

鋼素材に対する修正二曲面モデルの一般定式化

A GENERAL FORMULATION OF MODIFIED TWO-SURFACE MODEL FOR STRUCTURAL STEELS

水野英二* 沈 赤** 宇佐美勉***

By Eiji MIZUNO, Chi SHEN, and Tsutomu USAMI

A modified two-surface model is recently developed so as to predict the cyclic behavior of structural steels with yield plateau under cyclic loadings, by extending the original Dafalias-Popov two-surface model. In the present paper, firstly, the modified two-surface model under a uniaxial stress state is briefly explained, with respect to (a) elastic range, (b) accumulated effective plastic strain (A.E.P.S.), (c) yield plateau, (d) shape parameter, (e) the memory lines and the virtual bounding lines, and (f) the bounding line slope. Secondly, the model parameters related to A.E.P.S. are extended to those under multi-axial stress state. Thirdly, the general incremental stress-strain relationship is derived in some detail for a direct use in the finite element analysis. Finally, in order to demonstrate the present model capability, some numerical examples are shown under uniaxial cyclic strain range and biaxial cyclic non-proportional strain range.

Key Words: constitutive model, two-surface model, cyclic plasticity, structural steels

1. 緒言

繰返し多軸応力状態にある構造用鋼材の弾塑性履歴挙動 (Bauschinger 効果など) は、移動硬化則、移動硬化則と等方硬化則とを組み合わせた複合硬化則などを有する塑性力学モデルによって、ある程度の精度で再現されうる。代表的な繰返し塑性力学モデルとしては、Mroz¹⁾、Iwan²⁾、Popov³⁾らによる多曲面モデル (Multi-Surface Model)、Dafalias・Popov⁴⁾、Tseng・Lee⁵⁾による二曲面モデル (Two-Surface Model) が挙げられる。しかし、多くの場合、降伏棚を有する鋼材の降伏棚域での繰返し変形特性がそれらモデルパラメータに反映されていないため、地震力などによって生ずる低ひずみ域での鋼構造部材の繰返し変形挙動の予測には、それらモデルの硬化則では不十分であった。このため、筆者らは、機械構造用鋼材 S20C (降伏棚なし)、一般構造用鋼材 SS400 (降伏棚あり) および溶接構造用鋼材 (SM490 および SM570) の一軸引張・圧縮繰返し実験結果を基に、Dafalias・Popov の二曲面モデル⁴⁾を検討し、修正二曲面モデル^{6)~9)}を提案した。筆者らの修正二曲面モデルは、Dafalias・Popov による二曲面モデルの基本的な考え方を変えることなく、従来の降伏曲面および境界曲面に加え、仮想境界曲面および記憶曲面などを導入することにより、降伏棚を有する鋼素材の一般応力状態での繰返し挙動を予測することを目的とした塑性力学モデルである。

* Ph. D. 名古屋大学・助教授 工学部土木工学科 (〒464 名古屋市千種区不老町)
 ** 工博 埼玉大学・助手 工学部建設工学科 (〒338 浦和市下大久保255)
 *** D.Sc. 工博 名古屋大学・教授 工学部土木工学科 (〒464 名古屋市千種区不老町)
 注) この論文は、「土木学会論文第471号 / I-24, pp. 23-33」に連載されたものを和訳・再吟味し、修正加筆したものである。

本修正二曲面モデルはDafalias・Popovモデルに対して、以下のような項目の修正・追加を行っている。

- (a) 降伏曲面の大きさ
- (b) 累積相当塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}^p$ の定義
- (c) 降伏棚の消失
- (d) 形状パラメータ
- (e) 記憶曲線および仮想境界曲面の導入
- (f) 境界曲面の大きさおよび傾き

さらに、一軸引張・圧縮試験用のMTS810試験機（最大容量25 tonf）を用いた、新しいねじり実験装置を開発して、JIS G3466-1988一般構造用角形鋼管（50×50×3.2 mm）の繰返しねじり・圧縮実験¹⁰⁾を行い、二次元応力状態での精度の良い実験データを得た。この実験データと修正二曲面モデルによる数値シミュレーション結果とを比較することによって、二軸応力状態下での修正二曲面モデルの有効性を確認した。

本論文では、まず、筆者らが開発した修正二曲面モデルの一軸応力状態での概要を説明し、つづいて、有限要素法などによる数値解析に必要な一般応力状態での鋼素材の応力増分-ひずみ増分関係式の一般定式化を示す。さらに、漸増型対称・非対称繰返しひずみ経路および一定ひずみ幅繰返し経路を対象として、本提案モデルによる鋼素材の一軸応力繰返し挙動のシミュレーション結果を紹介する。また、他の研究者による二軸ひずみ状態での非比例繰返し载荷に対する解析結果と本モデルによる予測結果とを比較することにより、修正二曲面モデルの予測性能を例証する。

2. 一軸応力状態での修正二曲面モデル

以下に、筆者ら^{7)~9)}が行ったDafalias・Popovの二曲面モデルの修正箇所の概要を述べる。

2.1 接線塑性係数

塑性域まで繰返し応力を受ける鋼素材の一軸状態での応力 σ - 塑性ひずみ ε^p 曲線は、図-1 に示すように、一般に、塑性ひずみが生じない弾性域（例えば図中、OA）、非線形な塑性域（AC）、さらに定常状態の塑性域（CX）に分けることができる。

弾性域および定常状態の塑性域での鋼素材の挙動は、それぞれ弾性係数 E および定常状態の塑性係数 E_0^p （= 応力増分 $d\sigma$ / 塑性ひずみ増分 $d\varepsilon^p$ ）を用いて、一次関数で容易に表現できる。従って、Dafalias・Popov の二曲面モデルは、これら両領域間（遷移領域）の非線形曲線の接線塑性係数 E^p を定義することに帰着する。この場合、弾性域から塑性域へと移行する時点の応力点（例えば、図中のD点）と境界線 YY' との距離 δ_{in} 、現応力点と境界線 YY' との距離 δ 、形状パラメータ h 、さらに、定常状態の塑性係数 E_0^p を用いることにより、塑性係数 E^p を決定している。本研究では、Dafalias・Popovによる接線塑性係数 E^p と同様な式を用いた。

