

骨組構造物の座屈設計法の比較と評価

A CRITICAL REVIEW OF STABILITY DESIGN METHODS FOR STEEL FRAMES

織田博孝*

宇佐美勉**

By Hirotaka ODA and Tsutomu USAMI

The purpose of this paper is to evaluate several design methods for stability of steel frames. In the current design method based on effective buckling length concept, the buckling length of a member subject to small amount of axial compression becomes very large. Engineers and designers are confronted by this problem in the design of a cable-stayed bridge. Accordingly, several advanced design methods contrary to the effective buckling length concept have been proposed in the last few years. The proposal by the authors is based on elastic second-order analysis. The other proposals are based on the concept of effective tangent modulus or imaginary axial force. What seems to be lacking, however, is the comparison between these proposals on both validity of strength estimation and possibility of optimum design. Therefore, these two points above are examined by a few examples of a frame with a member subject to small amount of axial compression.

Key Words : stability design, steel frames, design code

1. ま え が き

本論文では、弾性2次解析を用いた骨組の座屈設計法の提案と、最近提案された有効接線弾性係数と付加軸力の概念を用いた、いくつかの座屈設計法を比較・評価した結果について報告する。

有効座屈長に基づく現行設計法の問題点は、微小軸圧縮力部材の有効座屈長が過大になることである^{1), 2)}。実際に斜張橋の設計において、このことが問題となっており設計技術者はいろいろと検討しているが、その合理性に疑問を感じているようである(例えば文献3)など)。この問題に対して、有効座屈長を用いない設計法としてP- Δ 法が研究された。いくつかのP- Δ 法については宇佐美によって比較・評価されている⁴⁾。しかし、P- Δ 法は長方形ラーメンに限られるため、実務に適用されるに至っていない。

そこでP- Δ 法にかわって、マトリックス法に基づく弾性2次解析法を用いた設計法の概念が、長谷川・西野らによって提案された⁵⁾。この方法では、あらゆる初期不整に等価な初期たわみの導入が最も重要であり、最近著者らは任意の変断面骨組に適用可能な等価初期たわみの算定法を提案した⁶⁾。一方、マトリックス法に基づく座屈固有値解析に付加軸力、有効接線弾性係数を導入した新しい方法が提案されている^{7) 8) 9)}。特に、倉方ら⁸⁾、野上⁹⁾の提案法は有効座屈長を用いないことに特徴がある。しかし、これらの研究では、その提案法を用いた強度推定あるいは設計の有利性の両面を検討しているものは少ない。そこで本論文では、微小軸圧縮力部材含む例題を用いて、強度推定・設計の両面からこれらの設計法の比較・評価を行う¹⁰⁾。

* 工修 名古屋大学助手 工学部土木工学科 (〒464-01 名古屋市千種区不老町)

** D.Sc., 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学科 (〒464-01 名古屋市千種区不老町)

2. 各種の座屈設計法

(1) 弾性2次解析を用いた設計法の提案

弾性2次解析による座屈設計は次のように行う。初期不整による強度低減作用を、初期不整に等価な初期たわみを導入することにより考慮し、骨組の全体強度を断面強度照査のみによって評価する。等価初期たわみの意味を具体的に図-1により説明する。図は両端単純支持柱の荷重 P と、部材中央の2次曲げモーメントの関係を示している。弾性2次解析の結果は初期たわみの大きさに左右されるが、適当な大きさ——等価初期

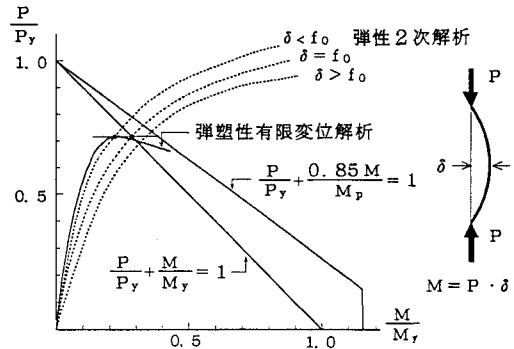


図-1 弾性2次解析と弾塑性有限変位解析の関係

たわみ——を選ぶと断面強度式との交点を弾塑性有限変位解析による強度と一致させることができる。

著者らは、任意の境界条件、変断面の骨組の等価初期たわみの算定法を提案した⁶⁾。これは両端単純支持はり一柱の等価初期たわみ量を求め、それを任意の境界条件、変断面に当てはめる手順をとる。まず、両端単純支持はり一柱の等価初期たわみ算定式について述べる。弾性2次解析法による解として、はり一柱の微分方程式を解くことにより、支間中央の最大曲げモーメント M_{max} は次式で得られる。

$$\frac{M_{max}}{M_y} = \frac{1}{1 - N/N_e} \frac{N}{N_y} \eta + \frac{M_0}{M_y} \sec \frac{c \cdot l}{2} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 N ：作用軸力、 M_0 ：材端モーメント、 N_y ：全断面降伏軸力、 M_y ：降伏モーメント、 N_e ：オイラー座屈軸力、 $c = \sqrt{N/EI}$ (EI ：はり一柱部材の曲げ剛性)である。また、 η は無次元化初期たわみで、 $\eta = f_0 \cdot A/W$ (f_0 ：部材中央の等価初期たわみ、 A ：断面積、 W ：断面係数)で表される。軸力 N と上式の M_{max} が次の初期降伏条件式を満足する荷重が弾性2次解析法による推定強度である。

$$\frac{N}{N_y} + \frac{M}{M_y} = 1 \quad \dots\dots\dots (2)$$

等価初期たわみ量算定式は、耐荷力に対する十分な精度が確認されている部材強度相関式(表-1の式(b)参照、ただし $M_u = M_y$)と上述の推定強度が一致する条件から求めた。次式が溶接箱形断面はり一柱の下限値相当曲線に対する等価初期たわみ量の提案式である⁶⁾。

$$\begin{aligned} \eta &= 0.404 (\bar{\lambda} - 0.2) & (0.2 \leq \bar{\lambda} \leq 1.0) \\ &= 1.388 (\bar{\lambda} - 0.767) & (1.0 < \bar{\lambda}) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3a, 3b)$$

本論文では、上式を修正して全塑性モーメント M_p をベースとした等価初期たわみを提案する。 $M_p = f \cdot M_y$ (f ：形状係数)であるから、式(1)の関係を M_y を M_p に換える他に η を $f \cdot \eta$ と変換したものになる。このとき断面強度式として式(2)の M_y を M_p に置き換えたものを用いれば、等価初期たわみ量算定式の誘導過程は全く変わらない。すなわち、 M_p ベースの等価初期たわみは式(3)を形状係数 f 倍すればよい。

次に式(3)の等価初期たわみ量算定式を、任意の境界条件を持つ変断面骨組へ適用する手順を示す。境界条件の違いを考慮するために曲率に着目するが、その理由は文献6)に述べている。

- 1) 設計荷重を作用させた初期たわみのない骨組に対して座屈固有値解析を行う。それから細長比パラメータ $\bar{\lambda} = \sqrt{N_y / \Lambda \cdot N}$ (Λ ：固有値)と座屈モードを求める。
- 2) 骨組中で $\bar{\lambda}$ が最小の部材に着目する。
- 3) 着目部材に対して、座屈モードから曲率 κ_m を計算する。これはマトリックス法で用いる棒要素の形状関数と節点変位(座屈モード値)から容易に計算できる。
- 4) 着目部材中で κ_m が最大となる点に着目し、その点で着目部材の支持状態を考慮した等価初期曲率、

$\overline{\kappa}_0 = s \cdot \kappa_0$ を求める。係数 s は式(4), (5)から求める。

$$s = \sin \xi \cdots \cdots \cdots (4)$$

$$\text{ここに, } \xi = \cot^{-1} \left(\frac{\theta_m / \theta_0}{\kappa_m / \kappa_0} \right) \cdots \cdots \cdots (5)$$

θ_m, κ_m : 座屈モードから求められる着目点のたわみ角および曲率

θ_0, κ_0 : 式(6a), (6b)から計算される両端単純支持はり一柱の材端たわみ角, 中央曲率

$$\theta_0 = \frac{\eta}{\lambda} \left(\frac{r}{e} \right) \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}}, \quad \kappa_0 = \frac{\eta}{\lambda^2} \left(\frac{1}{e} \right) \left(\frac{\sigma_y}{E} \right) \cdots \cdots \cdots (6a, 6b)$$

