

変厚偏平シェルの幾何学的非線形挙動解析

GEOMETRICAL NONLINEAR BEHAVIOR ANALYSIS OF SHALLOW SHELLS
WITH VARIABLE THICKNESS

森田千尋* 松田 浩** 崎山 毅*** 川神雅秀****

By Chihiro MORITA, Hiroshi MATSUDA, Takeshi SAKIYAMA and Masahide KAWAKAMI

In this paper, a discrete method is developed to study the geometrical nonlinear analysis of shallow shells with variable thickness. The discrete solutions of partial differential equations governing the geometrical nonlinear behavior of shallow shells are obtained in discrete forms. By transforming the differential equations into integral equations and applying the numerical integration, the discrete solutions can be obtained. The nonlinear problems are solved by the iteration and the displacement incremental procedure.

As the applications of the present method, geometrical nonlinear problems of variable thickness shallow shells with three types shapes are calculated. The numerical results obtained by this method are verified to be in good agreement the other solutions. Moreover, symmetrical and unsymmetrical buckling behavior of shallow shells are shown.

Key Words : shallow shell, nonlinear analysis, snap-through, a discrete method

1. まえがき

偏平シェル構造物の座屈安定性に関する問題では、その挙動が初期の安定なつりあい形から不安定な経過を経て安定なつりあい形に移行する、いわゆる飛び移り現象などを起こす場合があり、有限変形に基づく非線形理論¹⁾による非線形解析が必要となる。また、変厚偏平シェルの基礎微分方程式は、任意の関数として与えられるシェル剛度およびシェル厚を係数とする、いわゆる変数係数の連立非線形偏微分方程式となるため、その解を解析的に求めることは一般に困難と考えられる。したがって、偏平シェルの解法として種々の近似解法、数値解法が用いられている。

周辺を固定支持した偏平な部分球殻に関する研究は、Budiansky²⁾が対称座屈荷重を反復法を用いて求めている。Weinitschke³⁾は同様の問題を級数解を用いて求めており、Budianskyと一致した結果を得ている。さらに、対称座屈荷重値よりも小さい座屈荷重値を示す非対称座屈については、Huang⁴⁾がRayleigh-Ritz法を用いて、Kaplan-Fung⁵⁾およびHomewood⁶⁾の実験結果に近い結果を得ている。また、角野ら⁷⁾は比較的开角の大きい部分球殻にも適用可能な座屈荷重を、周辺固定および周辺単純支持の境界条件に

* 工修 長崎大学助手 工学部構造工学科 (〒852 長崎市文教町1-14)

** 工博 長崎大学助教授 工学部構造工学科 (〒852 長崎市文教町1-14)

*** 工博 長崎大学教授 工学部構造工学科 (〒852 長崎市文教町1-14)

**** 長崎大学大学院生 海洋生産科学研究科博士課程 (〒852 長崎市文教町1-14)

対して求めている。一方、E.P.シェル、円筒シェルおよびH.P.シェルなどの任意の曲率を持つ偏平シェルについては、Leicester⁸⁾が級数解を用いて、対称および非対称座屈荷重を四辺単純支持の場合のみ求めている。Ramm⁹⁾は、同様の問題を有限要素法を用いて求めており、Leicesterの結果と比較している。

以上のように、偏平シェルの幾何学的非線形問題については多くの研究が行われているが、いずれの場合においても限られた境界条件の等厚な偏平シェルのみが扱われており、任意の境界条件および変断面性に対する解析の容易さおよび方法の一般性という観点に立てば、変厚偏平シェルの解法に関してまだ検討の余地が残されているものと考えられる。また、座屈前後の変形については未だ十分明らかにされていない点があり、理論解析結果と実験結果との一致も難しく、シェル構造物の設計に関しては検討すべき点が多く残されているといわれている。

本研究は、種々の形状を持つ変厚偏平シェルの幾何学的非線形挙動特性を調べるために、著者らの一部が既に提示した平板の一離散化手法^{10),11)}を変厚偏平シェルに拡張適用し、任意の変断面性を持つ偏平シェルを対象として幾何学的非線形解析を行い、まず、等厚な偏平シェルに関して既往数値解と比較することにより本解法の妥当性を検証し、変厚偏平シェルの座屈挙動を明らかにしたものである。本解析手法は、基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用とにより偏平シェルの支配方程式の解析的近似解を求め、これに基づいて変厚偏平シェルの解析を行うものである。

2. 変厚偏平シェルの基礎微分方程式およびその離散解

偏平シェルとは、球形シェルの場合には中央点のライズと直径の比が1/8以下の場合⁴⁾とされており、本論文で解析対象としているFig.1のような矩形Baseの場合には、シェルの基準面を $z = z(x, y)$ で表すと、 $(\partial z/\partial x)^2, (\partial z/\partial y)^2, (\partial z/\partial x)(\partial z/\partial y)$ が1に対して十分小さい場合¹²⁾のシェルと定義されている。

曲面の x, y 方向の曲率を k_x, k_y 、ねじれ率を k_{xy} とし、これらがあまり小さくなく、投影形状が矩形の曲面板を考える。板厚中央面に対して接線方向の面内変位成分を u, v 、および垂直方向の変位成分を w とし、面内力を N_{xy}, N_y および N_x 、せん断力を Q_y, Q_x 、ねじりモーメントを M_{xy} 、曲げモーメントを M_y, M_x 、たわみ角を θ_y, θ_x とすれば、Fig.1に示すような変厚シェルを含む一般的な偏平シェルの曲げに関する基礎微分方程式は、せん断変形の影響を考慮したMindlin理論に基づいて、次の増分形の連立偏微分方程式となる。

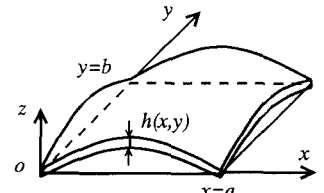


Fig.1 偏平シェル

$$\frac{\partial \Delta N_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial y} - k_x \Delta Q_x = 0 \quad (1-1) \quad \frac{\partial \Delta N_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial x} - k_y \Delta Q_y = 0 \quad (1-2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta Q_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta Q_y}{\partial y} + \left[k_x + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \Delta N_x + \left[k_y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \Delta N_y + 2 \left[k_{xy} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \Delta N_{xy} \\ + \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} N_x + \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} N_y + 2 \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} N_{xy} + \Delta N_c + \Delta q = 0 \end{aligned} \quad (1-3)$$

$$\frac{\partial \Delta M_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial y} - \Delta Q_x = 0 \quad (1-4) \quad \frac{\partial \Delta M_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial x} - \Delta Q_y = 0 \quad (1-5)$$