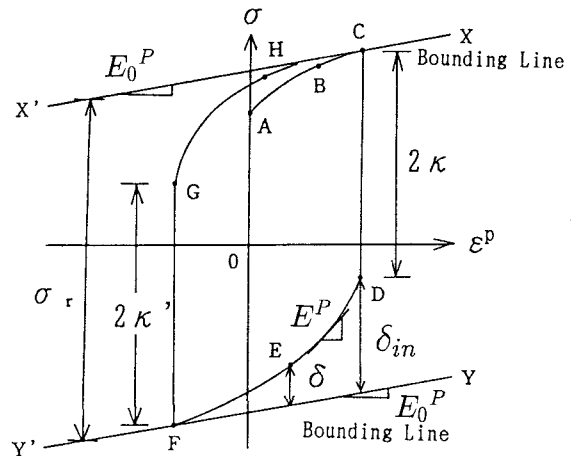


図-1 一軸応力状態での応力-塑性ひずみ曲線

$$E^P = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^P} = E_0^P + h \frac{\delta}{\delta_{in} - \delta} \quad (1)$$

ここで、 h は形状パラメータと呼ばれ、曲率の度合いを表す。式(1)の定常状態での塑性係数 E_0^P の詳細は、2.5節で説明する。

2.2 累積相当塑性ひずみの増加に伴う弾性域の減少

皆川ら¹¹⁾が定義した累積相当塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}^P$ を用いて、弾性域の大きさ(半径: κ)の減少を次式の指数関数で表現した。

$$\frac{\kappa}{\kappa_0} = \alpha - a \cdot \exp(-b \bar{\varepsilon}^P \times 100) - (\alpha - a - 1) \exp(-c \bar{\varepsilon}^P \times 100) \quad (2)$$

ここで、 κ_0 は初期の弾性域の大きさ ($2\sigma_y$) ; a , b , c , および α は、最小二乗法より決定される、各種鋼材に固有なパラメータである。

図-2に示すように、累積相当塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}^P$ を一軸応力状態での塑性ひずみ履歴において、引張・圧縮両側で過去最大の塑性ひずみを越えた塑性ひずみ増分 $d\varepsilon^P$ を合計した量(積分量)として定義する。すなわち、

$$\bar{\varepsilon}^P = \bar{\varepsilon}_t^P + \bar{\varepsilon}_c^P \quad (3)$$

ここで、 $\bar{\varepsilon}_t^P$ および $\bar{\varepsilon}_c^P$ は、それぞれ引張側および圧縮側での過去最大塑性ひずみ(正值)である。

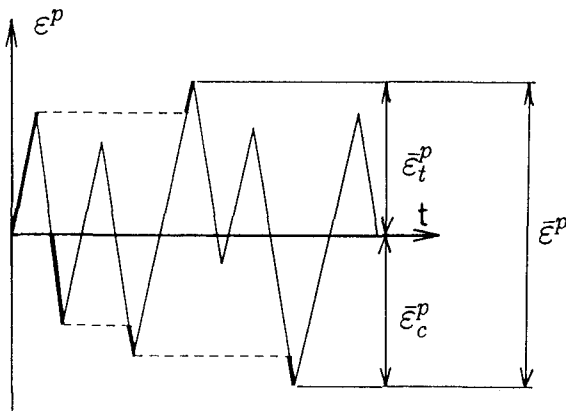


図-2 累積相当塑性ひずみの定義

2.3 降伏棚の消失

筆者ら⁶⁾が行ったSS400鋼材の一軸引張・圧縮繰り返し試験結果より、降伏棚が消失する時点までの累積塑性仕事量 $W^P (= \int \sigma d\varepsilon^P)$ と累積相当塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}^P$ との間には、次のような関係があることが分かった。

$$\frac{\bar{\varepsilon}^P}{\varepsilon_{s,t}^P} - 1 = M \cdot \left(\frac{W^P}{W_{s,t}^P} - 1 \right) \quad (4)$$

ここで、 M は、最小二乗法より決定される、各種材料に固有なパラメータであり、 $\varepsilon_{s,t}^P$ は単調載荷時のひずみ硬化開始時の相当塑性ひずみ、 $W_{s,t}^P$ は単調載荷により鋼材の硬化が開始するまでの塑性仕事量 ($= \sigma_y \cdot \varepsilon_{s,t}^P$) を示す。

上式(4)を用いて、鋼材の応力が降伏応力 σ_y に達した時点で、その後の挙動が硬化を示すか否かを判断する。すなわち、応力状態が降伏応力 σ_y に達した時点での $(W^P/W_{s,t}^P, \bar{\varepsilon}^P/\varepsilon_{s,t}^P)$ が、式(4)で表される直線の上側に位置すれば硬化を開始し、応力-ひずみ曲線は境界線に漸近する。そうでないならば、さらに降伏棚上を動くことと仮定した。

2.4 形状パラメータ h

SS400鋼材に対する実験結果(文献6の実験SS41-D:除荷から負荷までの1ループ曲線)を基に、現応力点と境界線までの距離 δ と形状パラメータ h との関係を調べた結果、 δ の値が増加するに伴って、 h は線形的に増加する傾向にあることが分かった。形状パラメータ h を距離 δ の一次関数として定義した。

$$h = e \cdot \delta + f \quad (5)$$

ここで、 e および f は、最小二乗法より決定される、各種材料に固有なパラメータである。

2. 5 境界線の移動

修正二曲面モデルでは、引張・圧縮両領域に位置する境界線間の距離（半径）および傾きは、累積相当塑性ひずみ量 $\bar{\varepsilon}^p$ によって、それぞれ、拡大および減少すると仮定した。境界線半径 $\bar{\kappa}$ を累積相当塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}^p$ の関数として、次式で定義した。

$$\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_0 + (\bar{\kappa}_0 - \bar{\kappa}_\infty) \exp[-\zeta (\bar{\varepsilon}^p)^2 / 4] \quad (6)$$

ここで、 $\bar{\kappa}_0$ ：初期の境界線半径、 ζ ：定数、 $\bar{\kappa}_\infty$ ：引張強度 σ_u である。

一方、式（1）の境界線の傾き E_{0i}^p を次のような累積塑性仕事 W^p の関数とした。

$$E_{0i}^p = \frac{E_{0i}^p}{1 + \omega W^p} \quad (7)$$

ここで、 ω は各種鋼材に固有な定数、 E_{0i}^p は初期の境界線の傾きである。モデルパラメータ、 $\bar{\kappa}_0$ 、 ζ 、 ω 、および E_{0i}^p の決定については、2. 7節にその概略を記述する。

2. 6 仮想境界線と記憶線の導入

2. 5節までの修正点を取り入れた二曲面モデルでは、一軸繰り返し载荷の予測を行う際、再载荷時（引張側の境界線に漸近するあたり）での予測曲線が実験曲線と比較して早く曲がり始める場合がある。この原因としては、除荷曲線における δ_{1n} と再载荷曲線における δ_{1n} と比較すると、再载荷曲線における δ_{1n} の方が小さく、これにより再载荷曲線の方が早く境界線に漸近するためである。この点を修正するため、以下に説明する、記憶線と仮想境界線とを新たに導入した。