ここに, r : 断面2次半径, e : 中立軸から圧縮縁までの距離, η は式(3)から求める。

- 5) 着目点での曲率が上の等価初期曲率 $\overline{\kappa}_0$ に一致するように, 座屈モードをスケールアップし等価初期たわみとする。

この算定手順を物理的な視点から説明する。まず, 変断面骨組における各部材の中心軸圧縮強度 N_u と作用部材軸力 N の比 N/N_u の大小関係について考える。骨組中でこの比が大きい部材ほど座屈に対して弱いと言える。そこで, N/N_u を座屈解析から得られる固有値 Λ により定数倍しても大小関係は変わらず, これは N_e/N_u となる。この比は $\overline{\lambda}$ の関数であり, $\overline{\lambda}$ が小さいほど大きくなることは明らかである。次に, 部材の支持状態係数 s の意味を説明する。着目点は, 換算する両端単純支持はり一柱の中央点にいつも対応するわけではない。それは着目部材の両端の境界条件, すなわち支持状態によって変わり, これを考慮するために係数 s を用いる。係数 s は次のように求められる。まず, 両端単純支持はり一柱の等価初期たわみ y_0 , たわみ角 y_0' , 曲率 y_0'' のモードは次式で表される。

$$y_0 = f_0 \sin \xi, \quad y_0' = \theta_0 \cos \xi, \quad y_0'' = \kappa_0 \sin \xi \cdots \cdots \cdots (7a, 7b, 7c)$$

ここに, $\xi = \pi x / l$ (x : 座標, l : 部材長) である。また, $\theta_0 = \pi / l \cdot f_0$, $\kappa_0 = -\pi^2 / l^2 \cdot f_0$ である。座屈モードでは比のみが意味を持つので, 座屈モードから得られる着目点のたわみ角 θ_m と曲率 κ_m の比が, 両端単純支持はり一柱の y_0' と y_0'' の比に一致する条件から次式の関係が得られる。

$$\frac{\theta_m}{\kappa_m} = \frac{y_0'}{y_0''} = \frac{\theta_0}{\kappa_0} \cot \xi \cdots \cdots \cdots (8)$$

上式は着目点が両端単純支持はり一柱の部材端より ξ の位置に対応することを表している。この ξ を式(7c)に代入して, 係数 s は式(4)の形で求められる。

(2) 各種の座屈設計法の比較

表-1に各種の設計法をまとめている。これらは4つに分類することができる。すなわち, 有効座屈長法, 非弾性固有値解析法, 弾性2次解析法および弾塑性有限変位解析法である。非弾性固有値解析法とは有効接線弾性係数 E_t を用いて固有値解析から直接, 各部材の非弾性座屈軸力 N_u を求める方法である。表-1では, 各設計法の手法を $P-\delta$ 効果および $P-\Delta$ 効果の導入に着目して比較している。ここでは, 2つの効果の意味を従来の文献⁴⁾と異なる意味に用いている。つまり, $P-\delta$ 効果は初期たわみ, 残留応力, 荷重偏心などの初期不整による軸方向強度の低減, $P-\Delta$ 効果は幾何学的非線形による初期曲げモーメント M_0 の増幅を意味している。以下, この表をもとに各設計法の特徴, 問題点を述べる。ただし, 紙面の都合で一部に限定して論じる。

弾性固有値解析 (現行法): 道路橋示方書¹⁰⁾ (以下, 道示と略す) と本四公団・吊橋主塔設計要領¹¹⁾

(以下, 本四と略す) に定められている弾性微小変位解析を前提とした座屈設計法である。 $P-\delta$ 効果は, 両端単純支持柱の基準耐荷力曲線に, 有効座屈長 l_e を代入して N_u を求めることの中で考慮している。 $P-\Delta$ 効果は両端単純支持はり一柱に対する表-1中の略算式(f), (g), (h)により考慮する。本四では節点移動のない部材に対して式(g), 節点移動のある部材に対して式(h)を用いるとしているが, 道示では式(g)しか示されていない。この設計法の精度を左右する l_e の算定は, 簡単な構造物に対して慣用法 (方法と背景は文献²⁾

表－１ 各種の座屈設計法

分類	方 法	構造解析	照査式	P-δ 効果 (初期不整による軸方向強度の低減)		P-Δ 効果 (軸力による曲げモーメントの増幅)	
				P-δ 効果の導入 (Nuの算定)	Nuに対する 有効座屈長の算定	P-Δ 効果の導入 (増幅率の算定)	Neに対する 有効座屈長の算定
有効座屈長法	現行法 [10,11]	微小変位	式(b),(c)	有効座屈長を柱の 基準耐力曲線に 用いる	慣用法 (略算式、ノット) 弾性座屈固有値解析	式(f),(g),(h)	慣用法 (略算式、ノット) 弾性座屈固有値解析
	Ef 法 [11]	弾性 有限変位	同 上	同 上	Ef 法	式(f),(g)	要素長：節点間距離
	応力拡大 係数 [7]	微小変位	同 上	同 上	付加軸力を導入した 弾性座屈固有値解析	式(f),(g),(h)	付加軸力を導入した 弾性座屈固有値解析
	線形化有限 変位解析 [14]	弾性 有限変位	同 上	同 上	線形化有限変位解析 を利用する 式(i),(j)	式(f),(g)	要素長：節点間距離
	高次固有値 [15]	微小変位	同 上	同 上	着目部材に対して、 妥当と思われる高次 モードの値を用いる	式(f),(g),(h)	着目部材に対して、 妥当と思われる高次 モードの値を用いる
非弾性座屈荷重	等価接線 係数法 [8]	同 上 但し、原則 は有限変位	同 上	Ef, 付加軸力を 考慮した非弾性座 屈固有値解析から 直接算定	不 要	式(f)	不要。ただし、 Ne=1.1・Ncr とする。
	ζ 法 [9]	弾性 有限変位	式(c)	Efを考慮した非 弾性座屈固有値解 析から直接算定	不 要	有限変位解析に考 慮	不 要
弾性2次解析法	SSRC P-Δ 法 [4]	等価水平力 を用いた疑似 有限変位	式(b) 式(d)	有効座屈長を柱の 基準耐力曲線に 用いる	部材長とする：有効 座屈長係数K= 1.0	式(f)および 換算水平力	部材長とする：有効 座屈長係数K= 1.0
	ECCS P-Δ 法 [4]	同 上	式(e)	構造解析に初期部 材回転角を考慮す る	不 要	換算水平力	不 要
	弾性2次 解析法 (マトリクス法)	弾性 有限変位	式(c)	構造解析に等価初 期たわみを考慮す る	不 要	有限変位解析に考 慮	不 要
弾塑性有限変位解析			式(a)	構造解析に考慮	不 要	構造解析に考慮	不 要
全体強度 $\frac{P}{P_u}=1.0$(a) 部材強度 $\frac{N}{N_u} + \frac{C_m}{1-N/Ne} \frac{M}{Mu}=1.0$(b) 断面強度 $\frac{N}{N_y} + \frac{M}{Mu}=1.0$(c) $\frac{M}{M_p}=1.18\left(1-\frac{N}{N_y}\right) \leq 1.0$(d) $\frac{M}{M_p}=1.1\left(1-\frac{N}{N_y}\right) \leq 1.0$(e) モーメント増幅率 $\frac{C_m}{1-N/Ne}$(f)				等価モーメント係数 $C_m=0.6+0.4M_2/M_1$(g) $C_m=0.85$(h) 有効座屈長 $\ell_e=\sqrt{\frac{\pi^2 EI}{P^*}}$(i) ここに、$P^*=\frac{ M_N-M_L + M_L }{ M_N-M_L } \cdot N$(j) P：荷重，Pu：全体強度，N，M：作用軸力，曲げ モーメント，Nu：軸方向強度，Ny：降伏軸力， Ncr：（弾性or非弾性）固有値解析による座屈軸力 Ne：オイラー座屈軸力，Mu：曲げ強度(My or Mp)， My：降伏モーメント，Mp：全塑性モーメント， M1，M2：材端モーメントMN：有限変位によるモーメント， ML：微小変位によるモーメント			