$$\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x} = \frac{1}{D(1-\nu^2)} (\Delta M_x - \nu \Delta M_y) \quad (1-6) \quad \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y} = \frac{1}{D(1-\nu^2)} (\Delta M_y - \nu \Delta M_x) \quad (1-7)$$

$$\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x} = \frac{2}{D(1-\nu)} \Delta M_{xy} \quad (1-8) \quad \frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \Delta \theta_x = \frac{1}{\kappa G h} \Delta Q_x \quad (1-9)$$

$$\frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \Delta \theta_y = \frac{1}{\kappa G h} \Delta Q_y \quad (1-10) \quad \frac{\partial \Delta u}{\partial x} - k_x \Delta w + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \Delta W_{xc} = \frac{1}{Eh} (\Delta N_x - \nu \Delta N_y) \quad (1-11)$$

$$\frac{\partial \Delta v}{\partial y} - k_y \Delta w + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \Delta W_{yc} = \frac{1}{Eh} (\Delta N_y - \nu \Delta N_x) \quad (1-12)$$

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} - 2k_{xy} \Delta w + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \Delta W_{xyc} = \frac{2(1+\nu)}{Eh} \Delta N_{xy} \quad (1-13)$$

ここに、 Δ :断面力および変形量の増分、 $q = q(x,y)$:垂直方向荷重強度、 $D = D(x,y) = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$:シエルの曲げ剛度、 E :弾性係数、 $h = h(x,y)$:シエル厚、 ν :ポアソン比、 $\kappa = 5/6$:せん断修正係数、 $G = E/[2(1+\nu)]$:せん断弾性係数、 $\Delta N_c, \Delta W_{xc}, \Delta W_{yc}, \Delta W_{xyc}$:各荷重段階における不平衡力および非線形項 (Appendix I)

式(1-1)~(1-13)において、無次元量 $X_1 \sim X_{13}$ および η, ζ

$$X_1 = \frac{a^2 Q_y}{D(1-\nu^2)}, X_2 = \frac{a^2 Q_x}{D(1-\nu^2)}, X_3 = -\frac{a M_{xy}}{D(1-\nu^2)}, X_4 = \frac{a M_y}{D(1-\nu^2)}, X_5 = \frac{a M_x}{D(1-\nu^2)}, X_6 = \theta_y, X_7 = \theta_x, \\ X_8 = \frac{w}{a}, X_9 = \frac{v}{a}, X_{10} = \frac{u}{a}, X_{11} = \frac{a^2 N_{xy}}{D(1-\nu^2)}, X_{12} = \frac{a^2 N_y}{D(1-\nu^2)}, X_{13} = \frac{a^2 N_x}{D(1-\nu^2)}, \eta = \frac{x}{a}, \zeta = \frac{y}{b},$$

a, b :偏平シエルの矩形Baseの辺長、 $\mu = b/a$, h_0 :基準シエル厚、 $D_0 = Eh_0^3/[12(1-\nu^2)]$:基準シエル剛度を用いると、式(1-1)~(1-13)は次のように簡単に書き表せる。

$$\sum_{s=1}^{13} \left\{ F_{1ts} \frac{\partial \Delta X_s}{\partial \zeta} + F_{2ts} \frac{\partial \Delta X_s}{\partial \eta} + F_{3ts} \Delta X_s \right\} + f_t = 0 \quad (2)$$

($t = 1, 2, \dots, \dots, 13$)

ここに、 $F_{1ts}, F_{2ts}, F_{3ts}, f_t$: Appendix II, $I = I(x,y) = \left[\frac{h_0}{h(x,y)} \right]^3$, $J = J(x,y) = 2\mu(1+\nu) \left[\frac{h_0}{h(x,y)} \right]^3$, $K = K(x,y) = \frac{1+\nu}{5} \left(\frac{h_0}{a} \right)^2 \frac{h_0}{h(x,y)}$,

$$L_1 = L_1(x,y) = \frac{\mu}{12} \left(\frac{h_0}{a} \right)^2 \frac{h_0}{h(x,y)}, L_2 = L_2(x,y) = \frac{\mu(1+\nu)}{6} \left(\frac{h_0}{a} \right)^2 \frac{h_0}{h(x,y)}, \Delta \bar{N}_c = \frac{\mu \Delta N_c a^3}{D(1-\nu^2)}, \Delta \bar{q} = \frac{\mu \Delta q a^3}{D(1-\nu^2)}$$

基礎微分方程式(2)における $F_{1ts}, F_{2ts}, F_{3ts}, f_t$ が変数係数であることに注意し、領域 $[i, j]$ において面積分することにより積分方程式に変換し、次に積分方程式の近似解法を応用すると、偏平シエルの縦横の等分割線の交点に関する離散解は、次式のように整理される。

$$\Delta X_{pij} = \sum_{d=1}^{10} \left\{ \sum_{f=0}^i a_{pijfd} \Delta X_{r\theta} + \sum_{g=0}^j b_{pijgd} \Delta X_{s\theta} \right\} + \Delta q_{pij} \quad (3)$$

$a_{pijfd}, b_{pijgd}, \Delta q_{pij}$: Appendix III

式(3)は、偏平シエルの離散表示された離散解である。この解式中に含まれる境界従属点の10個ずつの諸量 $\Delta X_{r\theta}, \Delta X_{s\theta}$ はいわゆる積分定数であり、境界条件によって決定されるべきものである。また、任意の領域 $[i, j]$ の主要点における諸量 ΔX_{pij} を、この領域の境界従属点における諸量 $\Delta X_{r\theta}, \Delta X_{s\theta}$ に関係づける要素 a_{pijfd}, b_{pijgd} は、格間伝達マトリックスに相当するものである。なお、離散解の導入過程の詳細は、文献 10) を参照されたい。

この式(3)を用いて、各荷重段階において不平衡力および非線形項を計算し、逐次代入して収束計算を行うことにより幾何学的非線形解析が行われる。

3. 積分定数と境界条件

基礎微分方程式(1-1)~(1-13)の近似解(3)に含まれる積分定数 $\Delta X_{r\theta}, \Delta X_{s\theta}$ は、具体的には、それぞれ偏平シエルの $y=0, x=0$ なる辺上における断面力および変形を表す。各等分割点において合計10個ずつの積分定数が存在するが、偏平シエルの境界条件に応じて、これらの中のいずれか5個の積分定数は、はじめから既知である。残りの5個の未知なる積分定数は、 $x=a, y=b$ の各辺の境界条件によって決定される。