初期の記憶線は、境界線と同様な傾きを有し、初期降伏応力 σ_y を通るように設定される。図-3に示すように、応力が初期降伏応力 σ_y を越えて点Aまで増加するに伴い、記憶線 $X_m X'_m$ も応力点とともに移動する。この場合、引張側の記憶線 $X_m X'_m$ および圧縮側の記憶線 $Y_m Y'_m$ は境界線 XX' （または YY' ）に平行、かつ境界線 XX' と YY' の中間線（中心線） $O_x O'_x$ に関して対称に位置すると仮定する。なお、記憶線は、材料がこれまでの载荷履歴の中で受けた最大応力点を通るように設定されるため、応力点が既存の記憶線の中を移動する限り記憶線は更新されない。

図-3の除荷曲線AB上の点Bで再载荷される場合、仮想境界線 $X_v X'_v$ は、記憶線 $Y_m Y'_m$ と再载荷開始点Bまでの距離 δ_v を用いて、引張側の境界線 XX' より距離 δ_v 上方に設定される。よって、仮想境界線 $X_v X'_v$ の半径 $\bar{\kappa}_v$ は $(\bar{\kappa} + \delta_v)$ となる。応力-ひずみ予測曲線は、図中の曲線BCに示されるように、仮想境界線 $X_v X'_v$ に漸近していく。このとき、曲線BCでの接線塑性係数 E^p は、次式を用いて表される。

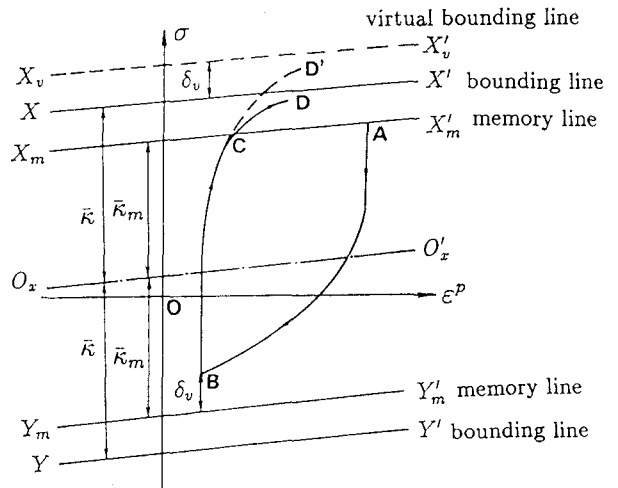


図-3 記憶線を伴った仮想境界線の定義

$$E^p = E_0^p + h \frac{\delta + \delta_v}{(\delta_{in} + \delta_v) - (\delta + \delta_v)} \quad (8)$$

しかし、応力-ひずみ曲線が記憶線 XX' を越えると、曲線 CD で示されるように、応力-ひずみ曲線は境界線 XX' に漸近していくと仮定する。このとき、曲線 CD 上での接線塑性係数 E^p は、式 (1) を用いて表される。

2. 7 モデルパラメータの決定に必要な実験とその決定方法

本提案モデルに含まれるモデルパラメータは 11 個である。

(a) 弾性域の減少を表すパラメータ a , b , c , α

必要となる実験は、降伏棚からひずみ硬化域にいたる約 2.5% までのひずみ領域で約 0.05% ひずみごとに負荷・除荷を繰り返す実験である。これは、弾性域終了点（塑性開始点）まで除荷を行った後、再び載荷するという片側引張サイクル載荷実験である。弾性域の大きさ κ と累積相当塑性ひずみ $\overline{\varepsilon}_p$ との関係を用いて、非線形最小二乗法マルカート法により、式 (2) のパラメータ a , b , c , α を決定する。

(b) 降伏棚の減少を表すパラメータ M

必要となる実験は、少なくとも 5% ひずみまでの単純引張試験と、降伏棚域からひずみ硬化域へと移行する応力-ひずみ曲線が見られるような繰り返し実験である。ひずみ硬化開始点までの塑性仕事量 W_p と累積相当塑性ひずみ $\overline{\varepsilon}_p$ を求め、これらデータを用いて最小二乗法により、式 (4) のパラメータ M を決定する。

(c) 境界線半径を表すパラメータ $\overline{\kappa}_0$ および ω

必要となる実験は、1 サイクル載荷実験である。すなわち、引張側の 5% 塑性ひずみ領域まで載荷し、さらに圧縮側のひずみ域まで除荷を行い、再度引張側まで（最初の除荷点まで）再載荷を行う。除荷点および再載荷点での累積相当塑性ひずみ $\overline{\varepsilon}_p$ と境界線半径 $\overline{\kappa}$ を式 (6) に代入し、2 つの連立方程式を解くことにより、モデルパラメータ $\overline{\kappa}_0$ と ω を決定する。

(d) 境界線の傾きを表すパラメータ E_{01}^p および ω

必要となる実験は、上記 (c) で説明したと同様な引張側と圧縮側でそれぞれ応力-ひずみ曲線が線形挙動を示すような 1 サイクル載荷実験である。再載荷経路の始点および終点での境界線の傾き E_{01}^p と E_{02}^p 、塑性仕事量 W_{1p} と W_{2p} を式 (7) に代入し、2 つの連立方程式からパラメータ ω と E_{01}^p を決定する。

(e) 形状パラメータ h を表すパラメータ e および f

必要となる実験は、上記 (c) で説明したと同様な実験である。1 ループの応力-塑性ひずみ曲線（少なくとも 5% 塑性ひずみは必要）の始点（塑性開始点）と終点との間の有限個のデータ点での (E_p, E_0^p, δ) を式 (1) に代入し、最小二乗法を用いて、パラメータ e と f を決定する。

3. 修正二曲面モデルの一般定式化

一軸応力状態で定義した修正二曲面モデルのモデルパラメータは、以下に説明する一般化を行うことによって、一般応力状態でのパラメータへと拡張することができる。

3. 1 多軸応力状態での累積相当塑性ひずみ (A.E.P.S.)