を参照)、複雑な構造物に対しては弾性固有値解析法¹⁾により行う。ℓ_eの算定において、慣用法では適用に限界があること、弾性固有値解析法では微小軸圧縮力部材のℓ_eが過大となることが問題である。

Ef法：本四に規定されているこの方法では、吊橋の塔柱が非弾性域で座屈するときに、弾性状態にあるはりの塔柱に対する回転拘束が、見かけ上大きくなることを考慮して有効座屈長を求める。このために、塔柱に対してEfを導入して固有値解析を行う。P-δ効果の導入は現行法と同じである。P-Δ効果は、有限変位解析を用いるため式(f)のNeに対するℓ_eは要素長をとる。要素分割を十分小さくすれば、式(f)の値はほぼ1になる。問題点は、大軸圧縮力部材のℓ_eは現行法よりも短く有利となるが、微小軸圧縮力部材のℓ_eは現行法よりも極端に長くなってしまふことである¹²⁾。また、柱とはりが同時に崩壊するように全応力設計された構造では、はりによる拘束が期待できないと考えられる。最近、この方法の手順を一般化して任意の変断面骨組に適用され始めている¹²⁾が、適用可能範囲について十分検討されていない。

応力拡大係数：弾性固有値解析において、微小軸圧縮力部材に対して応力拡大係数を導入して、ℓ_eが過大になる問題を改善する⁷⁾。この方法では応力拡大係数、すなわち付加軸力の決定が最も重要である。文献7)では、「全部材の強度を等しくする」、「最弱部材の強度を最大にする」という2つの決定法が示されている。しかし、この2つの概念は同じではなく、骨組全体の強度に対する影響が明確にされていない。

等価接線係数法：文献8)で提案されている方法で、このように呼称する。この設計法ではP-δ効果の導入のため、柱の耐力力曲線の逆関数式からEfを求め、固有値解析から得る座屈軸力N_{cr}(=λ・N)により、軸方向強度はNu=N_{cr}(ただし≤Ny)とする。文献8)では有限変位解析を原則とすると述べているが具体的な手順は示していない。一方、微小変位解析の場合はP-Δ効果の計算のため、Ne=1.1・N_{cr}を用いるとしている。したがってℓ_eは不要である。この方法でも、Efの算定および固有値解析に付加軸力を導入するが、それは望ましい許容軸力に一致させればよいとしている。具体的な決め方は明確ではない。この付加軸力の意味は最適設計の方法と考えれば理解できるが、骨組の全体強度に対する意味は明確でない。

λ法：文献9)で提案された方法で、Nuの算定法は等価接線係数法と同じである。ただし、付加軸力を用いずに実作用軸力を用いる。P-Δ効果は、弾性有限変位解析により考慮する。したがって、この方法でもℓ_eは不要である。この方法——等価接線係数法も同じ——ではEfを軸力の関数とし、軸力が小さいほどEfを大きく評価する。したがって、微小軸圧縮力部材のNuを過小評価する問題を解消できるとしている。しかし、各部材のP-δ効果を作用軸力の関数として与えることの合理性について十分解明されていないと考える。なぜならば、初期不整の影響には幾何学的なものも含まれるからである。

弾性2次解析法：この方法では各部材のλの差が小さい場合に、等価初期たわみが決まる着目部材と、実際に強度が決まる部材が一致しない場合がある。また、各部材のP-δ効果は座屈モードに比例して決まるとしているが、残留応力の影響も座屈モードに比例すると考えるのは近似である。

(3)有効接線弾性係数と付加軸力

表-1に示した座屈設計法で、実務に適用されているのは現行法とEf法である。その他の方法は、改善のために最近、新しく提案された方法である。固有値解析を用いた方法における改善のポイントは有効接線弾性係数Efと付加軸力の導入である。ここでは、Efと付加軸力の意味について考察する。

まず、Ef法の手順について考える。Ef法は非弾性有効座屈長だけではなく、Nu(=N_{cr})を直接算定することができる。この視点からのEf法の流れを図-2(a)に示す。ここに、K_E：剛性行列、K_G：幾何剛性行列、σ_u：柱の耐力力曲線である。NeおよびEfの定義によりN_{cr}は次式で表される。

$$Ne = \frac{\pi^2 EI}{\ell_e^2}, \quad N_{cr} = \frac{\pi^2 E f I}{\ell_e^2} \dots\dots\dots (9a, 9b)$$

したがって、次のようにして図-2(a)のステップ⑦におけるEfの修正手順が得られる。

$$E f^{(2)} = \frac{N_{cr}^{(1)}}{Ne} E = \frac{N_{cr}^{(2)}}{N_{cr}^{(1)}} E f^{(1)} \dots\dots\dots (10)$$

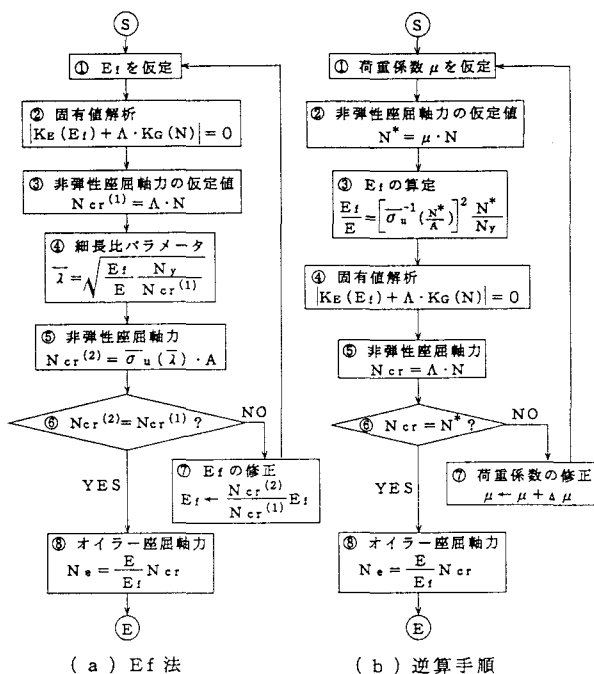


図-2 Ef 法とその逆算手順の流れ

当然であるが、Efが収束した状態ではNcrも収束しており、固有値解析から直接Nu(=Ncr)が求められていることがわかる。しかも、骨組中の各部材のNuは作用軸力に比例していることに注意すべきである。

食方はEf法と等価で、有効座屈長を用いない逆算手順が可能であることを示した¹³⁾。この流れを図-2(b)に示す。図-2(a)のステップ⑤の逆関数を求め、ステップ④の $\bar{\lambda}$ を消去することにより、図-2(b)のステップ③の関係式を得ることができる。この流れで、荷重係数を徐々に増分する手順としたのは、繰り返しの振動を避けるためである。この逆算手順により収束したNcrは、当然Ef法の結果に一致する。

次に、非弾性固有値解析を用いた等価接線係数法⁸⁾および ζ 法⁹⁾の流れを図-3に示す。 ζ 法では安全係数倍した荷重により構造解析を行うとしているが、本論文では安全率=1として扱う。これらの方法は次の2点異なる。第1に、固有値計算用軸力を前者は望ましい軸方向強度とするのに対して、後者は作用軸力とする。第2に、P- Δ 効果のためにオイラー座屈軸力を、前者は $N_e=1.1 \cdot N_{cr}$ とするのに対して、後者は弾性有限変位解析を用いるのであるからNeを弾性固有値解析から求めるのと同じ効果がある。等価接線係数法および ζ 法とも図-2の逆算手順を利用するが次の点異なる。逆算手順は荷重係数 μ を漸増しながら収束解を得るのであるから、それは各部材間の軸力分布によって決まるのに対し、これらの方法では軸力分布と、その大きさに依存して決まる。つまり、逆算手順——Ef法と等価——は曲げモーメントに関係しないのに対し、等価接線係数法および ζ 法は曲げモーメントにより軸力が制限されるとNuの評価がEf法より大きくなる。