Fig.2 に、四辺単純支持の場合の偏平シェルの積分定数と境界条件を示す。(a) 図は上下 1 軸対称性を持つ偏平シェルの 1/2 部分を対象とした場合であり、また、(b) 図は左右および上下の 2 軸対称性を持つ偏平シェルの 1/4 部分を対象とした場合である。同図において、隅角点における積分定数および境界条件は、 で囲まれている。なお、隅角点における積分定数および境界条件は、その隅角点において 2 境界辺上での諸量間の関係を考慮して定められる。詳しくは、文献 10) を参照されたい。

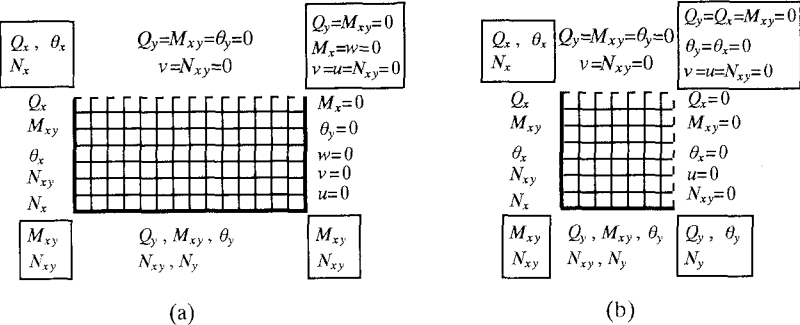


Fig.2 積分定数および境界条件

4. 数値解析結果

数値解析例として本論文で用いた偏平シェルは、弾性係数 $E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ 、偏平シェルの矩形Baseの辺長 $a=b=10\text{m}$ 、ライズ高 $H=0.25\text{m}$ とし、シェル面に垂直方向に等分布荷重を満載するものとする。偏平シェルの曲面形状は、E.P. シェル、円筒シェルおよびH.P. シェルの3種類とし、また、シェル厚は Table 1 に示すように $h_0=0.4, 0.32, 0.24, 0.2, 0.12, 0.1\text{m}$ の6種類としている。さらに、E.P. シェル、円筒シェルおよびH.P. シェルの場合の記号を、それぞれ $E1, \dots, C1, \dots$ および $H1, \dots$ と略称することとする。なお、境界条件は全て四辺単純支持（ピン支持）である。

Table 1 偏平シェルの断面形状

	E1,C1,H1	E2,C2,H2	E3	E4,C4,H4	E5	E6,C6,H6
H/h_0	0.6250	0.7813	1.0417	1.2500	2.0833	2.5000
$h_0(\text{m})$	0.4	0.32	0.24	0.2	0.12	0.1

本数値解析例において、例えばE.P.シェルの場合には、曲率 $k_x=k_y=0.02$ 、曲率半径 $R_x=R_y=50\text{m}$ であり、 $(\partial z/\partial x)^2 \leq 0.01, (\partial z/\partial y)^2 \leq 0.01, (\partial z/\partial x)(\partial z/\partial y) \leq 0.01$ となり 1 に対して十分小さい値となる。また他の論文においても、 $R_x/a, R_y/b$ が 1 以上の場合を偏平シェルとして取り扱っている場合が多く^{12),13)}、本解析例では $R_x/a=R_y/b=5.0$ であるので、十分に偏平なシェルの適用範囲と考えられる。

数値解析では、幾何学的非線形挙動を追跡するために、中央点の無次元たわみ (w/h_0) を 0.05 とした微小変位増分により計算を進めた。この変位増分量は十分収束した解が得られることを確認している。また各荷重ステップにおいては収束計算を行い、収束判定は断面力および変形の相対誤差を 10^{-3} としている。なお、解析結果に用いた荷重パラメータ $\bar{q}$ および変位パラメータ w_{av} は、それぞれ次式で表される量である。

$$\bar{q} = q \frac{a^4}{64 E h_0^2 H^2} \quad (4)$$

$$w_{av} = \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b \frac{w}{h_0} dx dy \quad (5)$$

4. 1 対称座屈

対称座屈に関しては、 $x=0.5a$ および $y=0.5b$ の 2 軸対称性を考慮して 1/4 部分を対象とした場合の解析を行った。なお、解析においては 1/4 部分の横縦方向の分割数は、4-5 分割で十分収束した解が得られているため、分割数 $m=n=5$ とした。

(1) 等厚偏平シェル

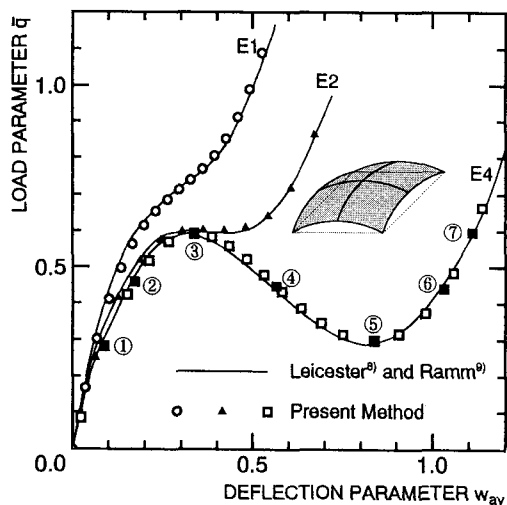


Fig.3 E.P.シェルの荷重～たわみ曲線

はじめに、本解析法による数値解の精度を明らかにするために、本法により得られた等厚偏平E.P.シェルの荷重～たわみ曲線を既往の解析結果^{8),9)}とともに Fig.3 に示す。同図の実線は、Leicesterによる級数解⁸⁾およびRammによるFEM解⁹⁾を示すが、本法による等厚偏平シェルの幾何学的非線形解析結果は、文献8),9)の結果とよく一致していることがわかる。Fig.4 には、典型的な飛び移り現象を起こすE4の場合の代表的な荷重段階（Fig.3の点①～⑦）での、 $y=0.5b$ 上の曲げモーメント、面内力およびたわみの分布を示す。同図より、曲げモーメントは

