

積層偏平シェルの弾性曲げ解析

BENDING ANALYSIS OF LAMINATED COMPOSITE SHALLOW SHELLS

松田 浩* 森田千尋** 崎山 毅*** 西村一朗****

By Hiroshi MATSUDA, Chihiro MORITA, Takeshi SAKIYAMA and Ichirou NISHIMURA

A generalized formulation for the laminated composite shallow shells is attempted by using a discrete method. By transforming the differential equations into integral equations and applying the numerical integration, the discrete solutions can be obtained. By using the present method, symmetrical and antisymmetrical cross-ply and angle-ply composite shallow shells (elliptic-, hyperbolic-, cylindrical-, paraboloidal shells) having the arbitrary boundary conditions and load conditions can be calculated. In the numerical examples, the results of symmetrical and antisymmetrical cross-ply composite elliptic paraboloidal shallow shells are shown.

Key words : laminated composite, shallow shells, cross-ply, a discrete method

1. まえがき

軽量、高比強度、高比剛性をもつカーボン、ボロン、アラミドなどの新素材と、プラスチック基材とを組み合わせた複合強化プラスチック（FRP）に関する技術の発達にはめざましいものがあり、これまで、航空・宇宙工学などの構造軽量化が重要な分野において研究開発が進められているが、複合材料の高耐久性にも注目して、土木・建築の様々な分野においても使用されつつある。

積層板は、通常、直交異方性を有する一方向強化板、クロス強化板などのラミナを接着積層させて製作される。直交異方性ラミナからなる複合積層構造は、その積層の順序は任意であるが、対称、逆対称に積層することにより、各々、対称積層板、逆対称積層板と呼ばれ、さらに、ラミナの配向角によりクロスプライおよびアングルプライと呼ばれる積層板となる。これらの積層板は強化繊維方向の弾性係数比、積層数、配向角などにより異なった力学的特性を有しているので、適当に組み合わせることにより構造力学的に有利な構造を設計することもできる。本論文は、対称積層、逆対称積層、クロスプライおよびアングルプライの積層板、積層シェルを対象としたものである。

* 工博 長崎大学助教授 工学部構造工学科 (〒852 長崎市文教町1-14)

** 工修 長崎大学助手 工学部構造工学科 (〒852 長崎市文教町1-14)

*** 工博 長崎大学教授 工学部構造工学科 (〒852 長崎市文教町1-14)

**** 長崎大学大学院生 工学研究科構造工学専攻 (〒852 長崎市文教町1-14)

積層板に関する研究は、前述したように、航空・宇宙工学の分野で盛んに行われており、一次せん断変形理論、高次せん断変形理論などを含めて、その動向は文献1)に詳述されている。一方、積層シェルに関する研究には次のようなものがある。Reddy²⁾は、単純支持された二重曲率をもつクロスプライ積層シェルを対象として厳密解を与えている。Jeyachandrabose⁴⁾は、高次の三角形シェル要素を用いて偏平シェルのFEM解析を行っている。Dey⁵⁾は、8節点曲線アイソパラメトリック要素を用いて、二重曲率をもつ積層シェルを一般的に定式化し、逆対称クロスプライ、および、アングルプライ積層シェルについてパラメトリック解析を行っている。Jiarang⁶⁾は、直交異方性をもつ二重曲率シェルの支配方程式を定式化し、Cayley-Hamiltonの定理を用いて単純支持の積層シェルに対する解析解を与え、文献2)と比較しているが、精度の面から検討の余地が残されていると思われる。

以上のように、積層シェルの弾性曲げ問題に関して解析解およびFEM解が与えられているが、解析解では限られた境界条件に限定されており、また、FEM解では解析解との比較における精度の問題等がある。したがって、積層偏平シェルの弾性曲げ問題について、任意の境界条件および荷重条件に対する解析の容易さおよび方法の一般性という観点に立てば、積層偏平シェルの解法に関してまだ検討の余地が残されているものと考えられる。

本論文は、積層偏平シェルの幾何学的非線形および弾塑性などの問題を解析する上で、それらの基礎となる線形曲げ問題を、著者らの一部が既に提示した離散化手法^{7,8)}に基づく解析手法を提示したものである。本解析法は、一次せん断変形理論に基づき定式化したもので、数値計算例として、4辺可動単純支持（ローラー支持）、4辺単純支持（ピン支持）、4辺固定の境界条件を有する偏平E.P.シェルに対して、ラミナの積層数、配向角、シェル厚、シェルの曲率などの変化に注目したパラメトリックな解析を行い、既往の解析解およびFEM解と比較した。

2. 積層偏平シェルの基礎微分方程式

Fig. 1. に示されるような曲率半径 R_x, R_y が比較的大きく、 n 層のラミナからなり、投影形状が矩形となる積層偏平シェルの中央面でのせん断力を Q_y, Q_x 、ねじりモーメントを M_{xy} 、曲げモーメントを M_y, M_x 、たわみ角を θ_y, θ_x 、たわみを w 、面内変位を v, u 、面内力を N_{xy}, N_y, N_x 、および積層シェルに作用する接線方向、垂直方向の外力を q_x, q_y, q_z 、とすると一次せん断変形理論に基づく積層偏平シェルの曲げに関する基礎微分方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - k_x Q_x + q_x = 0 \quad (1-1)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - k_y Q_y + q_y = 0 \quad (1-2)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + k_x N_x + k_y N_y + 2k_{xy} N_{xy} + q_z = 0 \quad (1-3)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (1-4)$$

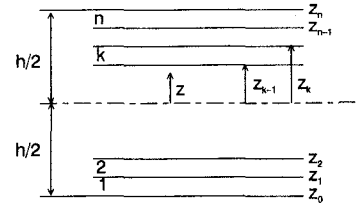
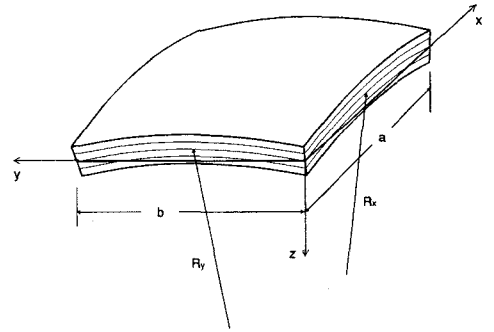


Fig. 1. 積層偏平シェルの座標系

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \quad (1-5)$$

$$M_x = B_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - k_x w \right) + B_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - k_y w \right) + B_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{xy} w \right) + D_{11} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + D_{16} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (1-6)$$

$$M_y = B_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - k_x w \right) + B_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - k_y w \right) + B_{26} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{xy} w \right) + D_{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + D_{26} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (1-7)$$

$$M_{xy} = B_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - k_x w \right) + B_{26} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - k_y w \right) + B_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{xy} w \right) + D_{16} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + D_{66} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (1-8)$$

$$Q_y = \kappa A_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) + \kappa A_{45} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right) \quad (1-9) \quad Q_x = \kappa A_{45} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) + \kappa A_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right) \quad (1-10)$$

$$N_x = A_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - k_x w \right) + A_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - k_y w \right) + A_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{xy} w \right) + B_{11} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + B_{16} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (1-11)$$

$$N_y = A_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - k_x w \right) + A_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - k_y w \right) + A_{26} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{xy} w \right) + B_{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + B_{26} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (1-12)$$

$$N_{xy} = A_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - k_x w \right) + A_{26} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - k_y w \right) + A_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{xy} w \right) + B_{16} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + B_{66} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (1-13)$$