次に、Efの導入により骨組の強度がどの部材で決まるかを検討する。骨組の各部材に作用する曲げモーメントは同じで、軸力のみが異なる場合を考える。まず、NeとNuの比を β と定義して次のように表す。

$$N_e = N_u / \beta \quad \dots \dots \dots (11)$$

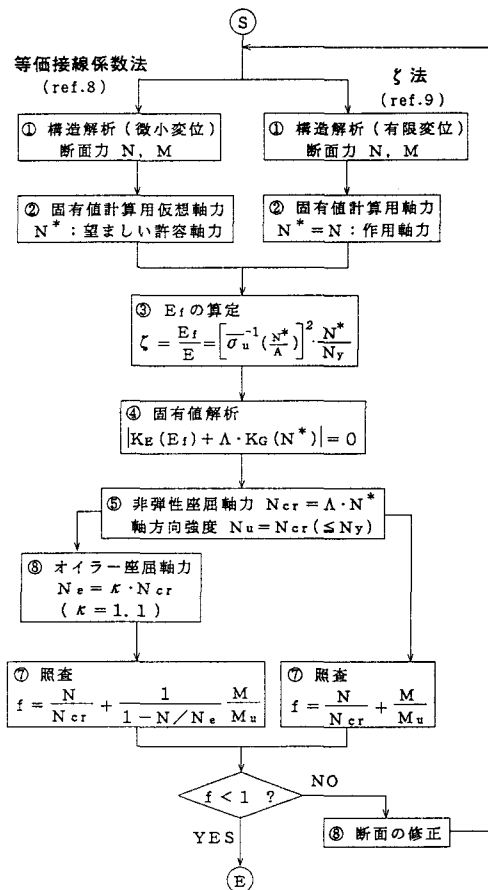


図-3 等価接線係数法・ ζ 法の流れ

これを表-1中の式(b)に代入し、Nについて解いた結果をNub：曲げが作用する場合の軸方向強度とする。

$$\frac{Nub}{Ny} = \frac{1}{2\beta} \left\{ 1 + \beta - \sqrt{(1 + \beta)^2 - 4\beta(1 - Mo/Mu)} \right\} \left(\frac{Nu}{Ny} \right) = \frac{g(\beta)}{\beta} \frac{Nu}{Ny} \dots\dots\dots(12)$$

骨組の強度は、作用軸力Nと上の軸方向強度Nubの比N/Nubが最大の部材で決まる。そこで各設計法において部材間のN/Nubの大小関係を調べる。なお計算すればわかるように、Mo/Muが一定のとき式(12)のg(β)は単調増加関数、g(β)/βは単調減少関数であることに注意する。まず、弾性固有値解析（現行法）の場合、固有値Λを用いて次の比例関係が得られる。

$$\frac{N}{Nub} \propto \frac{(\Lambda \cdot N)\beta}{Nu \cdot g(\beta)} = \frac{Ne \cdot \beta}{Nu \cdot g(\beta)} = \frac{1}{g(\beta)} \dots\dots\dots(13)$$

式(11)の定義からΛが小さいほどβが小さく、式(13)はβの単調減少関数となるから、Λが最小の部材——相対的な軸力最大の部材——のN/Nubが最大である。次にEfを導入した非弾性固有値解析の場合Nu=Ncrであるから、

$$\frac{N}{Nub} \propto \frac{(\Lambda \cdot N)\beta}{Nu \cdot g(\beta)} = \frac{Ncr \cdot \beta}{Nu \cdot g(\beta)} = \frac{\beta}{g(\beta)} \dots\dots\dots(14)$$

上式の関係からEf法の場合、Λが最大の部材のN/Nubが最大となってしまう。つまり、相対的な軸力最小の部材で全体強度が決まり、矛盾を生ずる。ただし、軸力のみ作用する場合、上式の関係はN/Nu=Λ（一定）となり全部材で同時に全体強度が決まる。ζ法の場合は定義からβ=ζであるから、Ef法と同じく軸力最小の部材のN/Nubが最大となってしまう。ただし、ζ法ではNcr>Nyの部材があるときはNu=Ny≠Ncrとするため、式(14)の比例関係がなくなり軸力最小の部材で決まらなくなる。等価接線係数法では全部材でNe=1.1・Ncrであるからβ=1/1.1で一定となり、全部材でN/Nubの値は同じになる。ただし、Ncr>Nyの部材があるときは同じにならずNcr/Nyが最大の部材で全体強度が決まる。

次に付加軸力の物理的な意味について考える。Ef法の場合、軸力の小さい部材で骨組の全体強度が決まるのは矛盾であるから、小軸力部材に付加軸力をかけて全部材が同時に限界に達するようにする。本論文では、このように全部材で式(12)の強度と作用軸力の比が等しいこと（表-1式(b)の値が等しいことと同じ）を「全部材の実効強度が同じ」と言うことにする。小軸力部材の軸力を大きくしていくと固有値Λは低下していくが、「全部材の実効強度が同じ」になった状態での全体強度は、矛盾のない部材で決まる最大値と等しくなる。弾性固有値解析にも、同様に全部材の実効強度を等しくする付加軸力を導入することができる。ただし、最大軸力部材で強度が決まっているから、小軸力部材の軸力をさらに小さくし、強度を低減させた状態で実効強度が等しくなる。したがって、Ef法では付加軸力により骨組の全体強度が小さくなるのに対し、弾性固有値解析では大きくなる。

等価接線係数法では上述のように、もともと全部材の実効強度が等しく評価されるから、この考え方による付加軸力は必要ない。ただ、望ましい許容軸力（すなわち軸方向強度Nu）に一致するように導入するとされているが、全体強度に対する考え方が明確でない。そこで本論文では、次のような等価接線係数法における付加軸力の導入法を考えた。すなわち、固有値計算用軸力N*は求められたNuに比例させるが、N*の大きさがEfの算定に影響し、固有値Λが大きく変化するため、最大のN*の大きさはその部材の実作用軸力に一致させる方法である。この付加軸力の効果があるのは、Ncr>Nyとなる部材が現れNuがNiに比例しなくなるときである。つまり大軸力部材のNuがNyで抑えられるため、小軸力部材のN*が相対的に大きくなる。

3. 数値計算による比較と考察

(1)計算の前提条件

この章で取りあげる設計法は、弾性固有値（現行法）、弾性固有値（付加軸力導入：応力拡大係数）、弾性固有値（等価モーメントを考慮）、Ef法（付加軸力無し、以下Ef法と略す）、Ef法（付加軸力導入）、等

価接線係数法（付加軸力導入），等価接線係数法（付加軸力無し，以下等価接線係数法と略す）， ζ 法，弾性2次解析法である。付加軸力は前章で述べた考え方により決める。したがって，弾性固有値およびEf法と等価接線係数法では付加軸力の考え方は異なる。また，Ef法（付加軸力），Ef法，等価接線係数法（付加軸力）および等価接線係数法における構造解析は微小変位解析とする。等価モーメント係数は，水平移動座屈に対して必ずしも正しくないが，道示により表-1の式(f)(g)を用いる。

計算に用いる骨組の断面形は，図-4に示す箱形断面とする。強度推定の例題に用いる骨組は，同図に示す諸元の断面から成る。また，断面設計の例題では板厚 $t=20\text{mm}$ を一定とし幅 b を変化させる。例題に対して，弾塑性有限変位解析により強度を求める場合は，図-4に示す残留応力と両端単純支持柱における $\ell/1000$ に等価な初期たわみを与える。道示に規定される初期たわみは部材長の $1/1000$ であるが，ここでは $\bar{\lambda}$ が同じ部材は弾性座屈強度だけでなく非弾性座屈強度も同じであるという考え方にに基づき，この様にした。なお，弾塑性有限変位解析は汎用有限要素解析プログラムMARCにより行う。各設計法における基準強度は，軸方向圧縮強度として溶接箱形断面柱に対応するECCS-b曲線，曲げ強度として全塑性モーメント M_p を用いる。

(2)強度の推定精度の比較

中間軸力を受ける片持柱：図-5の挿図に示す，先端と中間点に軸圧縮力 P_1, P_2 ，先端に曲げ M_0 を受ける片持柱の強度相関曲線を求める。柱の高さは $P_2=0$ のときに $\bar{\lambda}=0.9$ となるように $\ell=1161\text{cm}$ とする。 $P_1:P_2=1:4$ としたため，部材①②の軸力比は $N_1:N_2=1:5$ となり，部材①は部材②に比べ微小軸圧縮力部材である。