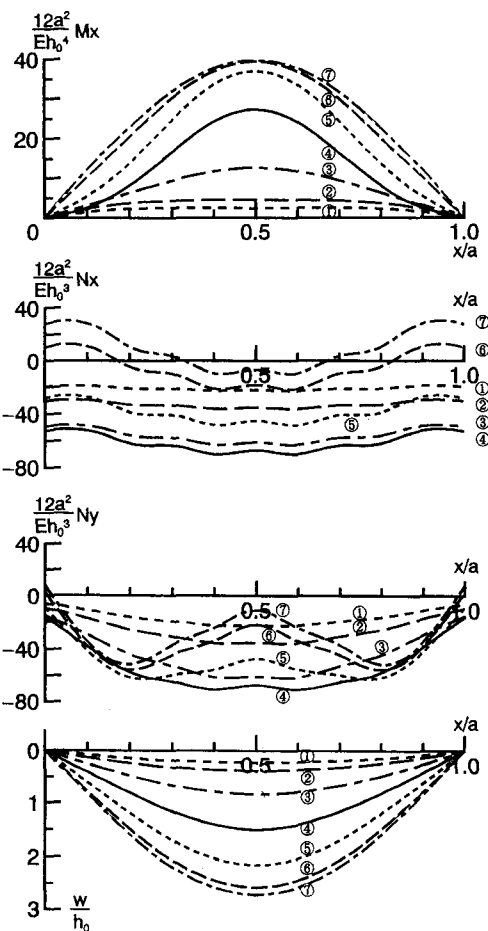


Fig.4 E.P.シェルの断面力およびたわみの分布

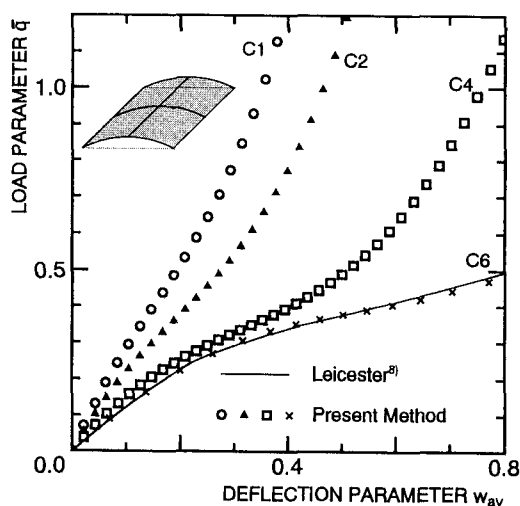


Fig.5 円筒シェルの荷重～たわみ曲線

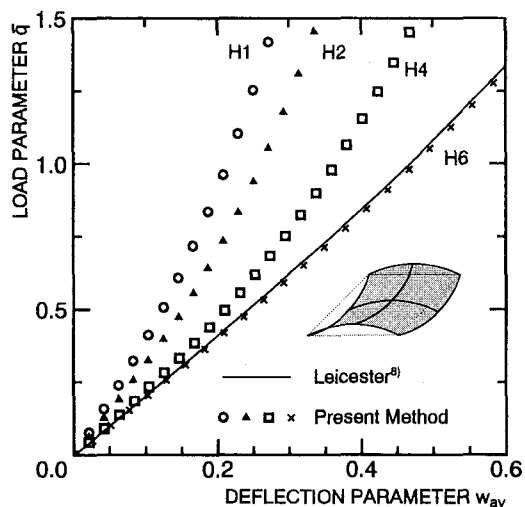


Fig.6 H.P.シェルの荷重～たわみ曲線

変形の増加とともに増大している。しかしながら、面内力 N_x, N_y は圧縮力として増大していくが（点①～④）、その後、 N_x は全体的に減少していきやがては引張力が生じ、 N_y は中央部分が減少していくような分布となる。

次に、等厚な偏平円筒シェルおよび偏平H.P.シェルの荷重～たわみ曲線を Leicester による級数解⁸⁾とともにそれぞれ Fig.5 および Fig.6 に示す。この場合にも本法による等厚な偏平シェルの幾何学的非線形解析結果は、文献 8) の結果とよく一致している。

(2) 変厚偏平シェル

次に、シェル厚が変化する変厚偏平E.P.シェルについての幾何学的非線形解析を行った。ここで取り扱った偏平シェルの変厚性状は、Fig.7 に示すような変厚偏平シェルであり、式(6)で表されるようなシェル厚である。なお、変厚偏平シェルの変厚率は、平板の解析で妥当な解が得られた程度¹⁰⁾を用いた。

$$h(x,y) = h_0 \left[2\alpha \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 0.5 \right) + 1 \right] \quad (6)$$

$$(0 \leq x \leq 0.5a, 0 \leq y \leq 0.5b)$$

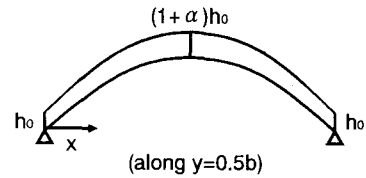


Fig.7 変厚偏平E.P.シェル

Fig.8 および Fig.9 は、変厚偏平E.P.シェルに関して、 α を $-0.2 \sim 0.2$ まで変化させた場合の荷重～たわみ曲線である。なお、ここでは Leicester⁸⁾ の表現と同様に、荷重の極大値を Snap-Through 荷重、極小値を Snap-Back 荷重と称することとする。Fig.8 は、E4 の場合の解析結果であり、 α を変化させると、飛び移り前までおよび飛び移り以降の挙動にはほとんど変化はないが、 α を大きくするにしたがって、Snap-Through 荷重、Snap-Back 荷重も大きくなる。シェル厚が E4 ($h_0=0.2m$) より厚い場合には、同様な挙動を示す。しかしながら、Fig.9 に示すようにシェル厚が薄い E5 ($h_0=0.12m$) の場合には、 α を大きくするにしたがって、Snap-Through 荷重は大きくなり、逆に Snap-Back 荷重は小さくなる。

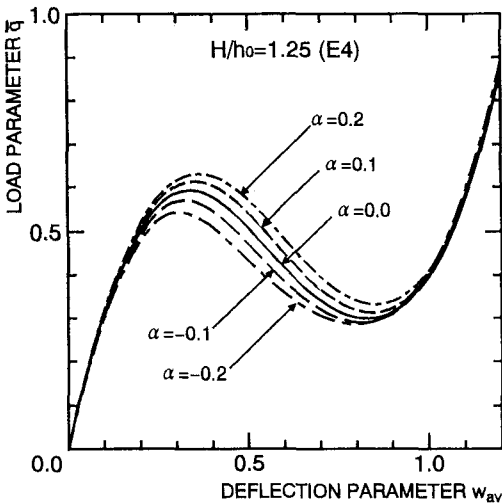


Fig.8 変厚E.P.シェルの荷重～たわみ曲線 (E4)