2 節で述べた、弾性域の大きさ κ 、境界線の半径 $\overline{\kappa}$ 、降伏棚の消失に関する計算には、すべて累積相当塑性ひずみ $\overline{\varepsilon}^p$ (A.E.P.S.) を用いる。この $\overline{\varepsilon}^p$ を多軸応力状態のそれへと拡張するため、累積相当塑性ひずみ域を規定する曲面（以後、A.E.P.S. 曲面と呼ぶ）を塑性ひずみ空間で、次のように定義する（図-4 参照）

$$\phi(\varepsilon_{ij}^p) = \frac{2}{3} (\varepsilon_{ij}^p - \eta_{ij}) (\varepsilon_{ij}^p - \eta_{ij}) - \rho^2 = 0 \quad (9)$$

ここで、 ϵ_{ij}^p は塑性ひずみ成分、 η_{ij} と ρ は、それぞれ A. E. P. S. 曲面の中心と半径である。塑性変形が進行している間、A. E. P. S. 曲面は、図-4 に示すように、塑性ひずみ空間内を移動し、かつ、その大きさを変化させる。

一軸応力状態での A. E. P. S. の定義を拡張して、多軸応力状態での A. E. P. S. 曲面の中心の移動量、 $d\eta_{ij}$ 、を次のように定義する。

$$d\eta_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}d\epsilon_{ij}^p & \text{if } \phi(\epsilon_{ij}^p + d\epsilon_{ij}^p) > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

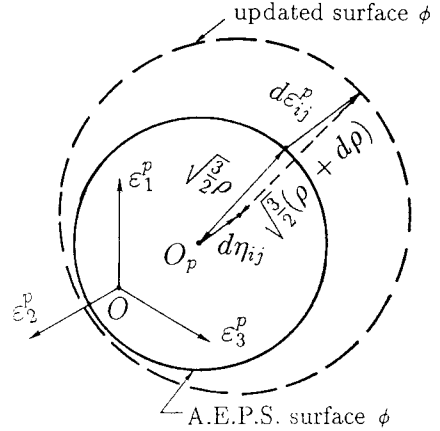


図-4 累積相当塑性ひずみ曲面の定義

一方、 $d\phi = 0$ より、

$$\frac{2}{3}(\epsilon_{ij}^p - \eta_{ij})(d\epsilon_{ij}^p - d\eta_{ij}) - \rho d\rho = 0 \quad (11)$$

式(10)を式(11)に代入して、A. E. P. S. 曲面の大きさの変化量、 $d\rho$ 、を得る。

$$d\rho = \begin{cases} \frac{1}{3}(\epsilon_{ij}^p - \eta_{ij})d\epsilon_{ij}^p / \rho & \text{if } \phi(\epsilon_{ij}^p + d\epsilon_{ij}^p) > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

材料が初期降伏した時点では、 ρ の増分値 $d\rho$ は式(12)からは求められないので、次のように計算する。

$$d\rho = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3} d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p} \quad (13)$$

ここで、一軸応力状態では、 ρ は A. E. P. S. の半分 ($\rho = 1/2 \bar{\epsilon}^p$) であることに注意されたい。それゆえ、2 節の A. E. P. S. に関連した式は、 $\bar{\epsilon}^p$ を 2ρ に換えることによって、一般応力状態の式として用いることが可能となる。

3. 2 降伏曲面および境界曲面

von Mises の降伏関数を適用して、降伏曲面 f および境界曲面 F を表す。
降伏曲面 f :

$$f(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, \kappa) = \frac{3}{2}(S_{ij} - \alpha_{ij})(S_{ij} - \alpha_{ij}) - \kappa^2 = 0 \quad (14)$$

境界曲面 F :

$$F(\sigma_{ij}, \beta_{ij}, \bar{\kappa}) = \frac{3}{2}(S_{ij} - \beta_{ij})(S_{ij} - \beta_{ij}) - \bar{\kappa}^2 = 0 \quad (15)$$

ここで、 σ_{ij} および S_{ij} は、それぞれ応力および偏差応力成分、 α_{ij} および β_{ij} は、それぞれ負荷曲面および境界曲面の中心の偏差成分である。式(2)と式(6)の中の $\bar{\epsilon}^p$ に、 2ρ を代入することにより、負荷

曲面の半径 κ と境界曲面の半径 $\bar{\kappa}$ を計算することができる。

3. 3 距離 δ の定義

現応力点 σ_{ij} と境界曲面までの距離 δ は、式(1)の接線塑性係数 E^p の計算と関係しており、二曲面モデルの重要な変数の一つである。多軸応力状態での δ は、以下のように計算する。まず、Dafalias・Popovの二曲面モデルと同じ Mapping Rule を用いて、現応力点 σ_{ij} の偏差応力成分 S_{ij} が位置する負荷曲面上の単位法線ベクトルと同じ単位法線ベクトルを有する境界曲面上の偏差応力点 $\bar{S}_{ij}$ を求める。すなわち、図-5に示すように、二曲面の幾何学的な関係より次式が成り立つ。

$$\frac{\bar{S}_{ij} - \beta_{ij}}{\sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\kappa}} = \frac{S_{ij} - \alpha_{ij}}{\sqrt{\frac{2}{3}} \kappa} \quad (16)$$

上式より、 $\bar{S}_{ij}$ を求め、距離 δ をユークリッドノルムで評価する。

$$\delta = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\bar{S}_{ij} - S_{ij}\| \quad (17)$$

ここで、係数 $\sqrt{3/2}$ を乗じてあるのは、一軸応力状態での距離 δ と等価な量とするためである。

3. 4 負荷曲面の硬化則

本研究では、Dafalias・Popovの二曲面モデルと同じ硬化則を用いる。すなわち、負荷曲面の中心は、図-5に示すように、負荷曲面上の点 A (S_{ij}) と境界曲面上の点 $\bar{A}$ ($\bar{S}_{ij}$) とを結ぶ方向に沿って $d\alpha_{ij}$ だけ移動する。すなわち、

$$d\alpha_{ij} = C_\alpha \cdot \nu_{ij} \quad (18)$$

ここで、 C_α はスカラー量である。また、 ν_{ij} は $A\bar{A}$ 方向の単位ベクトルであり、次のように表現できる。

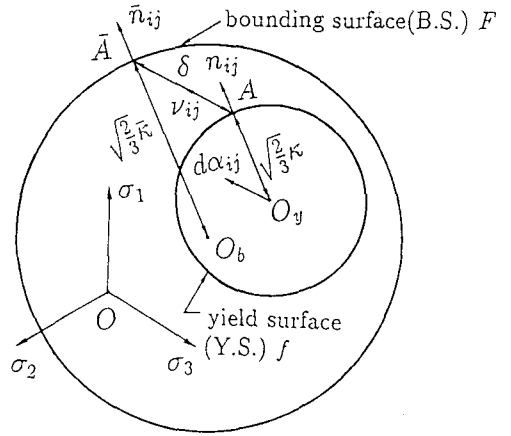
$$\nu_{ij} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\bar{S}_{ij} - S_{ij}}{\delta} \quad (19)$$