各設計法により求められた強度相関曲線を図-5に示す。また同図には，弾塑性有限変位解析により求められた相関曲線もあわせて示している。なお，弾塑性有限変位解析では $P_2=0$ のときの有効座屈長係数 $K=2.0$ を考え，先端が $\ell/500$ となる初期たわみを与えた。この図から，弾性固有値（現行法），Ef法（付加軸力），弾性2次解析法はほとんど変わらず，弾塑性有限変位解析の多少控えめな良い近似値を与えている。弾性固有値（付加軸力）は，軸力が支配的な領域で弾塑性有限変位解析よりも，わずかであるが大きくなる。Ef法では，微小軸力部材①で強度が決まってしまうため，かなり低い強度を与えている。同じく有効接線弾性係数を用いる ζ 法では，この様なことはなく部材②で強度が決まっており，現行法よりも全体に高い強度を与えている。特に軸力が支配的な領域において，弾塑性有限変位解析よりも危険側になる。これはP- Δ 効果の評価は現行法と同じであるが，曲げが作用する場合に N_u を現行法より大きく評価し， $M_0/M_p=0.2$ 以上では $N_u=N_y$ としているためである。等価接線係数法でも同じように $N_u=N_y$ としているが， ζ 法より小さく弾塑性有限変位解析の良い近似値となっている。この理由は， $N_e (=1.1 \cdot N_{cr})$ が小さ

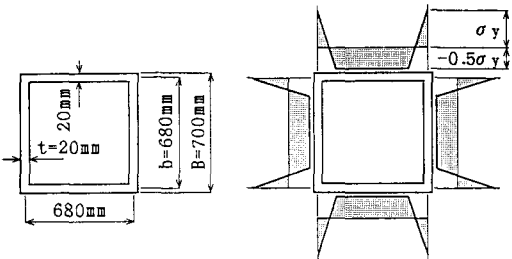


図-4 断面諸元と残留応力分布

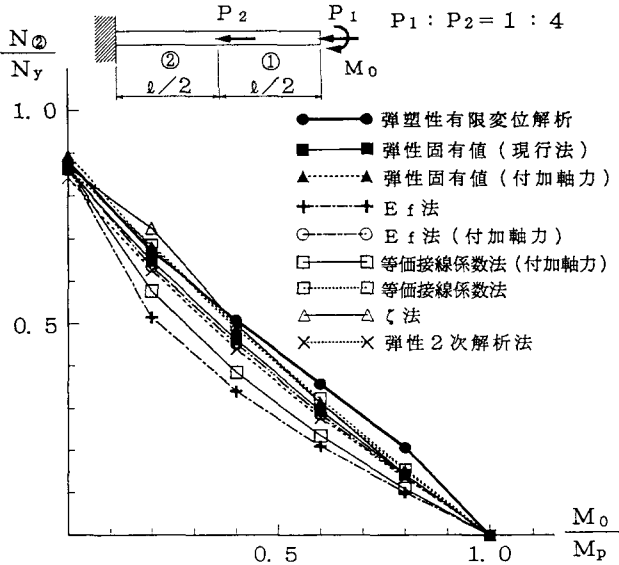


図-5 中間軸力と曲げを受ける片持柱の強度

いたためP-Δ効果を大きくするからである。等価接線係数法(付加軸力)では同様に $N_u=N_y$ であるが、固有値が小さくなるため N_e がさらに小さく、P-Δ効果を大きくするので、かなり低い強度になっている。

この例題で、付加軸力を用いないEf法の問題点を考えてみる。図-6はEf法の1～2回目の繰り返し手順におけるEfと強度の評価を、柱の耐力曲線上に表したものである。1回目の固有値解析では弾性のEを仮定するから、弾性のオイラー曲線上で各部材の強度が求められ、部材②はA点(実際にはこの図よりもずっと上方の点にある)、部材①はB点となる。そして、A,Bに対応する $\bar{\lambda}$ から部材②①の N_u がそれぞれC,D点として求められる。そこで、部材②①のEfはそれぞれ、点A,CおよびB,Dの比で修正し、2回目の固有値解析を行う。これは部材②に対してC点、部材①に対してD点を通るオイラー曲線を設定して計算することである。その結果、部材②の強度は変わらずC点、部材①の強度はE点として求められる。次の3回目は点EとFの差

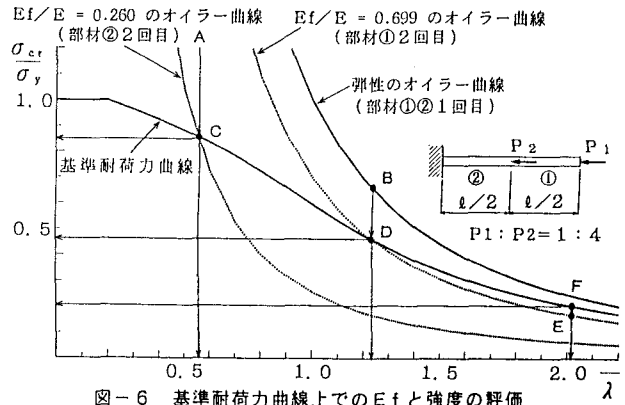


図-6 基準耐力曲線上でのEfと強度の評価

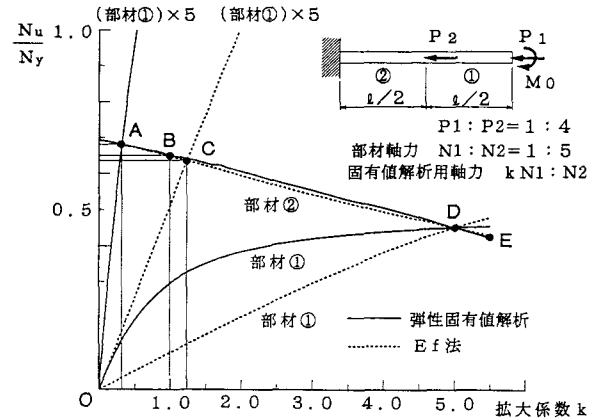


図-7 強度評価に対する付加軸力の影響

を修正して行う。この例題は静定構造物で、軸力だけを考えると強度が決まるのは、明らかに軸力が大きい部材②である。したがって、部材②の強度評価は弾性固有値とEf法で同じになる。しかし、Ef法では固有値解析から直接強度を求めるので、部材①の強度は部材間の作用軸力に比例して決まり、かなり小さくなる。すなわち、弾性固有値よりも $\bar{\lambda}$ が極端に大きくなる。

次に、この例題で付加軸力の影響について考える。図-7は弾性固有値とEf法において、部材①に与える付加軸力——作用軸力に対する拡大係数 k ——を変化させたときの、部材①②の軸方向強度の変化を示している。ただし、強度は $M_0/M_p=0.2$ として、式(12)から求めたものである。部材①②の軸力比は $N_1:N_2=1:5$ であるから、全体強度は部材②と部材①の5倍の小さい値で決まる。つまり、弾性固有値では全体強度が線OAE、Ef法では線OCEで決まる。 $k=1.0$ すなわち付加軸力がないとき、弾性固有値では部材②、Ef法では部材①で決まっている。部材②と部材①の5倍の強度を等しくする k は弾性固有値では $k=0.31$ 、Ef法では $k=1.23$ となり、このとき全体強度の評価は最大となる。したがって微小軸力部材①の強度を、 $k=1.0$ の場合よりEf法では大きくするのに対して、弾性固有値では小さくしてしまう。つまり、全部材の実効強度を等しくするという考え方による付加軸力は、Ef法に対して改善になるが弾性固有値に対しては改善にならない。

非対称鉛直力を受ける門形ラーメン：図-8の挿図に示す門形ラーメンの強度を求める。 $\alpha \ll 1.0$ とすると左柱が微小軸圧縮力部材となる。この例題では、はりに圧縮力は生じない。柱の高さは $\alpha=1.0$ のとき、柱が $\bar{\lambda}=0.9$ となるように $h=997.7\text{cm}$ とした。弾塑性有限変位解析で与える初期たわみは、 $\alpha=1.0$ のときの有効座屈係数 $K=2.328$ を考慮して柱の上端で $h/430$ とした。