ここに、 $q_x = q_x(x, y)$, $q_y = q_y(x, y)$, $q_z = q_z(x, y)$: 接線方向、垂直方向の荷重強度、 $A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1})$: 積層

シエルの面内剛性、 $B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2)$: 積層シエルのカップリング剛性、

$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3)$: 積層シエルの曲げ剛性、 $\bar{Q}_{ij}$: 各層における任意方向の弾性係数、

$\kappa = 5/6$: セン断修正係数、 k_x, k_y : x, y 方向の曲率、 k_{xy} : ねじれ率

式(1-1)～(1-13)において、次の無次元量 $X_1 \sim X_{13}$ および η, ζ, ξ

$$(X_1, X_2) = \frac{a^2}{D\alpha(1 - \nu_L \nu_T \nu_{TL})} (Q, Q_x), \quad (X_3, X_4, X_5) = \frac{a}{D\alpha(1 - \nu_L \nu_T \nu_{TL})} (M_{xy}, M_y, M_x), \quad (X_6, X_7) = (\theta_y, \theta_x),$$

$$(X_8, X_9, X_{10}) = \frac{1}{a} (w, v, u), \quad (X_{11}, X_{12}, X_{13}) = \frac{a^2}{D\alpha(1 - \nu_L \nu_T \nu_{TL})} (N_{xy}, N_y, N_x), \quad \eta = \frac{x}{a}, \quad \zeta = \frac{y}{b}, \quad \xi = \frac{z}{h}$$

を用いると、式(1-1)～(1-13)は次のように書き表せる。

$$\mu \frac{\partial X_{13}}{\partial \eta} + \frac{\partial X_{11}}{\partial \zeta} - \bar{k}_x X_2 = -\bar{q}_x \quad (2-1)$$

$$\frac{\partial X_{12}}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial X_{11}}{\partial \eta} - \bar{k}_y X_1 = -\bar{q}_y \quad (2-2)$$

$$\mu \frac{\partial X_2}{\partial \eta} + \frac{\partial X_1}{\partial \zeta} + \bar{k}_x X_{13} + \bar{k}_{12} X_y + 2\bar{k}_{xy} X_{11} = -\bar{q}_z \quad (2-3)$$

$$\mu \frac{\partial X_5}{\partial \eta} + \frac{\partial X_3}{\partial \zeta} = \mu X_2 \quad (2-4)$$

$$\frac{\partial X_4}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial X_3}{\partial \eta} = \mu X_1 \quad (2-5)$$

$$\bar{B}_{11} \left(\mu \frac{\partial X_{10}}{\partial \eta} - \bar{k}_x X_8 \right) + \bar{B}_{12} \left(\frac{\partial X_9}{\partial \zeta} - \bar{k}_y X_8 \right) + \bar{B}_{16} \left(\frac{\partial X_{10}}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial X_9}{\partial \eta} - 2\bar{k}_{xy} X_8 \right) + \bar{D}_{11} \mu \frac{\partial X_7}{\partial \eta} + \bar{D}_{12} \frac{\partial X_6}{\partial \zeta} + \bar{D}_{16} \left(\frac{\partial X_7}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial X_6}{\partial \eta} \right) = IX_5 \quad (2-6)$$

$$\bar{B}_{12} \left(\mu \frac{\partial X_{10}}{\partial \eta} - \bar{k}_x X_8 \right) + \bar{B}_{22} \left(\frac{\partial X_9}{\partial \zeta} - \bar{k}_y X_8 \right) + \bar{B}_{26} \left(\frac{\partial X_{10}}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial X_9}{\partial \eta} - 2\bar{k}_{xy} X_8 \right) + \bar{D}_{12} \mu \frac{\partial X_7}{\partial \eta} + \bar{D}_{22} \frac{\partial X_6}{\partial \zeta} + \bar{D}_{26} \left(\frac{\partial X_7}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial X_6}{\partial \eta} \right) = IX_4 \quad (2-7)$$

$$\bar{B}_{16} \left(\mu \frac{\partial X_{10}}{\partial \eta} - \bar{k}_x X_8 \right) + \bar{B}_{26} \left(\frac{\partial X_9}{\partial \zeta} - \bar{k}_y X_8 \right) + \bar{B}_{66} \left(\frac{\partial X_{10}}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial X_9}{\partial \eta} - 2\bar{k}_{xy} X_8 \right) + \bar{D}_{16} \mu \frac{\partial X_7}{\partial \eta} + \bar{D}_{26} \frac{\partial X_6}{\partial \zeta} + \bar{D}_{66} \left(\frac{\partial X_7}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial X_6}{\partial \eta} \right) = IX_3 \quad (2-8)$$

$$\kappa \bar{A}_{44} \left(\frac{\partial X_8}{\partial \zeta} + \mu X_6 \right) + \kappa \bar{A}_{45} \left(\mu \frac{\partial X_8}{\partial \eta} + \mu X_7 \right) = IX_1 \quad (2-9) \quad \kappa \bar{A}_{45} \left(\frac{\partial X_8}{\partial \zeta} + \mu X_6 \right) + \kappa \bar{A}_{55} \left(\mu \frac{\partial X_8}{\partial \eta} + \mu X_7 \right) = IX_2 \quad (2-10)$$

$$\bar{A}_{11} \left(\mu \frac{\partial X_{10}}{\partial \eta} - \bar{k}_x X_8 \right) + \bar{A}_{12} \left(\frac{\partial X_9}{\partial \zeta} - \bar{k}_y X_8 \right) + \bar{A}_{16} \left(\frac{\partial X_{10}}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial X_9}{\partial \eta} - 2\bar{k}_{xy} X_8 \right) + \bar{B}_{11} \mu \frac{\partial X_7}{\partial \eta} + \bar{B}_{12} \frac{\partial X_6}{\partial \zeta} + \bar{B}_{16} \left(\frac{\partial X_7}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial X_6}{\partial \eta} \right) = IX_{13} \quad (2-11)$$

$$\bar{A}_{12} \left(\mu \frac{\partial X_{10}}{\partial \eta} - \bar{k}_x X_8 \right) + \bar{A}_{22} \left(\frac{\partial X_9}{\partial \zeta} - \bar{k}_y X_8 \right) + \bar{A}_{26} \left(\frac{\partial X_{10}}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial X_9}{\partial \eta} - 2\bar{k}_{xy} X_8 \right) + \bar{B}_{12} \mu \frac{\partial X_7}{\partial \eta} + \bar{B}_{22} \frac{\partial X_6}{\partial \zeta} + \bar{B}_{26} \left(\frac{\partial X_7}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial X_6}{\partial \eta} \right) = IX_{12} \quad (2-12)$$

$$\bar{A}_{16} \left(\mu \frac{\partial X_{10}}{\partial \eta} - \bar{k}_x X_8 \right) + \bar{A}_{26} \left(\frac{\partial X_9}{\partial \zeta} - \bar{k}_y X_8 \right) + \bar{A}_{66} \left(\frac{\partial X_{10}}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial X_9}{\partial \eta} - 2\bar{k}_{xy} X_8 \right) + \bar{B}_{16} \mu \frac{\partial X_7}{\partial \eta} + \bar{B}_{26} \frac{\partial X_6}{\partial \zeta} + \bar{B}_{66} \left(\frac{\partial X_7}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial X_6}{\partial \eta} \right) = IX_{11} \quad (2-13)$$