式(18)を負荷曲面の連続条件式 ($df = 0$)

$$df = 3(S_{ij} - \alpha_{ij}) dS_{ij} - 3(S_{ij} - \alpha_{ij}) d\alpha_{ij} - 2\kappa \cdot d\kappa = 0 \quad (20)$$

に用いて、次式のスカラー量 C_α を得る。

$$C_\alpha = \frac{(S_{ij} - \alpha_{ij}) dS_{ij} - \frac{2}{3} \kappa \cdot d\kappa}{(S_{ij} - \alpha_{ij}) \nu_{ij}} \quad (21)$$



- $A(S_{ij})$: loading point on Y.S.
- $\bar{A}(\bar{S}_{ij})$: conjugate point on B.S.
- $O_y(\alpha_{ij})$: center of Y.S.
- $O_b(\beta_{ij})$: center of B.S.
- $O_b\bar{A}$ is parallel to O_yA
- $d\alpha_{ij}$ is parallel to $A\bar{A}$
- $n_{ij} = \bar{n}_{ij}$

図-5 移動硬化則

負荷曲面と境界曲面とが接するとき($\delta = 0$)には、式(21)を用いることが不可能となる。この場合、負荷曲面の中心 α_{ij} は、二曲面が互いに接するという幾何学的条件より、決定することができる。すなわち、

$$\frac{S_{ij} - \alpha_{ij}}{\kappa} = \frac{S_{ij} - \beta_{ij}}{\kappa} \quad (22)$$

よって、

$$\alpha_{ij} = S_{ij} - \frac{\kappa}{\kappa} (S_{ij} - \beta_{ij}) \quad (23)$$

3.5 境界曲面の移動

一軸応力状態では、図-6に示すように、二つの境界線の中心の移動量 $d\beta$ は、塑性ひずみ増分 $d\epsilon^p$ を用いて、次のように計算できる。

$$d\beta = E_0^p \cdot d\epsilon^p - d\bar{\kappa} \cdot \frac{\bar{\sigma} - \beta}{\kappa} \quad (24)$$

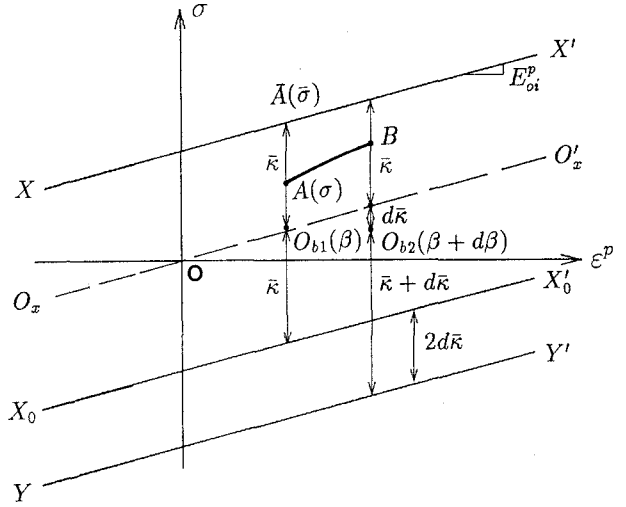


図-6 一軸応力状態での境界線の移動

さらに、上式を拡張して、一般応力状態下での境界曲面の移動量 $d\beta_{ij}$ を次のように仮定する。

$$d\beta_{ij} = C_1 \cdot d\epsilon_{ij}^p + C_2 \cdot n_{ij} \quad (25)$$

ここで、 C_1 と C_2 はスカラー量、 n_{ij} は現応力点での負荷曲面上での単位法線ベクトル、 $d\epsilon_{ij}^p$ は塑性ひずみ増分である。また、 $d\epsilon_{ij}^p$ は、関連流れ則より、 $d\epsilon_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma$ と表現される。

相当応力の定義より、一軸応力状態での移動量 $d\beta$ と一般応力状態での移動量 $d\beta_{ij}$ との間に次のような関係を仮定する。

$$d\beta = \sqrt{\frac{3}{2} d\beta_{ij} d\beta_{ij}} \quad (26)$$

同様に、一軸塑性ひずみ増分 $d\epsilon^p$ と塑性ひずみ増分 $d\epsilon_{ij}^p$ との関係を次のように仮定する。

$$d\epsilon^p = \sqrt{\frac{2}{3} d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|d\epsilon_{ij}^p\| \quad (27)$$

式(25)を式(26)の右辺に代入し、さらに式(27)を用いて整理し、これを式(24)と比較することにより、

$$C_1 = \frac{2}{3} E_0^p \quad \text{および} \quad C_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}} d\bar{\kappa} \quad (28)$$

を得る。それゆえ、一般応力状態での境界曲面の移動量、 $d\beta_{ij}$ は次のように表現される。

$$d\beta_{ij} = \frac{2}{3} E_0^p \cdot d\epsilon_{ij}^p - \sqrt{\frac{2}{3}} d\bar{\kappa} \cdot n_{ij} \quad (29)$$

3. 6 仮想境界曲面と記憶曲面

一軸応力状態での仮想境界曲線と記憶曲線は、それぞれ、仮想境界曲面と記憶曲面へと拡張される。ここでは、便宜上、仮想境界曲面および記憶曲面の中心は、実際の境界曲面の中心 β_{ij} と一致し（図-7参照）、さらに、記憶曲面の大きさ $\bar{\kappa}_m$ は、応力点 S_{ij} と境界曲面の中心 β_{ij} との距離の最大値に依存すると仮定する。すなわち、

$$\bar{\kappa}_m = \left\{ \sqrt{\frac{3}{2}} \|S_{ij} - \beta_{ij}\| \right\}_{max} \quad (30)$$

図-7に示されるように、現応力点 A から除荷が起こった場合には、点 A と記憶曲面との距離 δ_m は δ_v に置き換えられる。

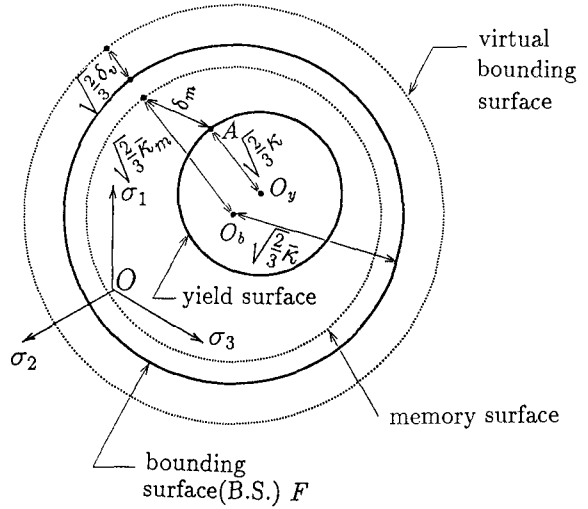


図-7 記憶曲線および仮想境界曲線

3. 7 応力増分-ひずみ増分関係式

等方弾性状態での応力増分 $d\sigma_{ij}$ -弾性ひずみ増分 $d\epsilon_{ij}^e$ 関係式は、次のように表すことができる。

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^e d\epsilon_{kl}^e \quad (31)$$