$\alpha=1.0, 0.25, 0.04, 0.0$ の4ケースに対して、各設計法により求められた強度を図-8に示す。Ef法は弾性固有値に比べ、全体に高い強度を与えている。 $\alpha=1.0$ のときの差は小さいが、 $\alpha<1.0$ のときの差はかなり大き

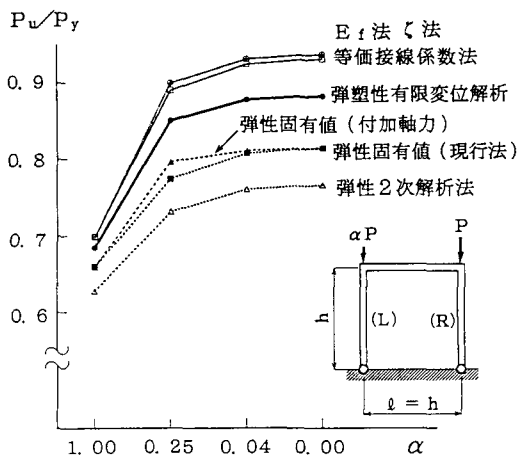


図-8 非対称鉛直力を受ける門形ラーメンの強度

い、これは次の理由によると考える。 $\alpha=1.0$ のとき Ef 法は、はりの曲げ剛性 EI を柱より大きくし、柱端の回転をより拘束するためである。 $\alpha < 1.0$ では、この回転拘束に加え左柱の曲げ剛性を右柱より大きくすることにより、右柱の側方移動を拘束するためである。このような拘束作用は当然、弾塑性有限変位解析でも起こるはずである。しかし、Ef 法が弾塑性有限変位解析よりも高くなるのは、非対称荷重による曲げモーメントの影響と考えられる。つまり、有限変位解析では非対称鉛直力により曲げモーメントが発生し、さらに初期たわみを考慮すると強度に対し無視できない影響を及ぼすと考えられる。しかし、固有値解析ではこのことが考慮されないからである。以上のことから Ef 法は、軸方向荷重が対称の場合に限定するべきである。この例題では軸力のみ作用するため、Ef 法において左右の柱の実効強度は等しくなり付加軸力は必要としない。また、軸力のみ作用する場合には等価接線係数法、 ζ 法は Ef 法と同じ結果を与える。

弾性 2 次解析法による強度は、弾塑性有限変位解析の強度に対して $\alpha < 1.0$ の場合にかなり安全側になる。この例題は 1 次不静定構造であるが、 $\alpha=1.0$ のときは左右の柱が同じ過程で崩壊する。しかし $\alpha < 1.0$ の場合、左柱が右柱を拘束するように働くので、ある断面がその強度に達した時を骨組の全体強度とする弾性 2 次解析法との間には余剰耐力が生じる。

非対称鉛直力と水平力を受ける門形ラーメン：上記の例題で、左柱上端に水平力を加えた場合の強度を求める（図-9 参照）。水平力の大きさは $H/H_y=0.2$ ($H_y=2My/h$ ：水平力のみ作用するときの初期降伏荷重) とする。水平力により、はりに微小な軸圧縮力が作用するとともに、左柱に引張力、右柱に圧縮力が作用する。すなわち鉛直力みの状態に比べ、左柱の圧縮力はさらに小さくなり、右柱の圧縮力は大きくなる。

Ef 法は極端に低い強度を与えている。これは微小軸力部材である、はりで強度が決まるためである。ところが Ef 法に付加軸力を導入すると、かなり高い強度になってしまう。この理由は「非対称鉛直力を受ける門形ラーメン」で述べたのと同じである。等価接線係数法は弾塑性有限変位解析に対して、 $\alpha=1.0$ のときわずかに危険側になるが、その他は安全側の良い近似値を与えている。しかし、付加軸力を導入すると固有値が低下するために、かなり低い強度になる。ところが $\alpha=0.0$ では左柱が引張りとなり、この部材に付加軸力を導入しないために固有値が増大し強度が急に高くなる。 ζ 法は Ne の評価方法が異なるため、等価接線係数法より高い強度を与え、全体に弾塑性有限変位解析よりも危険側となっている。弾性固有値による強度は、鉛直力のみ受ける例題に比べ、弾塑性有限変位解析に対する安全度は大きくなり、精度が変化している。そこで表-1 の式 (g) で定義される等価モーメントを考慮すると強度は高くなる。ただし $\alpha < 1.0$ のケースでは断面強度（表-1、式 (c)）により決まっている。また、弾性固有値に付加軸力を導入したものは強度をさらに高く

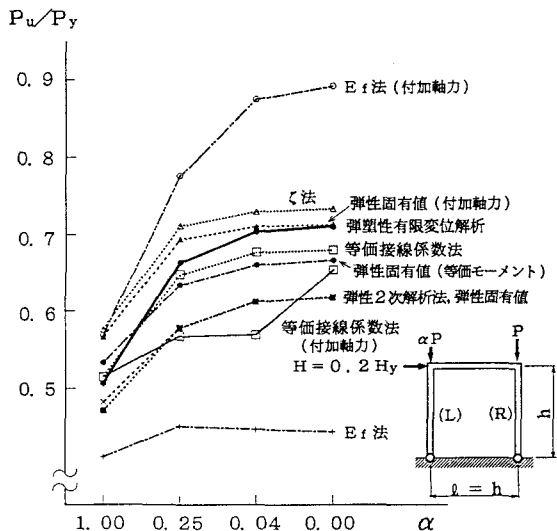


図-9 非対称鉛直力と水平力を受ける門形ラーメンの強度

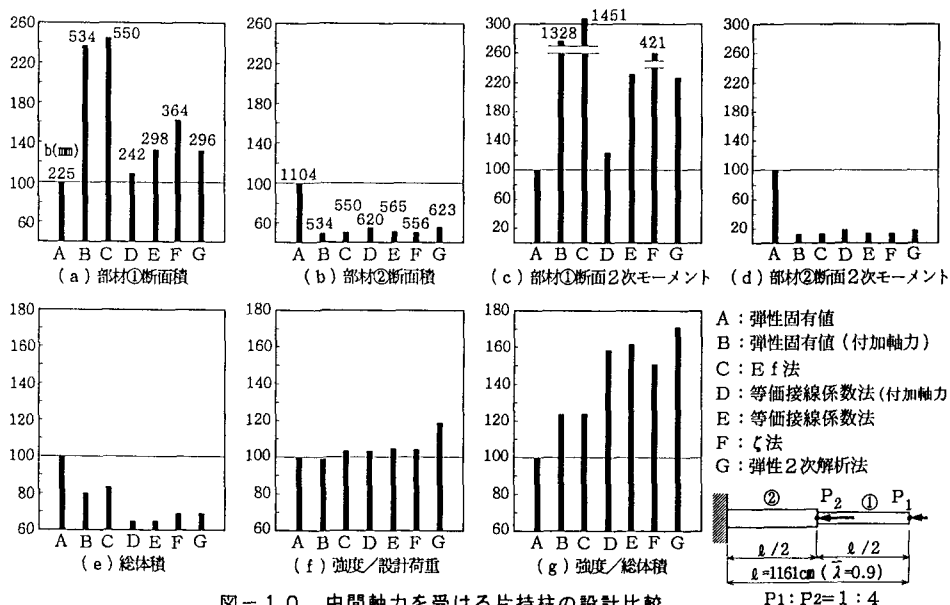


図-10 中間軸力を受ける片持柱の設計比較

し、弾塑性有限変位解析より危険側になる。弾性2次解析の結果が安全側になっているのは、「非対称鉛直力を受ける門形ラーメン」で述べたのと同じ理由である。

(3) 設計の最適性の比較

先端と中間に軸力のみを受ける片持柱：前述の強度推定の例題に用いたのと同じ片持柱を、各手法により設計する。ただし、安全率は $\nu=1$ とする。断面は中間点で変化させ、部材①②の2断面とする（図-10の挿図参照）。設計荷重は、 $P_1=170 \times 10^3 \text{ kg}$, $P_2=680 \times 10^3 \text{ kg}$ である。また、設計開始時の仮定断面の幅は部材①②とも $b=680 \text{ mm}$ とし、仮定断面と設計断面が一致するまで繰り返した。そして、設計された構造物に対して弾塑性有限変位解析を行い、その強度を求めた。設計結果を図-10にまとめている。図では弾性固有値（現行法）による結果を100として、他の設計法による結果を比で表している。ただし、強度/設計荷重だけは、そのままの比率(%)で表している。また、断面積の比較図の中に断面幅 b の数値を示している。