ここに、 a, b : 積層シエルの矩形Base辺長、 h_0 : 基準シエル厚、 q_0 : 基準荷重強度、 $\mu = \frac{a}{b}$ 、 $\bar{q} = \mu \kappa \frac{q}{q_0}$ 、

$$K = \frac{q\omega^3}{D\alpha(1-\nu_L\nu_{TL})}, \quad \bar{A}_{ij} = 12\left(\frac{a}{h}\right)^2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{\bar{Q}_{ij}}{E_T}\right)_k (x_k - x_{k-1}), \quad \bar{B}_{ij} = 6\left(\frac{a}{h}\right) \sum_{k=1}^n \left(\frac{\bar{Q}_{ij}}{E_T}\right)_k (x_k^2 - x_{k-1}^2),$$

$$\bar{D}_{ij} = 4 \sum_{k=1}^n \left(\frac{\bar{Q}_{ij}}{E_T}\right)_k (x_k^3 - x_{k-1}^3), \quad I = I_0 \left(\frac{h_0}{h}\right)^3, \quad D_0 = \frac{E_T h_0^3}{12(1-\nu_L\nu_{TL})}, \quad (\bar{k}_x, \bar{k}_y, \bar{k}_{xy}) = b(k_x, k_y, k_{xy})$$

3. 基礎微分方程式の離散解

基礎微分方程式(2-1)～(2-13)を任意の荷重条件および境界条件のもとでその解析解を一般的に得ることは困難であるため、Fig. 2. 示すような積層偏平シェルの縦横等分割線の交点を対象として、これらの離散点における基礎微分方程式の近似解を求めることとする。

Fig. 2. 示すようにシェルを横、縦方向にそれぞれ m, n 等分し、これらの等分割線の交点の集合体とみなす。ここで、任意の交点 (i, j) に関連する矩形領域 $0 \leq \eta \leq \eta_i, 0 \leq \xi \leq \xi_j$ に注目しこれを領域 $[i, j]$ と表記することとする。また、◎印を付けた交点を任意領域 $[i, j]$ の主要点、○印を付けた交点を内部従属点、●印を付けた交点を境界従属点と称して区別することとする。

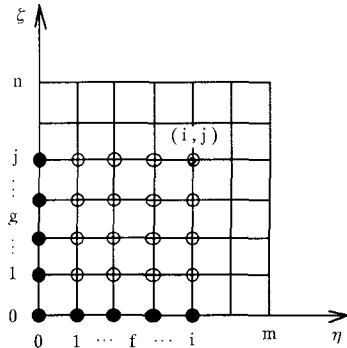


Fig. 2. 積層偏平シェルの矩形の離散点

はじめに、基礎微分方程式 (2-1)～(2-13) の各式を領域 $[i, j]$ において面積分し、積分方程式に変換する。次に、等間隔の数値積分法の応用により、これらの積分方程式を離散表示すれば、無次元化された断面力および変形の主要点における値 X_{pij} に関する連立方程式が得られる。この連立方程式を解くことにより、領域 $[i, j]$ における、主要点の諸量 X_{pij} と境界従属点および内部従属点の諸量 X_{pfg} との間の関係式が求められ、式(3)となる。なお、式(3)の導出過程の詳細は文献 7), 8)を参照されたい。

$$X_{pij} = \sum_{f=0}^i \left\{ \sum_{g=0}^j \beta_{if} A_{pf} [X_{r0} - X_{uf}(1 - \delta_{ri})] + \sum_{g=0}^j \beta_{ig} B_{pg} [X_{s0} - X_{ug}(1 - \delta_{gi})] \right\} + \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^j \beta_{if} \beta_{ig} C_{pifg} (1 - \delta_{ri} \delta_{gj}) - \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^j \beta_{if} \beta_{ig} A_{pifg} \bar{q}_{fg} \quad (3)$$

ここに、 $p = 1, 2, \dots, 13, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad \beta_{if} = \alpha_{if}/h, \quad \beta_{ig} = \alpha_{ig}/h, \quad \delta_{ij} = \text{Kronecker's delta},$

A_{pf}, B_{pg}, C_{pifg} : Appendix I 参照

係数 β_{if}, β_{ig} は数値積分法における重み係数である。本論文においては、等分割数値積分法として、台形公式を用いることとする。このとき α_{if}, α_{ig} は次の値である。

$$\alpha_{if} = \begin{cases} 0.5 & (f=0, i) \\ 1.0 & (f \neq 0, i) \end{cases} \quad \alpha_{ig} = \begin{cases} 0.5 & (g=0, j) \\ 1.0 & (g \neq 0, j) \end{cases}$$

領域 $[i, j]$ を最小領域 $[1, 1]$ から始めて、順次、領域を拡大しつつ、各領域の主要点の諸量 X_{pij} を式(3)により求め、これを次の領域の内部従属点における諸量 X_{pfg} として、式(3)の右辺に代入してゆけば、各領域の内部従属点の諸量はすべて消去され、結局、任意の領域 $[i, j]$ の主要点における諸量 X_{pij} はこの領域の境界従属点における諸量 $X_{r\theta} (\theta = 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12)$ 、 $X_{s\phi} (\phi = 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13)$ のみによって表わされることになり、次式のように整理される。

$$X_{pij} = \sum_{d=1}^{10} \left\{ \sum_{f=0}^i a_{1pifd} X_{r\theta} + \sum_{g=0}^j a_{2pijgd} X_{s\phi} \right\} + q_{pij} \quad (4)$$

$a_{1pifd}, a_{2pijgd}, q_{pij}$: Appendix II 参照

式(4)は、積層偏平シェルの縦横の等分割線の交点における、基礎微分方程式(2-1)～(2-13)の離散表示された近似解である。この解式に含まれる境界従属点の10個ずつの諸量 X_{r0}, X_{s0} はいわゆる積分定数であり、境界条件によって決定されるべきものである。また、任意の領域 $[i, j]$ の主要点における諸量 X_{pij} を、この領域の境界従属点における諸量 X_{r0}, X_{s0} に関係づける要素 $ahpij$ は、格間伝達マトリックスに相当するものである。なお、離散解の導入過程の詳細は、文献7)を参照されたい。

4. 積分定数と境界条件

基礎微分方程式(2-1)～(2-13)の近似解(4)に含まれる積分定数 X_{r0}, X_{s0} は、具体的には、それぞれ積層偏平シェルの $y=0, x=0$ なる辺上における断面力および変形を表す。各等分割点において合計10個ずつの積分定数が存在するが、積層偏平シェルの境界条件に応じて、これらの中のいずれか5個の積分定数は既知となる。残りの5個の未知なる積分定数は、 $x=a, y=b$ の各辺の境界条件によって決定される。

Fig. 3.に、四辺単純支持（ローラー、ピン）、四辺固定の3種類のクロスプライ積層偏平シェルの積分定数と境界条件を示す。(a), (a')図は四辺単純支持（ローラー）、(b), (b')図は四辺単純支持（ピン）、(c), (c')図は四辺固定を示している。(a), (b), (c)図は積層偏平シェルの全体部分を対象とした場合であり、また、(a'), (b'), (c')図は左右および上下の2軸対称性をもつ積層偏平シェルの1/4部分を対象とした場合である。同図において、隅角点における積分定数および境界条件は、 で囲まれている。なお、隅角点における積分定数および境界条件は、その隅角点において、2境界边上での諸量間の関係を考慮して定められる。詳しくは、文献7)を参照されたい。