ここで、 D_{ijkl}^e は等方弾性マトリックスであり、Lameの定数 λ と μ 、Kroneckerデルタ δ_{ij} を用いて、次のように表すことができる。

$$D_{ijkl}^e = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (32)$$

一方、弾塑性状態での応力増分-ひずみ増分関係式は、降伏曲面、硬化則、および関連流れ則を用いて、以下のように誘導される。弾塑性状態では、ひずみ増分 $d\epsilon_{ij}$ は、弾性ひずみ増分 $d\epsilon_{ij}^e$ と塑性ひずみ増分 $d\epsilon_{ij}^p$ に分けることができる。すなわち、

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (33)$$

また、関連流れ則により、 $d\epsilon_{ij}^p$ は、次の一般形で表される¹²⁾。

$$d\epsilon_{ij}^p = \frac{n_{ij}}{K^p} (d\sigma_{kl} \cdot n_{kl}) \quad (34)$$

ここで、 K^p は硬化係数、 n_{ij} は負荷曲面上での単位法線ベクトルである。一軸応力状態では、式(34)は次のようになる。

$$d\epsilon_{11}^p = \frac{2}{3} \frac{d\sigma_{11}}{K^p} \quad (35)$$

上式と一軸応力状態での接線塑性係数 E^p の定義式($E^p = d\sigma_{11} / d\epsilon_{11}^p$)とを比較して、次の関係式が得られる。

$$K^P = \frac{2}{3}E^P \quad (36)$$

式(31), 式(33)および式(36)を式(34)に代入して, 次式の塑性ひずみ増分 $d\epsilon_{ij}^P$ を得る.

$$d\epsilon_{ij}^P = \frac{D_{mnkl}^e d\epsilon_{kl} n_{mn}}{\frac{2}{3}E^P + D_{mnkl}^e n_{kl} n_{mn}} n_{ij} \quad (37)$$

従って, 弾塑性状態での応力増分-ひずみ増分関係式は,

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij} &= D_{ijkl}^e (d\epsilon_{kl} - d\epsilon_{kl}^P) \\ &= \left[D_{ijkl}^e - \frac{1}{\kappa^2} \frac{9\mu^2}{E^P + 3\mu} (S_{ij} - \alpha_{ij})(S_{kl} - \alpha_{kl}) \right] d\epsilon_{kl} \end{aligned} \quad (38)$$

となる. 上式(38)の弾塑性応力増分-ひずみ増分関係式のマトリックス表示は,

$$\{d\sigma\} = \begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_z \\ d\tau_{xy} \\ d\tau_{yz} \\ d\tau_{xz} \end{Bmatrix} \quad \text{および} \quad \{d\epsilon\} = \begin{Bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\epsilon_z \\ d\gamma_{xy} \\ d\gamma_{yz} \\ d\gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (39)$$

と置いて,

$$\{d\sigma\} = ([D^e] - [D^P])\{d\epsilon\} \quad (40)$$

と表現できる. ここで, $[D^e]$ と $[D^P]$ は, それぞれ弾性マトリックスおよび塑性マトリックスであり, 次のように表現される.

$$[D^e] = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \quad (41)$$

および

$$[D^P] = \frac{9\mu^2}{\kappa^2(E^P + 3\mu)} \begin{bmatrix} T_1^2 & T_1T_2 & T_1T_3 & T_1T_4 & T_1T_5 & T_1T_6 \\ & T_2^2 & T_2T_3 & T_2T_4 & T_2T_5 & T_2T_6 \\ & & T_3^2 & T_3T_4 & T_3T_5 & T_3T_6 \\ & \text{sym.} & & T_4^2 & T_4T_5 & T_4T_6 \\ & & & & T_5^2 & T_5T_6 \\ & & & & & T_6^2 \end{bmatrix} \quad (42)$$

ここで, T_i ($i=1, \dots, 6$) は

$$\begin{aligned} \{T\}^t &= [T_1 \ T_2 \ T_3 \ T_4 \ T_5 \ T_6] \\ &= [S_x - \alpha_x, S_y - \alpha_y, S_z - \alpha_z, S_{xy} - \alpha_{xy}, S_{yz} - \alpha_{yz}, S_{zx} - \alpha_{zx}] \end{aligned} \quad (43)$$

4. 修正二曲面モデルの特徴

本節では、修正二曲面モデルによって予測される、鋼素材の典型的な繰返し挙動の二、三の例を示す。

4. 1 一軸応力状態下での典型的な繰返し挙動

ここでは、本提案モデルによる一軸応力下での (a) 繰返しひずみ硬化現象、(b) 非対称繰返しひずみ硬化現象、(c) 繰返し硬化現象のシミュレーション結果を紹介する。なお、計算では、表-1 に示すSS400鋼材のモデルパラメータ値⁹⁾を用いた。

(a) 対称繰返しひずみ硬化現象

引張・圧縮側での繰返しひずみの変動幅が1サイクル毎に0.5% づつ $\pm 4.0\%$ まで増加する場合を本提案モデルにより予測する。図-8 に示す予測結果から分かるように、1サイクル毎の応力度が引張・圧縮側で徐々に増加する傾向(ひずみ硬化現象)がみられる。これは、引張側で生じた累積相当塑性ひずみの増加にともなって境界線間の距離が大きくなり、圧縮側に位置する境界線が下方向(圧縮側)に移動することにより、1サイクル毎の予測曲線の最大圧縮応力が増加するためである。一方、同様な理由から、圧縮側での累積相当塑性ひずみの増加により、引張側に位置する境界線が上方向(引張側)に移動し、予測曲線の最大引張応力が1サイクル毎に増加してゆく。この現象は、藤本ら¹³⁾と Cofie-Krawinkler¹⁴⁾によって報告されている実験の現象と類似している。

(b) 非対称繰返しひずみ硬化現象

圧縮側でのひずみ幅を -1.0% と固定し、引張側でのひずみ幅を1サイクル毎に0.5% づつ 5.0% まで増加させる、ひずみ経路を予測する。図-9 に示す予測結果より、ひずみ硬化現象は1サイクル毎に圧縮傾