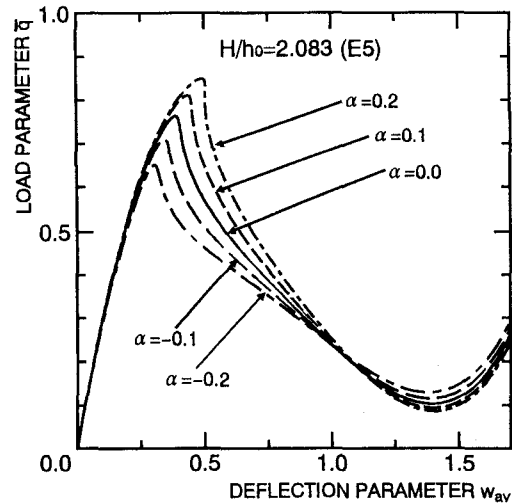


Fig.9 変厚E.P.シェルの荷重～たわみ曲線 (E5)

さらに、シェル厚および α を変化させた場合の変厚偏平E.P.シェルに関して、Snap-Through 荷重、および Snap-Back 荷重を Table 2 に示す。括弧内の数値は、Leicester⁸⁾ による等厚な偏平シェル ($\alpha=0.0$) の場合の座屈荷重であり、本解法による結果はこれらの値とほぼ一致している。

Table 2 変厚偏平E.P.シェルの座屈荷重

	Load Parameter, $\bar{q}$									
	Snap-Through					Snap-Back				
	$\alpha=0.2$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.0$	$\alpha=-0.1$	$\alpha=-0.2$	$\alpha=0.2$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.0$	$\alpha=-0.1$	$\alpha=-0.2$
E1	—	—	— (—)	—	—	—	—	— (—)	—	—
E2	—	—	0.603 (0.600)	0.581	0.558	—	—	0.602 (0.594)	0.578	0.555
E3	0.608	0.590	0.571 (0.570)	0.550	0.527	0.461	0.436	0.414 (0.400)	0.397	0.383
E4	0.631	0.613	0.593 (0.594)	0.570	0.544	0.332	0.313	0.299 (0.289)	0.290	0.286
E5	0.849	0.812	0.765 (0.772)	0.711	0.651	0.087	0.094	0.104 (0.114)	0.116	0.131

4. 2 非対称座屈

偏平シェルに関しては、シェル厚が薄い場合には、対称座屈荷重値よりも小さい座屈荷重値を示す非対称座屈を起こす場合がある。ここでは、非対称座屈挙動を明らかにするために、シェル厚が薄い場合についての幾何学的非線形解析を行った。非対称座屈問題においては、 $y = 0.5b$ の 1 軸対称性を考慮して 1/2 部分を対象とした場合の解析を行った。非対称座屈挙動を追跡するために、初期不整として、 $x = 0.5a$ に関して逆対称な微小荷重を初期の段階で与えている。なお、解析においては 1/2 部分の横縦方向の分割数は、十分に収束した解が得られる分割数 $m=10$ 、 $n=5$ とした。

Fig.10 は、非対称座屈を起こす偏平E.P.シェル (E6) の荷重～たわみ曲線である。同図の実線は対称座屈挙動の場合であり、途中、点①において破線の非対称座屈挙動に移行している。分岐座屈荷重値は $\bar{q}=0.816$ であり、Leicester⁸⁾ による荷重値 $\bar{q}=0.801$ との差は 2 % 以内である。また、Fig.11 には代表的な荷重段階 (Fig.

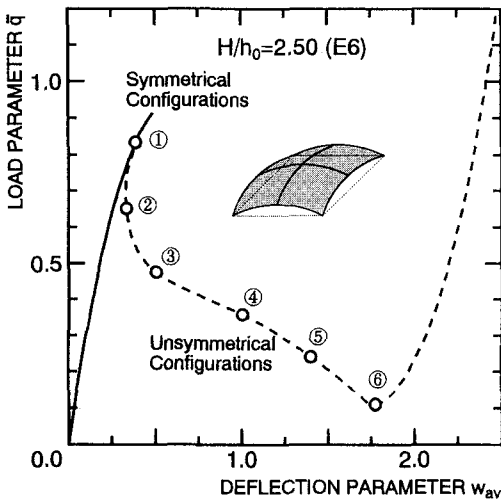


Fig.10 E.P.シェルの非対称座屈挙動

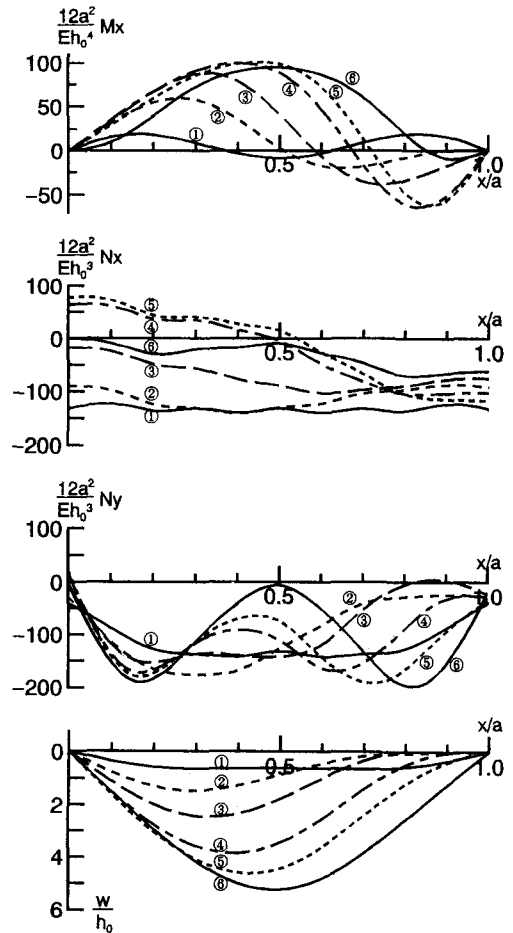


Fig.11 非対称座屈挙動におけるE.P.シェルの断面力およびたわみの分布

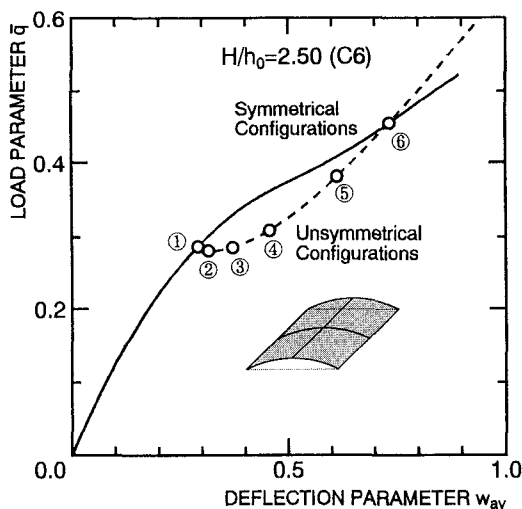


Fig.12 円筒シェルの非対称座屈挙動

10 の点①～⑥) での、 $y=0.5b$ 上の曲げモーメント、面内力およびたわみの分布を示す。同図より曲げモーメント、面内力、たわみの分布は、対称な分布(点①)から非対称な分布に移り(点②～⑤)、やがてまた対称な分布(点⑥)となっていく。 N_x の分布は、はじめ圧縮力であり(点①～③)、引張力も生じるが(点④,⑤)、やがてまた圧縮力となっている(点⑥)。