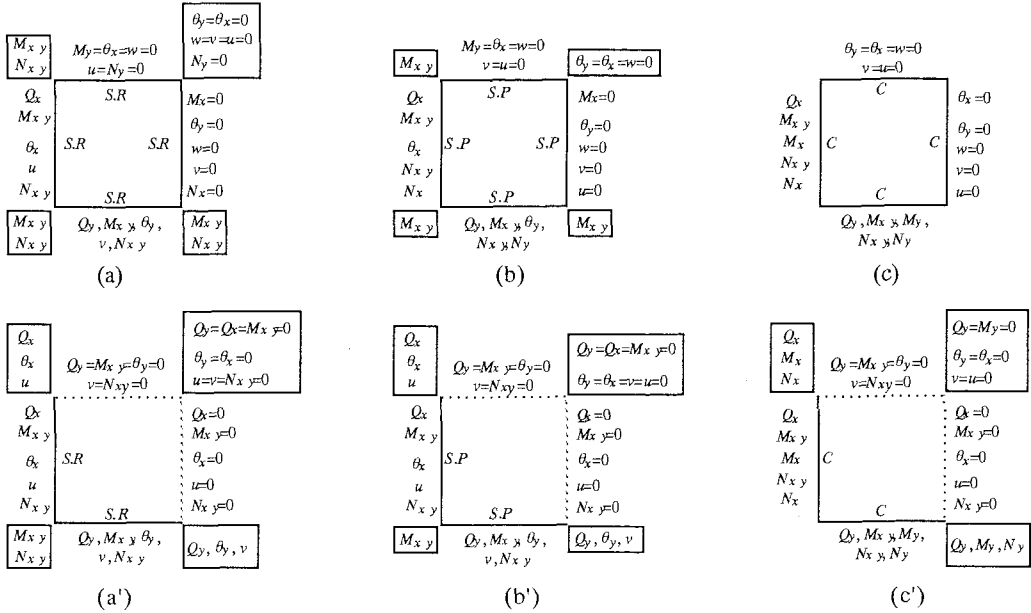


Fig. 3. 積分定数と境界条件
(S.R: 単純支持（ローラー）, S.P: 単純支持（ピン）, C: 固定支持)

5. 数値解析結果

(1) 数値解の収束性および精度

本解析法による数値解の収束性および精度を明らかにするために、曲率半径 $R_x=R_y=R$ 、辺長 $a=b$ ならびに辺長とシェル厚比 $a/h=100$ なる積層偏平E.P. シェル ($R/a=1\sim 10^{30}$) を対象にして解析を行った。なお、曲率は $k_x=1/R_x, k_y=1/R_y$ であり、ねじれ率は $k_{xy}=0$ とした。

アーチ、シェルなどの曲面構造は、支持条件の差異、すなわち極く小さな支承線の変位によって力学的特性が大きく変化するので、ここでは、実構造物との対応を考え、単純支持を水平変位を生ずるローラーと、水平変位を生じないピン、および固定辺をもつ境界条件での解析を行った。

まず、等分布荷重を受ける四辺単純支持(ローラー)のクロスプライ $[0^\circ/90^\circ]$, $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$, $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ 積層偏平E.P. シェルの本解析法による中央点におけるたわみを、既往の解析結果とともに Table 1. に示す。なお、この場合の各ラミナ材料定数は、次式(5)で与えられる数値を用いた。

$$E_L=25E_T, G_{LT}=0.5E_T, G_{TT}=0.2E_T, \nu_{LT}=0.25, \nu_{TL}=E_T/E_L \times \nu_{LT}=0.01 \quad (5)$$

表中の分割数は積層偏平シェルの1/4部分を対象にしたものである。本解析法による数値解は一様に収束しており、他解法による解析結果と比較しても良好な精度を有していることがわかる。

Table 2. は等分布荷重を受ける四辺単純支持(ピン)のクロスプライ積層偏平E.P. シェルの中央点におけるたわみの解析結果である。なお、この場合の材料定数は式(5)である。解析結果より、3層、4層の $R/a=10^{30}$ におけるたわみは、Table 1. のローラーにおけるたわみと等しく、2層の場合には等しくない。これは、対称積層 $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$, $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ の場合は、カップリング剛性 B_{ij} がゼロとなりカップリング

Table 1. 等分布荷重を受ける四辺単純支持 (ローラー) 積層偏平E.P.シェルの中央点のたわみ

Orientation	R/a	Number of division				Ref[6]	Ref[5]	Ref[2]
		2×2	4×4	6×6	8×8			
0/90	1	0.0901	0.0773	0.0739	0.0729	0.0725	0.0807	0.0718
	2	0.3798	0.2998	0.2917	0.2889	0.2869	0.2944	0.2855
	3	0.8672	0.6812	0.6596	0.6525	0.6461	0.6525	0.6441
	4	1.5114	1.2109	1.1704	1.1571	1.1440	1.1497	1.1412
	5	2.2707	1.8589	1.7980	1.7778	1.7569	1.7625	1.7535
	10	6.5629	5.7811	5.6458	5.5995	5.5480	5.5578	5.5428
	20	12.2376	11.5165	11.3799	11.3323			11.273
	50	16.1204	15.8250	15.7635	15.7419			15.714
	10^2	16.8847	16.7134	16.6755	16.6621			16.645
	10^{30}	17.1558	17.0318	17.0030	16.9929	16.977*	17.0270	16.980
0/90/0	1	0.0890	0.0761	0.0732	0.0726	0.0726	0.0794	0.0718
	2	0.3632	0.2999	0.2918	0.2890	0.2871	0.2932	0.2858
	3	0.7942	0.6512	0.6348	0.6291	0.6244	0.6295	0.6224
	4	1.3187	1.0912	1.0641	1.0549	1.0470	1.0509	1.0443
	5	1.8775	1.5771	1.5392	1.5265	1.5153	1.5181	1.5118
	10	4.1719	3.7523	3.6898	3.6689	3.6525	3.6533	3.6445
	20	5.9470	5.6312	5.5827	5.5665			5.5473
	50	6.7451	6.5345	6.5044	6.4946			6.4827
	10^2	6.8768	6.6871	6.6608	6.6524			6.6421
	10^{30}	6.9218	6.7395	6.7146	6.7067	6.7124*	6.7190	6.6970
0/90/90/0	1	0.0897	0.0756	0.0731	0.0724	0.0722	0.0788	0.0715
	2	0.3734	0.2988	0.2905	0.2877	0.2857	0.2917	0.2844
	3	0.8125	0.6578	0.6384	0.6320	0.6265	0.6316	0.6246
	4	1.3412	1.1109	1.0788	1.0681	1.0585	1.0625	1.0559
	5	1.9018	1.6108	1.5672	1.5526	1.5392	1.5421	1.5358
	10	4.2009	3.8321	3.7683	3.7465	3.7283	3.7278	3.7208
	20	5.9838	5.7403	5.6957	5.6803			5.6618
	50	6.7874	6.6572	6.6332	6.6250			6.6148
	10^2	6.9200	6.8121	6.7923	6.7856			6.7772
	10^{30}	6.9653	6.8653	6.8470	6.8409	6.8469*	6.8467	6.8331

$$\alpha = wE_T h^3 / q_0 a^4 \times 10^3, \quad a/h = 100, \quad * R/a = 10^{10}$$