この例題では軸力のみ作用するので、Ef法では全部材の N/N_u が等しい。したがって部材①②の断面比は最初の仮定から変化せず同じとなった。この例題に対するEf法では付加軸力が必要ないので示していない。また、弾性固有値（付加軸力）も、付加軸力の考え方から部材①②は等断面となっている。軸力の大きい部材②の断面は、弾性固有値のみが極端に大きく、他はほぼ同じである。設計が完了した時点で各部材の強度は作用軸力に一致しているが、弾性固有値の場合は次の関係が成り立っている。全部材で $N/N_u=1$ であるから、固有値 Λ によって $\Lambda \cdot N/N_u = \Lambda \cdot N_e/N_u$ は一定である。 N_e, N_u とも $\bar{\lambda}$ の単調減少の関数であるから、この関係が成立するために全部材の $\bar{\lambda}$ は等しくなければならない。部材①②が同一の $\bar{\lambda}$ で設計を満足するために、部材②の $\bar{\lambda}$ は大きく、他の設計法より大きな断面となる。一方、軸力の小さい部材①の断面は設計法により異なり、部材①②が等断面であるEf法、弾性固有値（付加軸力）が大きい。逆に小さいのは、弾性固有値、等価接線係数法である。体積で小さいのは、等価接線係数法、弾性2次解析法、 ζ 法の順である。

強度/設計荷重では弾性固有値（付加軸力）と等価接線係数法（付加軸力）が、わずかに危険になる他は安全な設計になっている。ただ、弾性2次解析法のみが多少安全すぎる。弾性2次解析法では、はり一柱により等価初期たわみ算定式を決めているが、この部材長で軸力のみ作用する場合は安全側になる。したがって、等価初期たわみ算定式に改善の余地がある。強度/体積は設計の最適性を表すひとつの指標である。これは

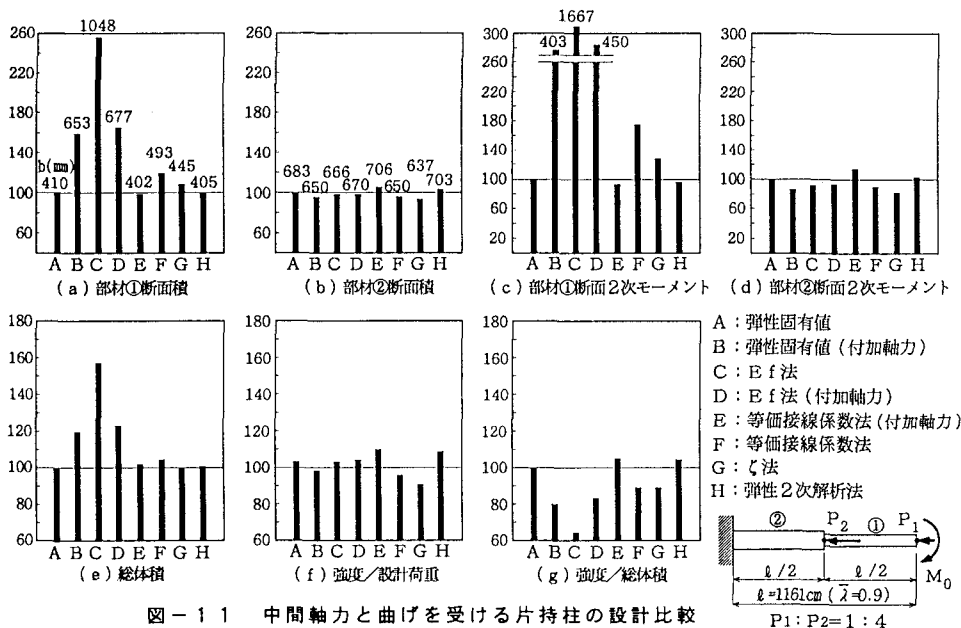


図-1-1 中間軸力と曲げを受ける片持柱の設計比較

弾性2次解析法が最も高く、少ない体積で強度を高くするための部材①②の断面配分が適切であると考えられる。この例題で各設計法を評価すると、等価接線係数法、弾性2次解析法、 ζ 法の順に良いと考える。

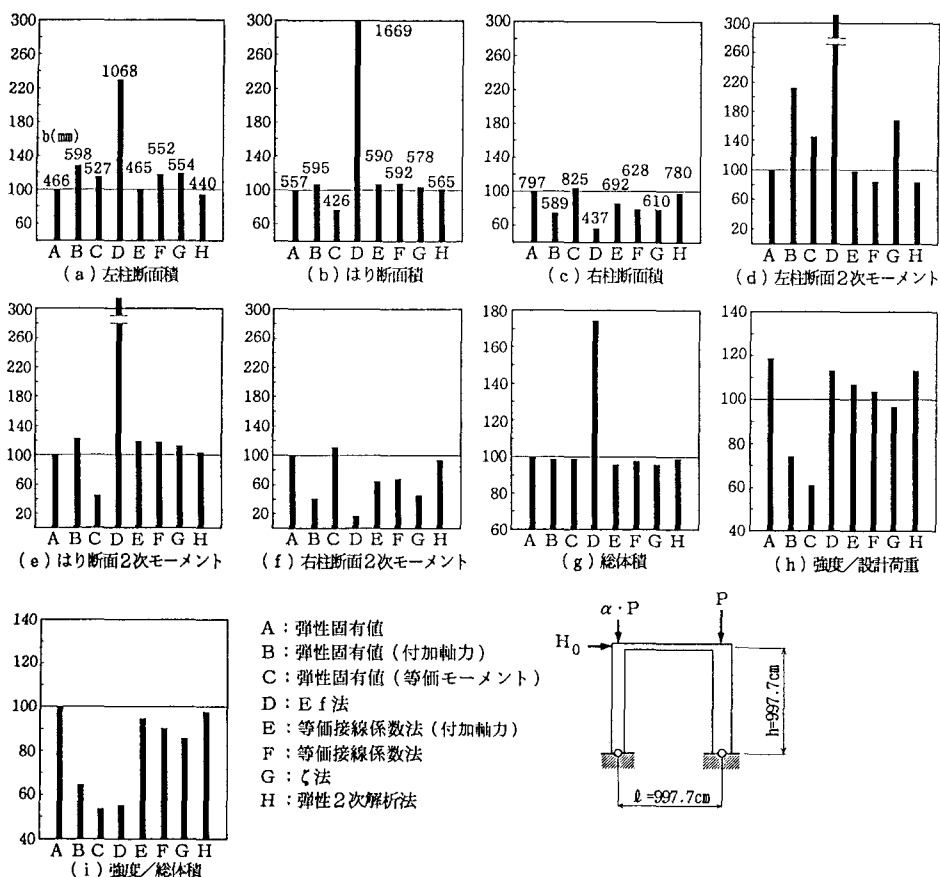
先端に軸力と曲げ、中間に軸力のみを受ける片持柱：上述の設計例題に曲げモーメントを加える（図-11の挿図参照）。設計荷重は、 $P_1=170 \times 10^3 \text{kg}$, $P_2=680 \times 10^3 \text{kg}$, $M_0=5.755 \times 10^6 \text{kg} \cdot \text{cm}$ ($b=680\text{mm}$ の断面の0.2My)である。その他の条件は上述の例題と同じである。

設計結果を図-11に示す。軸力の大きい部材②の断面に大きな差はないが、等価接線係数法（付加軸力）と弾性2次解析法が多少大きい。また弾性固有値（付加軸力）、等価接線係数法および ζ 法が、多少小さい断面を与えている。一方軸力の小さい部材①の断面では、Ef法がかなり大きい断面となっている。これは強度推定の例題で述べたように、Ef法では曲げが作用すると小軸力部材で全体強度が決まってしまうからである。Ef法に付加軸力を導入すると改善されるが、部材②とはほぼ同じ断面となるだけで、それ以上の改善にはならない。部材①②が等断面となる理由は先に述べた。弾性固有値（付加軸力）も、やはり等断面となっている。体積では等価接線係数法が最も少なく、弾性固有値、等価接線係数法（付加軸力）、 ζ 法および弾性2次解析法がほぼ同じで、Ef法などに比べ小さい。