さらに、Fig.12 には、非対称座屈を起こす偏平円筒シェル(C6)の荷重～たわみ曲線を示している。分岐座屈荷重値は $\bar{q}=0.284$ であり、Leicester⁸⁾による荷重値 $\bar{q}=0.280$ との差は、これも2%以内である。また、Fig.13 には代表的な荷重段階(Fig.12 の点①～⑥)での、 $y=0.5b$ 上の曲げモーメント、面内力およびたわみの分布を示す。偏平円筒シェルの場合には、分岐後は、非対称変形から対称変形に戻ることはなく(点⑥)、非対称変形が進行していく。また、曲げモーメント、面内力 N_y およびたわみの分布は、各荷重段階において大きく変化しているが、 N_x の分布はさほど変化は見られない。 N_y の分布は、はじめ圧縮力であったのが(点①,②)、引張力へと大きく変化している(点③～⑥)。

5. あとがき

本研究は、変厚偏平シェルの幾何学的非線形問題の一解析法として、基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用とにより、変厚偏平シェルの基礎微分方程式の離散解を求め、これに基づく一般的な解法を提示した。数値解析の結果から、本解法による数値解は既往数値解と比較しても、実用上十分の精度をもつ解が得られることが確認された。

変厚偏平シェルに関しても、本解析法によればシェル厚、シェル剛度の場所的变化が不規則で関数表示されない場合でも離散点におけるこれらの諸量の値が与えられれば、諸量が規則的な場合とまったく

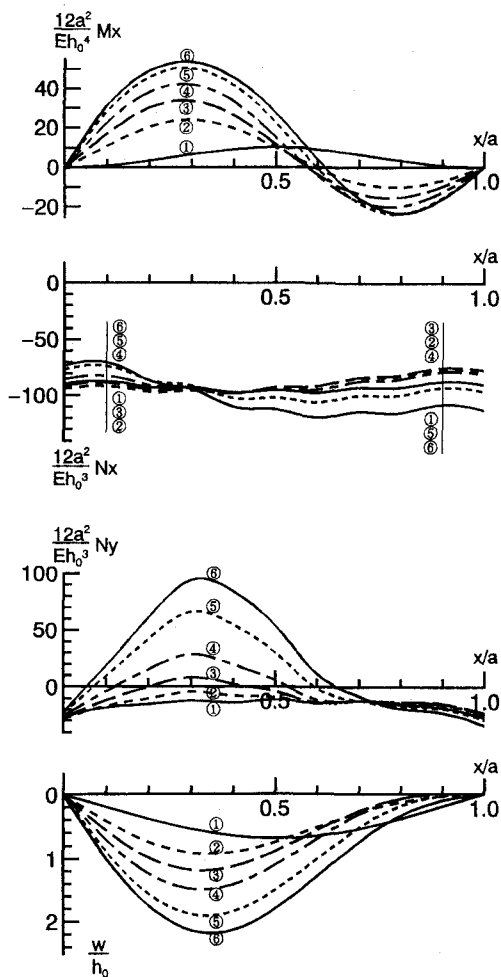


Fig.13 非対称座屈挙動における円筒シェルの断面力およびたわみの分布

同様に解析することができる。

対称座屈挙動に関しての、断面力およびたわみの分布は、変形の増加とともに曲げモーメントは増大するが、面内力はあまり増大せず N_x は圧縮力から引張力へと移行し、 N_y は中央部分の圧縮力が減少していく。

対称座屈荷重値よりも小さい座屈荷重値を示す非対称座屈挙動に関しての、断面力およびたわみの分布は、E.P. シェルの場合には、対称な分布から非対称な分布に移り、やがてまた対称な分布となっている。円筒シェルの場合には、曲げモーメント、面内力 N_y およびたわみの分布は、各荷重段階において大きく変化しているが、 N_x の分布はさほど変化は見られない。

本解析法は、積分方程式の数値解法であるため、境界要素法と同様に、最終的に解くべきマトリックスの次元を低減できる。また、式(3)の係数 $a_{pijfd}, b_{pijgd}, \Delta q_{pij}$ の計算に本解析法では時間がかかるが、これらの係数は独立に計算できるため、トランスペューターなどの並列計算機を用いるとかなり計算時間を低減できるものと思われる。

本論文では、移動不可なる四辺単純支持の場合のみを取り扱ったが、偏平シェルの場合は周辺の推力も大きくなり、周辺の支持条件の差異によりその力学的特性も大きく変化してくるもの考えられる。今後は、対称および非対称座屈挙動に関して、周辺の支持条件に着目した数値解析、および材料非線形性をも含めた複合非線形解析へ拡張していく予定である。

Appendix I

$$\Delta N_c = \Delta N_x \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} + \Delta N_y \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} + 2\Delta N_{xy} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} \quad \Delta W_{xc} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right)^2 \quad \Delta W_{yc} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right)^2 \quad \Delta W_{xyc} = \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y}$$

Appendix II

$$\begin{aligned} F_{10111} &= F_{10212} = F_{10301} = F_{10403} = F_{10504} = F_{10706} = F_{10807} = F_{11008} = F_{11209} = F_{11310} = F_{20607} = F_{20908} = F_{30907} = 1 \\ F_{20113} &= F_{20211} = F_{20302} = F_{20405} = F_{20503} = F_{20806} = F_{21110} = F_{21309} = -F_{30402} = -F_{30501} = F_{31006} = \mu \quad F_{30102} = -\bar{k}_x \\ F_{30201} &= -\bar{k}_y \quad F_{30303} = -IX_{11} \quad F_{30304} = -\mu I(X_{12} - \nu X_{13}) \quad F_{30305} = -\mu I(X_{13} - \nu X_{12}) \quad F_{30311} = 2\bar{k}_{xy} - JX_3 \\ F_{30312} &= \bar{k}_y - \mu I(X_4 - \nu X_5) \quad F_{30313} = \bar{k}_x - \mu I(X_5 - \nu X_4) \quad F_{30604} = \nu I \quad F_{30605} = -I \quad F_{30704} = -\mu I \quad F_{30705} = \nu \mu I \quad F_{30803} = -J \\ F_{30902} &= -K \quad F_{31001} = -\mu K \quad F_{31102} = \mu K(KX_2 - X_7) \quad F_{31107} = -\mu(KX_2 - X_7) \quad F_{31108} = -\bar{k}_x \quad F_{31112} = \nu L_1 \quad F_{31113} = -L_1 \\ F_{31201} &= \mu K(KX_1 - X_6) \quad F_{31206} = -\mu(KX_1 - X_6) \quad F_{31208} = -\bar{k}_y \quad F_{31212} = -L_1 \quad F_{31213} = \nu L_1 \quad F_{31301} = \mu K(KX_2 - X_7) \\ F_{31302} &= \mu K(KX_1 - X_6) \quad F_{31306} = -\mu(KX_2 - X_7) \quad F_{31307} = -\mu(KX_1 - X_6) \quad F_{31308} = -2\bar{k}_{xy} \quad F_{31311} = -L_2 \\ f_{03} &= \Delta \bar{N}_c + \Delta \bar{q} \quad f_{11} = \mu \Delta W_{xc} \quad f_{12} = \mu \Delta W_{yc} \quad f_{13} = \mu \Delta W_{xyc} \quad \text{Other } F_{kls} = f_l = 0 \end{aligned}$$