効果は生じないが、逆対称積層 $[0^\circ/90^\circ]$ の場合は、 B_{ij} がゼロでないため面内成分と面外成分のカップリング効果の影響によるものである。

次に、四辺固定クロスプライ積層偏平シェルに対する本解析法による数値解の収束性および精度を検討するために、まず、等分布荷重を受ける四辺固定クロスプライ積層板の数値解の収束性を **Table 3.** に示す。なお、材料定数は $E_L = 40E_T$, $G_{LT} = 0.5E_T$, $\nu_{LT} = 0.25$ であるが、文献9) はせん断変形の影響を無視した理論によるものであるのに対し、本研究はせん断変形の影響を考慮した理論に基づくものであるため、 $G_{TT} = 0.5E_T$ 、として計算を行った。最後に、式(5)の材料定数を有する四辺固定クロスプライ積層偏平E.P.シェルの中央点におけるたわみの収束性を **Table 4.** に示す。

以上の結果より、いずれの境界条件においても一様な収束性を示しており、8分割程度の分割数でも十分に実用性のある解が得られている。

(2) シェル厚の影響

積層板は、横せん断剛性が面内剛性や曲げ剛性と比較してかなり小さいので、薄板でも横せん断変形の影響が大きく、板厚が大きくなると、その影響はますます大きくなるものと考えられる。シェル厚の影響を調べた研究は、文献2)、6)にみられるが、その解析結果は、精度的に十分とはいえない。従って、ここでは、文献2)、6)の結果と比較することを目的に、 h/R を0.01~0.3まで変化させて解析を行った。**Table 5.** は、 $R_x = R_y = a = b$ なる曲率半径を有し、sin波形分布荷重 $q = q_0 \sin \alpha x \sin \pi b y$ が作用する積層偏平E.P.シェルの中央点のたわみを示したものである。なお、分割数は1/4部分を8分割しており、材料定数は式(5)を用い、

Table 2. 等分布荷重を受ける四辺単純支持（ピン）積層偏平E.P.シェルの中央点のたわみ

Orientation	R/a	Number of division			Ref[2]
		4×4	6×6	8×8	
0/90	1	0.0049	0.0046	0.0046	
	5	0.1707	0.1641	0.1623	
	10	0.8460	0.8185	0.8095	
	50	6.7850	6.7485	6.7357	
	10^2	8.3952	8.3800	8.3745	
	10^{30}	9.1117	9.1091	9.1079	
0/90/0	1	0.0045	0.0040	0.0041	
	5	0.1294	0.1305	0.1306	
	10	0.5712	0.5587	0.5549	
	50	4.9083	4.8568	4.8397	
	10^2	6.1680	6.1324	6.1207	
	10^{30}	6.7395	6.7146	6.7067	6.6970
0/90/90/0	1	0.0042	0.0041	0.0041	
	5	0.1398	0.1358	0.1347	
	10	0.6215	0.6017	0.5953	
	50	5.0249	4.9783	4.9623	
	10^2	6.2912	6.2617	6.2516	
	10^{30}	6.8653	6.8470	6.8409	6.8331

$$\alpha = wE_T h^3 / q_0 a^4 \times 10^3, a/h = 100$$

Table 3. 等分布荷重を受ける四辺固定積層板の中央点のたわみ

Orientation	a/b	Number of division			Ref[9]
		4×4	6×6	8×8	
0/90	1	2.878	2.887	2.890	2.861
	2	5.022	5.042	5.055	4.967
	3	4.401	4.655	4.730	4.750
	4	4.128	4.580	4.663	4.678
	5	4.386	4.665	4.698	4.675

$$\alpha = wE_T h^3 / q_0 a^4 \times 10^3, a/h = 100$$

Table 4. 等分布荷重を受ける四辺固定積層偏平E.P.シェルの中央点のたわみ

Orientation	R/a	Number of division		
		4×4	6×6	8×8
0/90	1	0.0046	0.0045	0.0044
	5	0.1725	0.1601	0.1566
	10	0.7119	0.6766	0.6651
	50	3.3867	3.3711	3.3654
	10^2	3.8002	3.8023	3.8027
	10^{30}	3.9608	3.9709	3.9742
0/90/0	1	0.0049	0.0045	0.0045
	5	0.1470	0.1455	0.1451
	10	0.4929	0.4804	0.4770
	50	1.3128	1.3110	1.3116
	10^2	1.3791	1.3802	1.3818
	10^{30}	1.4026	1.4048	1.4068
0/90/90/0	1	0.0044	0.0045	0.0045
	5	0.1662	0.1577	0.1552
	10	0.5380	0.5195	0.5137
	50	1.3802	1.3773	1.3768
	10^2	1.4475	1.4478	1.4484
	10^{30}	1.4714	1.4729	1.4739

$$\alpha = wE_T h^3 / q_0 a^4 \times 10^3, a/h = 100$$

$[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ の対称積層とした。文献2)、6)と本解析結果を比較してみると、文献2)と文献6)の計算結果は大きく異なっているのに対し、本解析結果は文献2)と近い結果が得られた。

(3) ライズとシェル厚の影響

さらに、シェルのライズとシェル厚の影響を見るために、辺長とシェル厚の比 $a/h=100$ と $a/h=10$ の積層偏平E.P.シェルに等分布荷重が作用したときの中央点のたわみを Fig.4および Fig.5に示す。なお、分割数は1/4部分を8分割であり、材料定数は式(5)である。Fig.4は、2層、3層の積層偏平E.P.シェルの場合である。これより、 $a/h=100$ の場合には R/a が大きくなるとたわみは緩やかに増加するのに対し、 $a/h=10$ の場合には、急激に増加し $R/a=10$ 以上になるとほぼ一定値になる。

Fig.5は4層の対称、逆対称積層偏平E.P.シェルの解析結果である。この場合も Fig.4と同様に $a/h=10$ の場合には $R/a=10$ 以上でほぼ一定値になる。さらに、逆対称積層の方が対称積層よりたわみが大きいことがわかる。

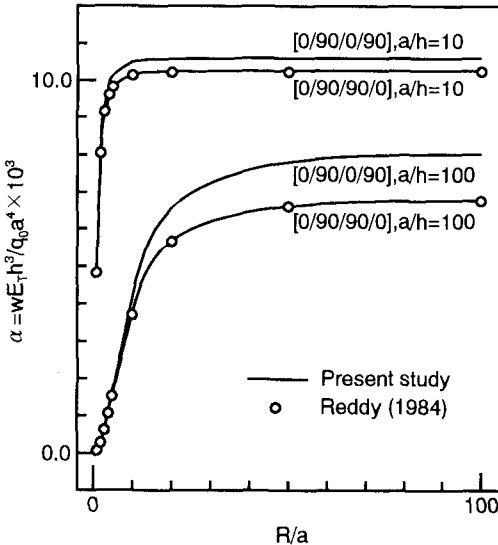


Fig.5. $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ 積層偏平E.P.シェルのライズと中央点のたわみ