表-1 モデルパラメータ値

Parameter	SS400
$E(kgf/cm^2)$ (GPa)	2.11×10^6 206.7
$\sigma_y(kgf/cm^2)$ (MPa)	2.80×10^3 274.4
ν	0.29
E_{st}^P/E	2.49×10^{-2}
ϵ_{st}^p	1.53×10^{-2}
a	-0.505
b	2.17
c	14.4
α	0.191
e	5.00×10^2
f/E	0.30
M	-0.37
E_{0i}^P/E	8.96×10^{-3}
$\omega \cdot \sigma_y$	3.08
$\bar{\kappa}_0/\sigma_y$	1.15
σ_u/σ_y	1.81
$\zeta \cdot \epsilon_y^2$	9.89×10^{-4}

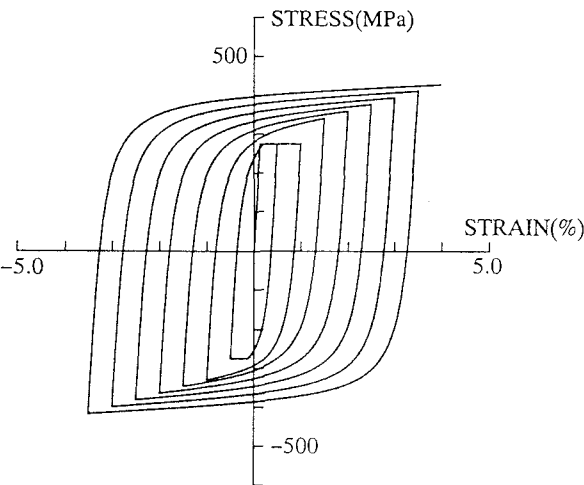


図-8 対称繰返しひずみ硬化現象の予測曲線

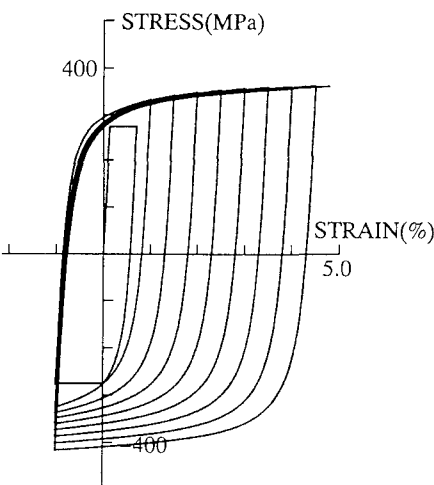


図-9 非対称繰返しひずみ硬化現象の予測曲線

域でのみ起こっていることが分かる。これは、引張側でのみ累積相当塑性ひずみが増加するため、圧縮側に位置する境界線が圧縮側（下方）に移動し、ひずみ硬化現象が圧縮側でのみ起こるためである。

(c) 繰り返し硬化現象

図-10には、一定ひずみ幅（ $\pm 2.0\%$ ）で繰り返し载荷を行った場合の予測結果を示す。一定のひずみ幅での繰り返し载荷では、累積相当塑性ひずみ（A.E.P.S.）は1サイクルで一定となるため、2サイクル目以降、境界線は移動しなくなる。それゆえ、顕著な繰り返し硬化現象はみられず、繰り返し曲線は定常状態の挙動（Saturated behavior）を示す。

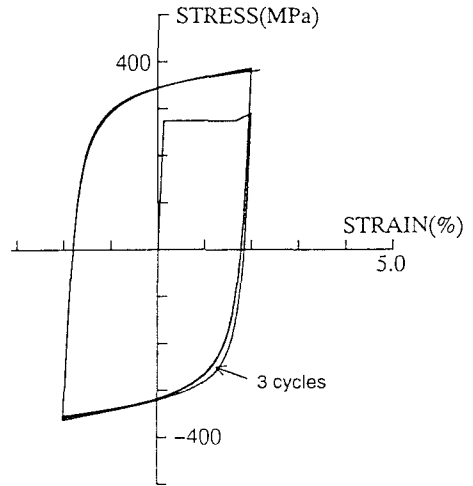


図-10 繰り返し硬化現象の予測曲線

4.2 二軸ひずみ状態下での非比例繰り返し载荷

二軸ひずみ状態下での非比例繰り返し载荷の一例として、図-11に示すような、軸方向ひずみ-せん断ひずみ空間にて繰り返しひずみ経路が十字形経路の場合（Inoueら¹⁵⁾，Wang¹⁶⁾）を解析する。ひずみ経路は、ひずみ原点を出発点として、図中の数字（例えば、1 → 2）および矢印の方向に従う。文献15に示されている材料パラメータは、修正二曲面モデルのモデルパラメータを同定するには不十分であるため、表-1に示すSS400鋼材のモデルパラメータを、便宜上、予測解析に用いた。

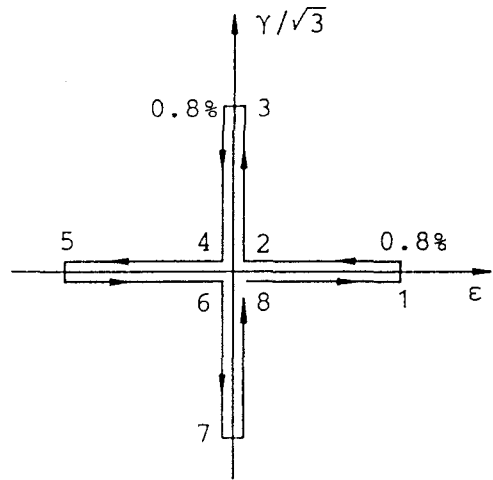


図-11 十字形ひずみ経路

図-12および13は、それぞれWangおよび本モデルによる予測結果を示す。図より分かるように、提案モデルによる軸方向応力 σ -せん断応力 τ 関係は、Wangによる解析結果と比較して、非常に類似した傾向を示している。また、モデル予測による付加的な繰り返し硬化（additional cyclic hardening）は非常に小さい。

5. まとめ

本研究では、繰り返し载荷を受ける、降伏棚を有する構造用鋼材の一般応力状態での応力-ひずみ構成則モデルとして、筆者らの修正二曲面モデルの概要を紹介した。本研究をまとめると以下のようである。