Appendix III

$$\begin{aligned} A_{p01} &= \gamma_{p03} \quad A_{p02} = 0 \quad A_{p03} = \gamma_{p04} \quad A_{p04} = \gamma_{p05} \quad A_{p05} = 0 \quad A_{p06} = \gamma_{p07} \quad A_{p07} = \gamma_{p08} \quad A_{p08} = \gamma_{p10} \quad A_{p09} = \gamma_{p12} \\ A_{p10} &= \gamma_{p13} \quad A_{p11} = \gamma_{p01} \quad A_{p12} = \gamma_{p02} \quad A_{p13} = 0 \quad B_{p01} = 0 \quad B_{p02} = \mu \gamma_{p03} \quad B_{p03} = \mu \gamma_{p05} \quad B_{p04} = 0 \quad B_{p05} = \mu \gamma_{p04} \\ B_{p06} &= \mu \gamma_{p08} \quad B_{p07} = \gamma_{p06} \quad B_{p08} = \gamma_{p09} \quad B_{p09} = \mu \gamma_{p13} \quad B_{p10} = \mu \gamma_{p11} \quad B_{p11} = \mu \gamma_{p02} \quad B_{p12} = 0 \quad B_{p13} = \mu \gamma_{p01} \\ C_{p01kl} &= \bar{k}_y \gamma_{p02} + \mu \gamma_{p05} + \mu K_{kl} \gamma_{p10} - \mu K_{kl} \gamma_{p12} (K_{kl} X_{1kl} - X_{6kl}) - \mu K_{kl} \gamma_{p13} (K_{kl} X_{2kl} - X_{7kl}) \\ C_{p02kl} &= \bar{k}_x \gamma_{p01} + \mu \gamma_{p05} + K_{kl} \gamma_{p09} - \mu K_{kl} \gamma_{p11} (K_{kl} X_{2kl} - X_{7kl}) - \mu K_{kl} \gamma_{p13} (K_{kl} X_{1kl} - X_{6kl}) \\ C_{p03kl} &= J_{kl} (\gamma_{p08} + \gamma_{p03} X_{11kl}) \quad C_{p04kl} = I_{kl} (\mu \gamma_{p07} - \nu \gamma_{p06} + \mu \gamma_{p03} (X_{12kl} - \nu X_{13kl})) \quad C_{p05kl} = I_{kl} (\gamma_{p06} - \mu \nu \gamma_{p07} + \mu \gamma_{p03} (X_{13kl} - \nu X_{12kl})) \\ C_{p06kl} &= -\mu \gamma_{p10} + \mu \gamma_{p12} (K_{kl} X_{1kl} - X_{6kl}) + \mu \gamma_{p13} (K_{kl} X_{2kl} - X_{7kl}) \quad C_{p07kl} = -\gamma_{p09} + \mu \gamma_{p11} (K_{kl} X_{2kl} - X_{7kl}) + \mu \gamma_{p13} (K_{kl} X_{1kl} - X_{6kl}) \\ C_{p08kl} &= \bar{k}_x \gamma_{p11} + \bar{k}_y \gamma_{p12} + 2\bar{k}_{xy} \gamma_{p13} \quad C_{p09kl} = 0 \quad C_{p10kl} = 0 \quad C_{p11kl} = (-2\bar{k}_{xy} + J_{kl} X_{3kl}) \gamma_{p03} + L_{2kl} \gamma_{p13} \\ C_{p12kl} &= (-\bar{k}_y + \mu I_{kl} (X_{4kl} - \nu X_{5kl})) \gamma_{p03} + L_{1kl} \gamma_{p12} - \nu L_{1kl} \gamma_{p11} \quad C_{p13kl} = (-\bar{k}_x + \mu I_{kl} (X_{5kl} - \nu X_{4kl})) \gamma_{p03} + L_{1kl} \gamma_{p11} - \nu L_{1kl} \gamma_{p12} \end{aligned}$$