Table 5. シェル厚とたわみの関係、 $[0/90/0]$ 積層E.P.シェル (sin波形状分布荷重, 四辺単純支持 (ローラー))

h/R	Present Study	Ref[6]	Ref[2]
0.01	0.0535	0.0541	0.0536
0.03	0.4437	0.4624	0.4480
0.05	1.0814	1.1724	1.1052
0.07	1.8402	2.0863	1.9024
0.09	2.6712	3.1667	2.7870
0.1	3.1118	3.7676	3.2588
0.2	8.6732	12.083	9.2536
0.3	16.6454	24.706	17.867

$$\alpha = wE_c h^3 / q_0 a^4 \times 10^3$$

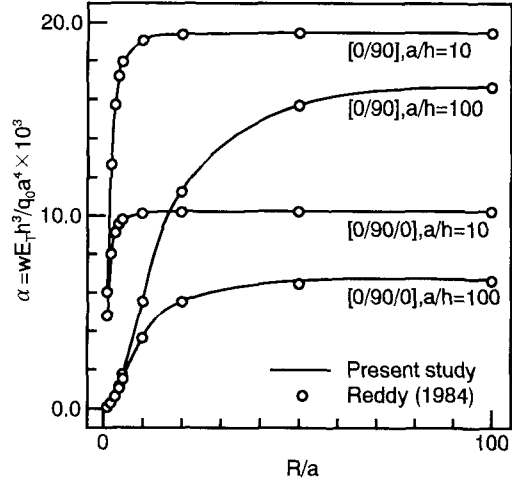


Fig.4. $[0^\circ/90^\circ]$, $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ 積層偏平E.P.シェルのライズと中央点のたわみ

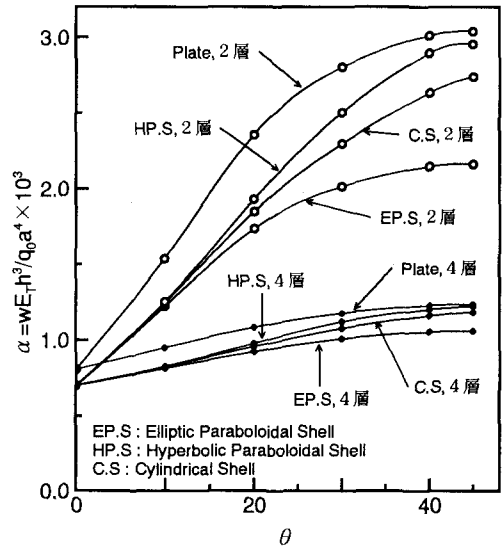


Fig.6. アングルプライ積層偏平シェルの解析結果
 $E_L=40E_T$, $G_{LT}=0.5E_T$, $G_{TT}=G_{LT}$, $\nu_{LT}=0.25$, ($a/h=100$)

(4) 四辺固定アングルプライ

四辺固定の場合にはアングルプライであってもクロスプライと同じ境界条件が適用できるので、等分布荷重を受けるE.P.、H.P.、および、円筒の曲面形状を有する四辺固定アングルプライ積層偏平シェルの解析を行った。Fig 6は4層 $[\theta/\theta/\theta/\theta]$ および2層 $[\theta/-\theta]$ 逆対称積層偏平シェルの配向角 θ と中央点のたわみとの関係を表わしたものである。2層積層の場合には4層積層に比べて配向角の影響が大きく、また、シェルの曲面形状による影響も大きくなっている。なお、材料定数はFig 6に示す数値を用い、曲率はシェルでは $K^* = \sqrt{12(1-\nu_L \nu_{TL})}/Rh = 10$ とし、板では $K^* = 0$ とした。

6. まとめ

本論文は、積層偏平シェルの弾性曲げ問題の一離散化数値解析法を提示し、主としてクロスプライ積層偏平シェルの解析を行った。数値解析の結果から、本解析法による数値解は一般的な収束性をもつこと、また、比較的粗い分割による解析においても実用上十分の精度をもつ解が得られることなどが確認された。本解析法によると、任意の境界条件および荷重条件を有するクロスプライ積層偏平シェルの一般的に解析することができる。数値計算例で示したようにE.P.シェル、H.P.シェル、円筒シェルに対しても曲率のみを変更するだけで、容易に解析可能である。

さらに、本解析法を用いてアングルプライを含めた積層偏平シェルの弾塑性解析、大変形解析などへの応用も考えており、これらについては改めて報告の予定である。

Appendix I

$$A_{p1} = \gamma_{p3}$$

$$A_{p2} = 0$$

$$A_{p3} = \gamma_{p4}$$

$$A_{p4} = \gamma_{p5}$$

$$A_{p5} = 0$$

$$A_{p6} = \bar{D}_{12}\gamma_{p6} + \bar{D}_{22}\gamma_{p7} + \bar{D}_{26}\gamma_{p8} \\ + \bar{B}_{12}\gamma_{p11} + \bar{B}_{22}\gamma_{p12} + \bar{B}_{26}\gamma_{p13}$$

$$A_{p7} = \bar{D}_{16}\gamma_{p6} + \bar{D}_{26}\gamma_{p7} + \bar{D}_{66}\gamma_{p8} \\ + \bar{B}_{16}\gamma_{p11} + \bar{B}_{26}\gamma_{p12} + \bar{B}_{66}\gamma_{p13}$$

$$A_{p8} = \kappa(\bar{A}_{44}\gamma_{p9} + \bar{A}_{45}\gamma_{p10})$$

$$A_{p9} = \bar{B}_{12}\gamma_{p6} + \bar{B}_{22}\gamma_{p7} + \bar{B}_{26}\gamma_{p8} \\ + \bar{A}_{12}\gamma_{p11} + \bar{A}_{22}\gamma_{p12} + \bar{A}_{26}\gamma_{p13}$$

$$A_{p10} = \bar{B}_{11}\gamma_{p6} + \bar{B}_{12}\gamma_{p7} + \bar{B}_{16}\gamma_{p8} \\ + \bar{A}_{11}\gamma_{p11} + \bar{A}_{12}\gamma_{p12} + \bar{A}_{16}\gamma_{p13}$$

$$A_{p11} = \gamma_{p1}$$

$$A_{p12} = \gamma_{p2}$$

$$A_{p13} = 0$$

$$B_{p1} = 0$$

$$B_{p2} = \mu\gamma_{p3}$$

$$B_{p3} = \mu\gamma_{p5}$$

$$B_{p4} = 0$$

$$B_{p5} = \mu\gamma_{p4}$$

$$B_{p6} = \mu(\bar{D}_{16}\gamma_{p6} + \bar{D}_{26}\gamma_{p7} + \bar{D}_{66}\gamma_{p8} \\ + \bar{B}_{16}\gamma_{p11} + \bar{B}_{26}\gamma_{p12} + \bar{B}_{66}\gamma_{p13})$$

$$B_{p7} = \mu(\bar{D}_{11}\gamma_{p6} + \bar{D}_{12}\gamma_{p7} + \bar{D}_{16}\gamma_{p8} \\ + \bar{B}_{11}\gamma_{p11} + \bar{B}_{12}\gamma_{p12} + \bar{B}_{16}\gamma_{p13})$$

$$B_{p8} = \mu\kappa(\bar{A}_{45}\gamma_{p9} + \bar{A}_{55}\gamma_{p10})$$

$$B_{p9} = \mu(\bar{B}_{16}\gamma_{p6} + \bar{B}_{26}\gamma_{p7} + \bar{B}_{66}\gamma_{p8} \\ + \bar{A}_{16}\gamma_{p11} + \bar{A}_{26}\gamma_{p12} + \bar{A}_{66}\gamma_{p13})$$