- (1) 一軸応力状態での修正二曲面モデルの特徴（Dafalias・Popovモデルに対する修正点）を累積相当塑性ひずみ（A.E.P.S.）の概念を導入することにより説明した。
- (2) 一軸引張・圧縮繰り返し実験データに基づいた修正二曲面モデルのパラメータを一般応力状態のものへと拡張した。その際、累積相当塑性ひずみの領域を規定するための曲面を塑性ひずみ空間で定義した。
- (3) 一軸応力状態で定義した各種曲線（例えば、境界線、仮想境界線、記憶線など）を一般応力状態で曲面として拡張し、有限要素法などによる非線形解析に採り組み可能な応力-ひずみ増分関係式を塑性論

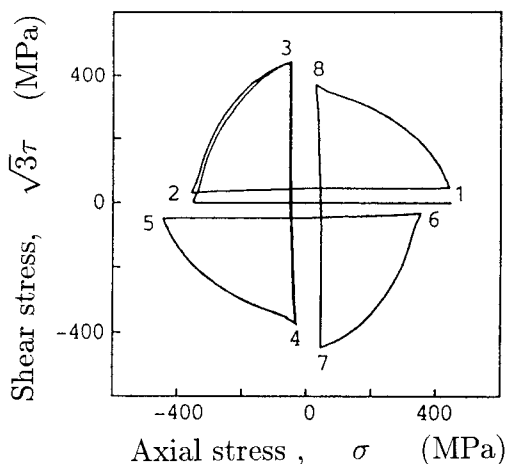


図-12 Wang¹⁶⁾による予測曲線

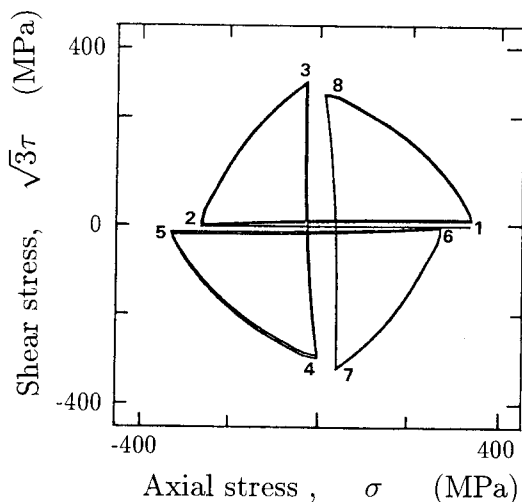


図-13 本モデルによる予測曲線

を用いて誘導した。

- (4) (a) 漸増型対称ひずみ繰返し経路, (b) 漸増型非対称ひずみ繰返し経路, (c) 一定ひずみ幅繰返し経路の3つのひずみ経路を対象として, 本提案モデルによる鋼素材の一軸応力繰返し挙動のシミュレーション結果を紹介した。この結果, 鋼素材の実験より観察されるような, 顕著な繰返しひずみ硬化現象および一定ひずみ幅での小さな繰返し硬化現象を再現することができた。
- (5) 二軸ひずみ状態下での非比例繰返し挙動の解析を通して, 本モデルによる予測結果と他の研究者による予測結果とを比較し, 本モデルの非比例載荷予測に対する有効性を検討した。

参考文献

- 1) Mroz, Z. : On the Description of Anisotropic Work Hardening, J. Mech. Phys. Solids, Vol.15, pp.163-175, 1967.
- 2) Iwan, W.D. : On a Class of Model for the Yielding Behavior of Continuous and Composite System, Trans., ASME, J. Appl. Mech., pp.612-617, Sept., 1967.
- 3) Popov, E.P. and Petersson, H. : Cyclic Metal Plasticity: Experiments and Theory, Journal of Engineering Mechanics, Proc. ASCE, Vol.104, No.EM6, pp.1371-1388, Dec., 1978.
- 4) Dafalias, Y.F. and Popov, E.P. : A Model of Nonlinear Hardening Materials for Complex Loading, Acta Mech., pp.173-192, 1975.
- 5) Tseng, N.T. and Lee, G.C. : Simple Plasticity Model of Two-Surface Type, Journal of Engineering Mechanics, Proc. ASCE, Vol.109, NO.3, pp.795-810, June 1983.
- 6) 田中良仁, 水野英二, 沈赤, 宇佐美勉 : 降伏棚を有する鋼材の繰返し弾塑性モデル - 二曲面塑性モデルの開発 -, 構造工学論文集, Vol.37A, pp.1-14, 1991年3月.
- 7) Shen, C., Tanaka, Y., Mizuno, E. and Usami, T. : A Two-Surface Model for Steels with Yield Plateau, Structural Eng./Earthquake Eng., Proc. of JSCE, Vol.8, No.4, 11(179s)-20(188s), Jan., 1992.
- 8) Shen, C., Mizuno, E. and Usami, T. : Further Study on Two-Surface Model for Structural

Steels under Uniaxial Cyclic Loading, Structural Eng./Earthquake Eng., Proc. of JSCE, Vol.9, No.4, 59-62, Jan., 1993.

- 9) Shen, C., Mizuno, E. and Usami, T. : A Generalized Two-Surface Model for Structural Steel under Cyclic Loading, Structural Eng./Earthquake Eng., Proc. of JSCE, Vol.10, No.2, 23(59s)-33(69s), July, 1993.
- 10) 水野英二, 沈赤, 宇佐美勉 : 鋼部材の繰返しねじり実験と二曲面モデルによる数値シミュレーション, 構造工学論文集, Vol.39A, pp.221-234, 1993年3月.
- 11) 皆川勝, 西脇威夫, 増田陳紀 : 塑性流れ域における構造用鋼の単軸繰返し挙動の推定, 構造工学論文集, Vol.35A, 1989年3月.
- 12) Jain, S. K. : Introduction to Theory of Plasticity, Engineering Publications, 1989.
- 13) 藤本盛久, 橋本篤秀, 中込忠男, 山田文富 : 構造用鋼材の多軸応力状態における繰返し応力-ひずみ関係, 建築学会論文集, 356, pp.93-101, 1985年10月.
- 14) Cofie, N.G. and Krawinkler, H. : Uniaxial Cyclic Stress-Strain Behavior of Structural Steel, Journal of Engineering Mechanics, Proc. ASCE, Vol.111, No.9, pp.1105-1120, Sept., 1985.
- 15) Inoue, T., Yoshida, F., Ohno, N., Kawai, M. and Nitsu, Y. : Evaluation of Inelastic Constitutive Models under Plasticity-creep Interaction in Multiaxial Stress State, Nuclear Engineering and Design, Vol.126, pp.1-11, 1991.
- 16) Wang, J. D. : Proposal of the Kinematic Hardening Rule and its Application to Ratchetting Deformation, A thesis submitted in partial fulfilment of the requirements for the degree of Doctor in Dept. of Mechanical Engineering, Nagoya University, 1992.

(1993年9月16日受付)