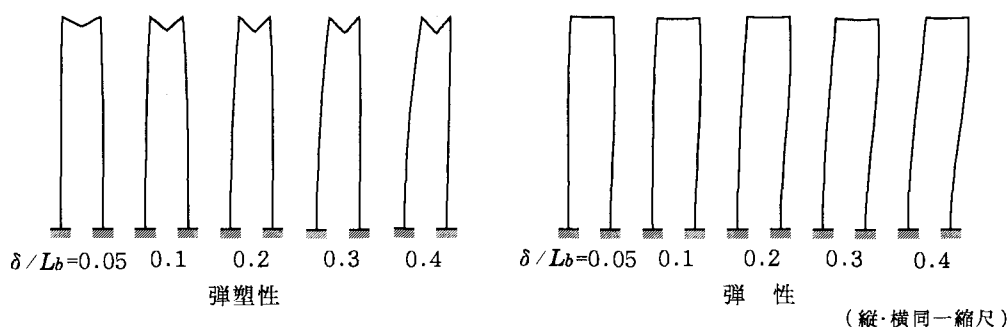


図-10 柱基部剛結の門型骨組の分岐後の変形モードの推移 ($L_b/L_c = 0.2$, 設計条件 I)

7. まとめ

本論文では、著者らがすでに示した多自由度離散系の弾塑性分岐解析法を三力部材からなる平面骨組へ適用する方法を示した。また、本分岐解析法の妥当性と精度を検討する目的で、塑性領域の進展を考慮した Cicala による柱の弾塑性分岐の摂動解との比較を行った。さらに、数値解析例として、初期曲げを受ける門型骨組の弾塑性座屈を解析し、弾性座屈特性との差異を検討した。ここで得られた成果をまとめると以下のようになる。

1) 提示した平面骨組の弾塑性分岐解析法では、材料の弾塑性挙動ならびに、構造の有限変形挙動を正確に考慮でき厳密な分岐解析が可能となる。

2) Cicala による柱の分岐解析との比較から、塑性分岐の場合は弾性分岐に比べ、座屈前の変形の影響が現れやすく、また、後座屈領域では材料の除荷は言うまでもなく再降伏挙動も生ずることが明らかとなった。従って、精度の良い弾塑性分岐解析を行うためには、このような点を正確に考慮することが必要である。

3) 初期曲げを受ける門型骨組の弾塑性座屈挙動は、弾性的場合と同様、構造が偏平になるにつれ座屈様式が横移動分岐座屈から屈服へと変化する。しかしながら、その分岐特性は弾性と大きく異なり、 $L_b/L_c \geq 0.5$ の構造では、はりの塑性メカニズムのため分岐後においても主経路と分岐経路との差は小さく、変形が大きく進展してはじめて、両者の差が明瞭になる。このため、水平移動分岐座屈が骨組の耐力低下に及ぼす影響は弾性骨組に比べ非常に小さくなる。

参考文献

- 1) Shanley, F.R. : Inelastic Column Theory, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 14, pp. 261-268, 1947
- 2) Hill, R. : A General Theory of Uniqueness and Stability in Elastic Plastic Solids, Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vol. 6, pp. 236-249, 1958
- 3) Sewell, M. J. : The Static Perturbation Technique in Buckling Problem, Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vol. 13, pp. 247-265, 1965
- 4) Hutchinson, J.W. : Post-Bifurcation Behavior in the Plastic Range, Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vol. 21 pp. 163-190, 1973
- 5) Goto, Y., Suzuki, S. and Chen, W.F. : Analysis of Critical Behavior of Semi-Rigid Frames with or without Load History in Connections, International Journal of Solids and Structures, Vol. 27, No. 4, pp. 467-483, 1991
- 6) 後藤芳顯、大鹿克敏、川西直樹、小畑誠 : 多自由度離散系の弾塑性分岐挙動の解析方法とトラス構造への適用、土木学会論文集、No. 446/1-19, pp. 117-126, 1992
- 7) Cicala, P. : Column Buckling in the Elastoplastic Range, Journal of the Aeronautical Science, Vol. 17, No. 8, pp. 508-512, 1950
- 8) 後藤芳顯、吉光友雄、小畑誠、西野文雄 : 平面骨組の有限変位・有限ひずみ理論の解に収束する2種類の数値解析法と精度特性、土木学会論文集、No. 428/1-15, pp. 67-76, 1991
- 9) Chawalla, E. : Die Stabilität Lotrecht Belasteter Rechteckrahmen, Der Bauingenier, Vol. 19, pp. 69-75, 1938
- 10) Mansur, E. F., Chang, I. C. and Donnell, L. H. : Stability of Frames in the Presence of Primary Bending Moments, Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 87, No. 4, pp. 19-34, 1961
- 11) Lu, Le-Wu : Stability of Frames under Primary Bending Moment, Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 89, No. 3, pp. 35-62, 1963
- 12) 林 正 : 曲げ荷重を受けるラーメンの座屈解析、構造工学論文集、Vol. 32A, pp. 443-457, 1986
- 13) 後藤芳顯、鈴木五月、松浦聖 : はり・柱理論に基づく初期曲げモーメントを受ける弾性矩形骨組の座屈解析に関する一考察、構造工学論文集、Vol. 36A, pp. 123-134, 1990
- 14) Goto, Y., Suzuki, S. and Chen, W.F. : Bowing Effect on Elastic Stability of Frames under Primary Bending Moments, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 117, No. 1, pp. 111-127, 1991
- 15) ECCS: Ultimate Limit State Calculation of Sway Frames with Rigid Joints, p. 3, 1984
- 16) 土木学会 : 鋼構造物設計指針 PART A 一般構造物、p. 59, 1987

(1993年 9月16日受付)