$$B_{p10} = \mu(\bar{B}_{11}\gamma_{p6} + \bar{B}_{12}\gamma_{p7} + \bar{B}_{16}\gamma_{p8} \\ + \bar{A}_{11}\gamma_{p11} + \bar{A}_{12}\gamma_{p12} + \bar{A}_{16}\gamma_{p13})$$

$$B_{p11} = \mu\gamma_{p2}$$

$$B_{p12} = 0$$

$$B_{p13} = \mu\gamma_{p1}$$

$$C_{p1kl} = \mu\gamma_{p5} + I_{kl}\gamma_{p9} + \bar{k}_y\gamma_{p2}$$

$$C_{p2kl} = \mu\gamma_{p4} + I_{kl}\gamma_{p10} + \bar{k}_x\gamma_{p1}$$

$$C_{p3kl} = I_{kl}\gamma_{p8}$$

$$C_{p4kl} = I_{kl}\gamma_{p7}$$

$$C_{p5kl} = I_{kl}\gamma_{p6}$$

$$C_{p6kl} = -\mu\kappa(\bar{A}_{44}\gamma_{p9} + \bar{A}_{45}\gamma_{p10})$$

$$C_{p7kl} = -\mu\kappa(\bar{A}_{45}\gamma_{p9} + \bar{A}_{55}\gamma_{p10})$$

$$C_{p8kl} = (\bar{B}_{11}\bar{k}_x + \bar{B}_{12}\bar{k}_y + 2\bar{B}_{16}\bar{k}_{xy})\gamma_{p6}$$

$$+ (\bar{B}_{12}\bar{k}_x + \bar{B}_{22}\bar{k}_y + 2\bar{B}_{26}\bar{k}_{xy})\gamma_{p7}$$

$$+ (\bar{B}_{16}\bar{k}_x + \bar{B}_{26}\bar{k}_y + 2\bar{B}_{66}\bar{k}_{xy})\gamma_{p8}$$

$$+ (\bar{A}_{11}\bar{k}_x + \bar{A}_{12}\bar{k}_y + 2\bar{A}_{16}\bar{k}_{xy})\gamma_{p11}$$

$$+ (\bar{A}_{12}\bar{k}_x + \bar{A}_{22}\bar{k}_y + 2\bar{A}_{26}\bar{k}_{xy})\gamma_{p12}$$

$$+ (\bar{A}_{16}\bar{k}_x + \bar{A}_{26}\bar{k}_y + 2\bar{A}_{66}\bar{k}_{xy})\gamma_{p13}$$

$$C_{p9kl} = 0$$

$$C_{p10kl} = 0$$

$$C_{p11kl} = I_{kl}\gamma_{p13} - 2\bar{k}_{xy}\gamma_{p3}$$

$$C_{p12kl} = I_{kl}\gamma_{p12} - \bar{k}_y\gamma_{p3}$$

$$C_{p13kl} = I_{kl}\gamma_{p11} - \bar{k}_x\gamma_{p3}$$

$$[\gamma_{pt}] = [\rho_p]^{-1} \quad (p = 1 \sim 13, t = 1 \sim 13)$$

$$\begin{aligned}
\rho_{0102} &= -\beta_i \bar{k}_x, \quad \rho_{0111} = \beta_{ii}, \quad \rho_{0113} = \mu \beta_{jj}, \quad \rho_{0201} = -\beta_{ij} \bar{k}_y, \quad \rho_{0211} = \mu \beta_{jj}, \quad \rho_{0212} = \beta_{ii}, \quad \rho_{0301} = \beta_{ii}, \quad \rho_{0302} = \mu \beta_{jj}, \\
\rho_{0311} &= 2\beta_i \bar{k}_{xy}, \quad \rho_{0312} = \beta_i \bar{k}_y, \quad \rho_{0313} = \beta_i \bar{k}_x, \quad \rho_{0402} = -\mu \beta_{ij}, \quad \rho_{0403} = \beta_{ii}, \quad \rho_{0405} = \mu \beta_{jj}, \quad \rho_{0501} = -\mu \beta_{ij}, \quad \rho_{0503} = \mu \beta_{jj}, \quad \rho_{0504} = \beta_{ii}, \\
\rho_{0605} &= -I \beta_{ij}, \quad \rho_{0606} = \bar{D}_{12} \beta_{ii} + \mu \bar{D}_{16} \beta_{jj}, \quad \rho_{0607} = \bar{D}_{16} \beta_{ii} + \mu \bar{D}_{11} \beta_{jj}, \quad \rho_{0608} = -(\bar{B}_{11} \bar{k}_x + \bar{B}_{12} \bar{k}_y + 2\bar{B}_{16} \bar{k}_{xy}) \beta_{ij}, \\
\rho_{0609} &= \bar{B}_{12} \beta_{ii} + \mu \bar{B}_{16} \beta_{jj}, \quad \rho_{0610} = \bar{B}_{16} \beta_{ii} + \mu \bar{B}_{11} \beta_{jj}, \quad \rho_{0704} = -I \beta_{ij}, \quad \rho_{0706} = \bar{D}_{22} \beta_{ii} + \mu \bar{D}_{26} \beta_{jj}, \quad \rho_{0707} = \bar{D}_{26} \beta_{ii} + \mu \bar{D}_{12} \beta_{jj}, \\
\rho_{0708} &= -(\bar{B}_{12} \bar{k}_x + \bar{B}_{22} \bar{k}_y + 2\bar{B}_{26} \bar{k}_{xy}) \beta_{ij}, \quad \rho_{0709} = \bar{B}_{22} \beta_{ii} + \mu \bar{B}_{26} \beta_{jj}, \quad \rho_{0710} = \bar{B}_{26} \beta_{ii} + \mu \bar{B}_{12} \beta_{jj}, \quad \rho_{0803} = -I \beta_{ij}, \quad \rho_{0806} = \bar{D}_{26} \beta_{ii} + \mu \bar{D}_{66} \beta_{jj}, \\
\rho_{0807} &= \bar{D}_{66} \beta_{ii} + \mu \bar{D}_{16} \beta_{jj}, \quad \rho_{0808} = -(\bar{B}_{16} \bar{k}_x + \bar{B}_{26} \bar{k}_y + 2\bar{B}_{66} \bar{k}_{xy}) \beta_{ij}, \quad \rho_{0809} = \bar{B}_{26} \beta_{ii} + \mu \bar{B}_{66} \beta_{jj}, \quad \rho_{0810} = \bar{B}_{66} \beta_{ii} + \mu \bar{B}_{16} \beta_{jj}, \\
\rho_{0901} &= -I \beta_{ij}, \quad \rho_{0906} = \mu \bar{K} \bar{A}_{44} \beta_{ij}, \quad \rho_{0907} = \mu \bar{K} \bar{A}_{45} \beta_{ij}, \quad \rho_{0908} = \bar{K} (\bar{A}_{44} \beta_{ii} + \mu \bar{A}_{45} \beta_{jj}) \\
\rho_{1002} &= -I \beta_{ij}, \quad \rho_{1006} = \mu \bar{K} \bar{A}_{45} \beta_{ij}, \quad \rho_{1007} = \mu \bar{K} \bar{A}_{55} \beta_{ij}, \quad \rho_{1008} = \bar{K} (\bar{A}_{45} \beta_{ii} + \mu \bar{A}_{55} \beta_{jj}) \\
\rho_{1106} &= \bar{B}_{12} \beta_{ii} + \mu \bar{B}_{16} \beta_{jj}, \quad \rho_{1107} = \bar{B}_{16} \beta_{ii} + \mu \bar{B}_{11} \beta_{jj}, \quad \rho_{1108} = -(\bar{A}_{11} \bar{k}_x + \bar{A}_{12} \bar{k}_y + 2\bar{A}_{16} \bar{k}_{xy}) \beta_{ij}, \quad \rho_{1109} = \bar{A}_{12} \beta_{ii} + \mu \bar{A}_{16} \beta_{jj}, \\
\rho_{1110} &= \bar{A}_{16} \beta_{ii} + \mu \bar{A}_{11} \beta_{jj}, \quad \rho_{1113} = -I \beta_{ij}, \quad \rho_{1206} = \bar{B}_{22} \beta_{ii} + \mu \bar{B}_{26} \beta_{jj}, \quad \rho_{1207} = \bar{B}_{26} \beta_{ii} + \mu \bar{B}_{12} \beta_{jj}, \quad \rho_{1208} = -(\bar{A}_{12} \bar{k}_x + \bar{A}_{22} \bar{k}_y + 2\bar{A}_{26} \bar{k}_{xy}) \beta_{ij}, \\
\rho_{1209} &= \bar{A}_{22} \beta_{ii} + \mu \bar{A}_{26} \beta_{jj}, \quad \rho_{1210} = \bar{A}_{26} \beta_{ii} + \mu \bar{A}_{12} \beta_{jj}, \quad \rho_{1212} = -I \beta_{ij}, \quad \rho_{1306} = \bar{B}_{26} \beta_{ii} + \mu \bar{B}_{66} \beta_{jj}, \quad \rho_{1307} = \bar{B}_{66} \beta_{ii} + \mu \bar{B}_{16} \beta_{jj}, \\
\rho_{1308} &= -(\bar{A}_{16} \bar{k}_x + \bar{A}_{26} \bar{k}_y + 2\bar{A}_{66} \bar{k}_{xy}) \beta_{ij}, \quad \rho_{1309} = \bar{A}_{26} \beta_{ii} + \mu \bar{A}_{66} \beta_{jj}, \quad \rho_{1310} = \bar{A}_{66} \beta_{ii} + \mu \bar{A}_{16} \beta_{jj}, \quad \rho_{1311} = -I \beta_{ij}
\end{aligned}$$