強度/設計荷重では、弾性固有値（付加軸力）、等価接線係数法および ζ 法が危険側となっている。等価接線係数法と ζ 法がかなり危険側になるのは、軸力が支配的で曲げが少し作用する場合に危険側の強度評価をするためである。また、この例題では曲げが作用するため、弾性2次解析法で設計された部材の強度は上述の例題に比べ、多少設計荷重に近づいている。強度/体積は等価接線係数法（付加軸力）と弾性2次解析法がほぼ同じで、他に比べ高い。この例題で各設計法を評価すると、等価接線係数法（付加軸力）、弾性2次解析法、および弾性固有値が良いと考える。

非対称鉛直力と水平力を受ける門形ラーメン：前述の強度推定に用いた例題の門形ラーメンを、各手法により設計する。左右の柱およびはりで1つの断面を決め、各部材の中間で断面変化はしないことにする（図-12の挿図参照）。設計荷重は $P=680 \times 10^3 \text{kg}$, $\alpha P=170 \times 10^3 \text{kg}$ ($\alpha=0.25$), $H_0=11875 \text{kg}$ ($=0.2H_y$; $H_y=2My/h$: H_0 のみ作用するときの初期降伏荷重)とする。

設計結果を図-12に示す。付加軸力を導入したEf法は設計不能となってしまったので、結果を示していな



図－1 2 非対称鉛直力と水平力を受ける門形ラーメンの設計比較

い。1回目の設計断面を用い2回目の計算を行うときに、付加軸力を導入する過程で軸力が非常に小さいはりで、 $N/Ncr > 1$ および $N/Ne > 1$ となってしまったからである。微小軸力部材であるはりの断面面積は、弾性固有値（等価モーメント）およびEf法を除いて余り変わらない。弾性固有値（等価モーメント）は等価モーメントを小さくするので小さい断面となっており、Ef法では小軸力部材の強度を低くするので大きい断面を与えている。一方、左右の柱は設計法によりかなり異なっている。まず左柱では、小軸力部材であるためEf法がかなり大きい他、弾性固有値（付加軸力）、ζ法、弾性固有値（等価モーメント）が大きな断面を与えている。左柱で小さい断面を与えているのは、弾性2次解析法と等価接線係数法である。次に右柱では、他の部材とは逆にEf法が最も小さい断面となっている。弾性固有値（付加軸力）およびζ法も左柱の場合とは逆に、比較的小さい断面を与えている。以上の結果を体積で比較すると、Ef法が極端に大きくなっている。他は余り変わらないが、等価接線係数法（付加軸力）、等価接線係数法およびζ法がわずかに小さい。

強度/設計荷重では弾性固有値（等価モーメント）、弾性固有値（付加軸力）およびζ法が危険側になっている。弾性固有値（等価モーメント）がかなり危険になっているのは、はりの断面2次モーメントが小さく、柱に対する拘束が効かないためである。弾性固有値（付加軸力）とζ法では、右柱が小さい断面で設計されているためである。強度/体積は弾性固有値、弾性2次解析法、等価接線係数法および等価接線係数法（付加軸力）が高い値となっている。この例題で各設計法を評価すると、弾性固有値、等価接線係数法（付加軸力）、等価接線係数法および弾性2次解析法が良いと考える。

4. ま と め

鋼骨組構造物の座屈設計法を、強度推定・断面設計の両面から比較した結果から次のような評価ができる。
弾性固有値解析（現行法）：強度推定・設計の両方において安全側であり、それほど悪くない。しかし、場合によって強度推定精度、設計の最適性にばらつきが有ると考えられる。

Ef法：この方法を一般化して、微小軸力部材が有る場合や非対称荷重が作用する場合に適用するべきではないと考える。軸力がほぼ一定で左右均等に作用する吊橋主塔のような場合に限定した方がよい。

付加軸力：上記の現行法に付加軸力を導入すると現行法より強度が高くなる。また、本論文で用いた「全部材の実効強度を同じにする」という付加軸力の考え方は、設計の意味をなくする。

と法：軸力が支配的で曲げが少し作用する場合に危険側となる。

等価接線係数法：微小変位解析による方法を検討した。付加軸力を用いない方法は危険側になる場合もある。しかし付加軸力を用いると、設計問題は良い結果が得られた。この方法で用いた「固有値計算用軸力は部材強度に比例（付加軸力）」や、「 $N_e=1.1N_{cr}$ 」は、設計された構造物において初めて意味を持つものかもしれない。限られた例題で妥当性を示すために、この意味を論理的に説明することが今後の課題と考える。

弾性2次解析法：強度推定・設計の両面において安全側になっており、微小軸圧縮力部材に対する問題も改善されている。本論文で取りあげた設計法の中では、最も信頼性が高いと考えられる。

設計法を評価する際に、本論文で取りあげた信頼性・有利性の他に、使用性——簡便で計算量が少ないこと——も考慮しなければならない。傾向としては、Ef法と付加軸力法が収束のために多くの繰り返しを必要とすることがわかったが、詳細については別途検討の上、報告したいと考えている。

参 考 文 献

- 1) 西野文雄・三木千寿・鈴木篤：道路橋示方書Ⅱ鋼橋編一改訂の背景と運用，13章ラーメン構造，橋梁と基礎，1981年10月
- 2) 宇佐美勉：鋼骨組構造物の座屈設計法の問題点，第1回SGST拡大研究会論文集，東海構造研究グループ，pp.107-120，平成3年11月
- 3) 小村敏，高野晴夫，和田克哉，富田昇，恵谷舜吾，小泉幹男：横浜港横断橋上部工の設計（上），橋梁と基礎，pp.2-11，1988年12月
- 4) 宇佐美勉：鋼ラーメン構造物の合理的設計式の一提案，土木学会論文集，No.404/I-11，pp.331-340，1989.4
- 5) 長谷川彰夫，西野文雄：線形化有限変位理論による構造物の設計法の提案，土木学会第44回年次学術講演会，pp.108-109，平成元年10月
- 6) 織田博孝，宇佐美勉，尾島一博：弾性2次解析法を用いた変断面骨組の座屈設計における等価初期たわみの算定法，土木学会第48回年次学術講演会，pp.108-109，平成5年9月
- 7) Nisino,F. and Attia,W. : A Proposal for in-plane stability design of steel framed structures, *Proc. of JSCE*, No441/I-18, pp.1-10, 1992.1
- 8) 倉方慶夫，西野文雄，長谷川彰夫，梶田順一：骨組構造物の座屈設計法に対する一提案，土木学会論文集，No.459/I-22，pp.73-82，1993.1
- 9) 野上邦榮：鋼ラーメン柱の実用的座屈設計法に関する一提案，土木学会論文集，No.459/I-22，pp.159-162 1993.1
- 10) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説，Ⅱ鋼橋編，丸善，平成2年2月
- 11) 本州四国連絡橋公団：吊橋主塔設計要領・同解説，1989年4月
- 12) 野上邦榮：ラーメン柱の有効座屈長算出法に関する一考察，構造工学論文集，Vol139A，pp.199-209，1993年3月
- 13) 倉方慶夫，西野文雄，長谷川彰夫：骨組構造物における現行の座屈設計法の問題点（上），橋梁と基礎，pp.19-27，1992年2月
- 14) 鈴木亘，堀井秀之，山口栄輝，西野文雄：線形化有限変位解析による有効座屈長の算定，構造工学論文集，Vol138A，pp.181-188，1992年3月
- 15) 尾下里治・吉田昭仁：高次の座屈固有値を用いた有効座屈長の決定法，土木学会第47回年次学術講演会，pp.248-249，平成4年9月
- 16) 織田博孝，宇佐美勉：弾性2次解析を用いた骨組構造物の強度評価と設計，第2回SGST拡大研究会論文集，東海構造研究グループ，pp.107-122，平成5年12月

（1993年9月16日受付）