$$[\gamma_{pt}] = [\rho_{pt}]^{-1} \quad (p = 1 \sim 13, t = 1 \sim 13)$$

$$\begin{aligned} \rho_{0102} &= -\beta_{ij} \bar{k}_x & \rho_{0111} &= \beta_{ii} & \rho_{0113} &= \mu \beta_{jj} & \rho_{0201} &= -\beta_{ij} \bar{k}_y & \rho_{0211} &= \mu \beta_{jj} & \rho_{0212} &= \beta_{ii} & \rho_{0301} &= \beta_{ii} & \rho_{0302} &= \mu \beta_{jj} \\ \rho_{0303} &= -\beta_{ij} I_{ij} X_{11ij} & \rho_{0304} &= -\mu \beta_{ij} I_{ij} (X_{12ij} \nu X_{13ij}) & \rho_{0305} &= -\mu \beta_{ij} I_{ij} (X_{13ij} \nu X_{12ij}) & \rho_{0311} &= \beta_{ij} (2\bar{k}_{xy} - J_{ij} X_{3ij}) \\ \rho_{0312} &= \beta_{ij} (\bar{k}_y - \mu I_{ij} (X_{4ij} \nu X_{5ij})) & \rho_{0313} &= \beta_{ij} (\bar{k}_x - \mu I_{ij} (X_{5ij} \nu X_{4ij})) & \rho_{0402} &= -\mu \beta_{ij} & \rho_{0403} &= \beta_{ii} & \rho_{0405} &= \mu \beta_{jj} & \rho_{0501} &= -\mu \beta_{ij} \\ \rho_{0503} &= \mu \beta_{jj} & \rho_{0504} &= \beta_{ii} & \rho_{0604} &= \nu \beta_{ij} I_{ij} & \rho_{0605} &= -\beta_{ij} I_{ij} & \rho_{0607} &= \beta_{ij} & \rho_{0704} &= -\mu \beta_{ij} I_{ij} & \rho_{0705} &= \nu \mu \beta_{ij} I_{ij} & \rho_{0706} &= \beta_{ii} \\ \rho_{0803} &= -\beta_{ij} J_{ij} & \rho_{0806} &= \mu \beta_{jj} & \rho_{0807} &= \beta_{ii} & \rho_{0902} &= -\beta_{ij} K_{ij} & \rho_{0907} &= \beta_{ij} & \rho_{0908} &= \beta_{ij} & \rho_{1001} &= -\mu \beta_{ij} K_{ij} & \rho_{1006} &= \mu \beta_{ij} \\ \rho_{1008} &= \beta_{ii} & \rho_{1102} &= \mu \beta_{ij} K_{ij} (K_{ij} X_{2ij} X_{7ij}) & \rho_{1107} &= \mu \beta_{ij} (K_{ij} X_{2ij} X_{7ij}) & \rho_{1108} &= -\beta_{ij} \bar{k}_x & \rho_{1110} &= \mu \beta_{jj} & \rho_{1112} &= \nu \beta_{ij} L_{ij} \\ \rho_{1113} &= -\beta_{ij} L_{ij} & \rho_{1201} &= \mu \beta_{ij} K_{ij} (K_{ij} X_{1ij} X_{6ij}) & \rho_{1206} &= -\mu \beta_{ij} (K_{ij} X_{1ij} X_{6ij}) & \rho_{1208} &= -\beta_{ij} \bar{k}_y & \rho_{1209} &= \beta_{ii} & \rho_{1212} &= -\beta_{ij} L_{ij} \\ \rho_{1213} &= \nu \beta_{ij} L_{ij} & \rho_{1301} &= \mu \beta_{ij} K_{ij} (K_{ij} X_{2ij} X_{7ij}) & \rho_{1302} &= \mu \beta_{ij} K_{ij} (K_{ij} X_{1ij} X_{6ij}) & \rho_{1306} &= -\mu \beta_{ij} (K_{ij} X_{2ij} X_{7ij}) \\ \rho_{1307} &= -\mu \beta_{ij} (K_{ij} X_{1ij} X_{6ij}) & \rho_{1308} &= -2\bar{k}_{xy} \beta_{ij} & \rho_{1309} &= \mu \beta_{jj} & \rho_{1310} &= \beta_{ii} & \rho_{1311} &= -\beta_{ij} L_{2ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{pijfd} &= \sum_{i=1}^{13} \left\{ \sum_{k=0}^i \beta_{ik} A_{pi} [a_{kqfd} - a_{kifd} (1 - \delta_{ki})] + \sum_{l=0}^j \beta_{jl} B_{pj} [a_{lqfd} - a_{lifd} (1 - \delta_{lj})] + \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \beta_{ik} \beta_{jl} C_{ptkl} a_{klfd} (1 - \delta_{ki} \delta_{lj}) \right\} \\ b_{pijgd} &= \sum_{i=1}^{13} \left\{ \sum_{k=0}^i \beta_{ik} A_{pi} [b_{kqgd} - b_{kigd} (1 - \delta_{ki})] + \sum_{l=0}^j \beta_{jl} B_{pj} [b_{lqgd} - b_{ligd} (1 - \delta_{lj})] + \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \beta_{ik} \beta_{jl} C_{ptkl} b_{klgd} (1 - \delta_{ki} \delta_{lj}) \right\} \\ \Delta q_{pij} &= \sum_{i=1}^{13} \left\{ \sum_{k=0}^i \beta_{ik} A_{pi} [\Delta q_{k0} - \Delta q_{ki} (1 - \delta_{ki})] + \sum_{l=0}^j \beta_{jl} B_{pj} [\Delta q_{l0} - \Delta q_{lj} (1 - \delta_{lj})] + \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \beta_{ik} \beta_{jl} C_{ptkl} \Delta q_{kl} (1 - \delta_{ki} \delta_{lj}) \right\} \\ &\quad - \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \beta_{ik} \beta_{jl} A_{p1} \Delta q_{kl} \end{aligned}$$

参考文献

- 1) Th.von Kármán and H.S.Tsin : The Buckling of Spherical Shells by External Pressure, J. Aeron. Sci., 7-2 (1939-12), 43.
- 2) B.Budiansky : Buckling of Clamped Shallow Spherical Shells, Proc. IUTAM Symp. Theory Thin Elastic Shells, Delft, The Netherlands, pp.64-94, 1959.
- 3) H.J.Weinitschke : On the Stability Problem of Shallow Spherical Shells, J. Math. Phys., vol.38, pp.209-231, 1960.
- 4) N.C.Huang : Unsymmetrical Buckling of Thin Shallow Spherical Shells, J. Appl. Mech., vol.31, pp.447-457, 1964.
- 5) A.Kaplan and Y.C.Fung : A Nonlinear Theory of Bending and Buckling of Thin Elastic Shallow Spherical Shells, N.A.C.A. T.N. No.3121.
- 6) R.H.Homewood, A.C.Brine and A.E.Johnson : Experimental Investigation of the Buckling Instability of Monocoque Shells, Experimental Mechanics, 1961.
- 7) 角野晃二, 三井和男, 小沢善隆 : 部分球形殻の外圧による座屈解析, 日本機械学会論文集(A編), 49巻, 442号, pp.731-739, 1983.
- 8) R.H.Leicester : Finite Deformation of Shallow Shells, Proc. of ASCE, vol.94, No.EM6, pp.1409-1423, 1968.
- 9) E.Ramm : Geometrisch Nichtlineare Elastostatik und Finite Elemente, Habilitation, Universität Stuttgart Bericht, Nr.76-2, 1976.
- 10) 崎山 毅, 松田 浩 : 変厚矩形板の曲げの一解析法, 土木学会論文報告集, 第338号, pp.21-28, 1983.
- 11) 森田千尋, 崎山 毅, 松田 浩 : 矩形板の幾何学的非線形問題の一解析法, 構造工学論文集, vol.37A, pp.279-286, 1991.
- 12) 坪井善勝 : 連続体力学序説, 産業図書, 1977.
- 13) J.N.Reddy : Exact Solution of Moderately Thick Laminated Shells, J. Engng. Mech. ASCE, Vol.110, No.5, pp.794-809, 1984.

(1993年9月16日受付)