Appendix II

$$\begin{aligned}
a_{npqjld} &= \sum_{i=1}^{13} \left\{ \sum_{k=0}^i \beta_{ik} A_{pl} [\bar{a}_{h1k} \bar{q}_{iud} - \bar{a}_{h1k} \bar{q}_{iud} (1 - \delta_i)] + \sum_{l=0}^j \beta_{lj} B_{pl} [\bar{a}_{h0l} \bar{q}_{iud} - \bar{a}_{h0l} \bar{q}_{iud} (1 - \delta_j)] + \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \beta_{ik} \beta_{lj} C_{pkl} \bar{a}_{h1k} \bar{q}_{iud} (1 - \delta_i \delta_j) \right\} \\
q_{pij} &= \sum_{i=1}^{13} \left\{ \sum_{k=0}^i \beta_{ik} A_{pl} [\bar{q}_{ik0} - \bar{q}_{ik} (1 - \delta_i)] + \sum_{l=0}^j \beta_{lj} B_{pl} [\bar{q}_{i0l} - \bar{q}_{il} (1 - \delta_j)] + \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \beta_{ik} \beta_{lj} C_{pkl} \bar{q}_{ik} (1 - \delta_i \delta_j) \right\} - \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \beta_{ik} \beta_{lj} \bar{a}_{pl} \bar{q}_{kl}
\end{aligned}$$

$$p = 1 \sim 13, \quad i = 1 \sim m, \quad j = 1 \sim n, \quad f = 1 \sim i, \quad g = 1 \sim j, \quad d = 1 \sim 10, \quad h = 1, 2,$$

$$u = f \quad (h = 1 \text{ のとき}) \quad \text{or} \quad u = g \quad (h = 2 \text{ のとき})$$

$$a_{1r} \bar{a}_{0jd} = 1, \quad a_{20} \bar{q}_{jd} = 1$$

$$\begin{aligned}
a_{110} \bar{q}_{01} &= \frac{I_{00} T_{6100}}{I_0 T_{610}} \bar{\alpha}_j, & a_{210} \bar{q}_{11} &= \frac{I_{00} T_{6200}}{I_0 T_{610}} \bar{\beta}_{j1}, & a_{210} \bar{q}_{14} &= -\frac{\mu \bar{K}}{I_0 T_{610}} \bar{\beta}_{j1}, & a_{210} \bar{q}_{16} &= -\frac{\bar{K}}{I_0 T_{610}} \bar{\eta}_{j1} \\
a_{220} \bar{q}_{01} &= \frac{\bar{h}_{00} T_{5200}}{\bar{h}_{00} T_{520}} \bar{\alpha}_i, & a_{120} \bar{q}_{01} &= \frac{\bar{h}_{k0} T_{5100}}{\bar{h}_{00} T_{520}} \bar{\beta}_{ik}, & a_{120} \bar{q}_{05} &= -\frac{\bar{K}}{\bar{h}_{00} T_{520}} \bar{\beta}_{ik}, & a_{120} \bar{q}_{06} &= -\frac{\bar{K}}{\bar{h}_{00} T_{520}} \bar{\eta}_{ik} \\
a_{140} \bar{q}_{03} &= \frac{I_{00} T_{3400}}{I_0 T_{340}} \bar{\alpha}_j, & a_{240} \bar{q}_{12} &= \frac{I_{00} T_{3500}}{I_0 T_{340}} \bar{\beta}_{j1}, & a_{240} \bar{q}_{13} &= \frac{I_{00} T_{3300}}{I_0 T_{340}} \bar{\beta}_{j1}, & a_{240} \bar{q}_{14} &= -\frac{S_{220}}{I_0 T_{340}} \bar{\eta}_{j1} \\
a_{240} \bar{q}_{16} &= \frac{\bar{k}_y S_{2500}}{I_0 T_{340}} \bar{\beta}_{j1}, & a_{240} \bar{q}_{17} &= \frac{S_{2500}}{I_0 T_{340}} \bar{\eta}_{j1}, & a_{240} \bar{q}_{18} &= \frac{I_{00} T_{3200}}{I_0 T_{340}} \bar{\beta}_{j1}, & a_{240} \bar{q}_{10} &= \frac{I_{00} T_{3100}}{I_0 T_{340}} \bar{\beta}_{j1} \\
a_{250} \bar{q}_{03} &= \frac{\bar{h}_{00} T_{1300}}{\bar{h}_{00} T_{130}} \bar{\alpha}_i, & a_{150} \bar{q}_{02} &= \frac{\bar{h}_{k0} T_{1500}}{\bar{h}_{00} T_{130}} \bar{\beta}_{ik}, & a_{150} \bar{q}_{03} &= \frac{\bar{h}_{k0} T_{1400}}{\bar{h}_{00} T_{130}} \bar{\beta}_{ik}, & a_{150} \bar{q}_{05} &= -\frac{S_{1100}}{\bar{h}_{00} T_{130}} \bar{\eta}_{ik} \\
a_{150} \bar{q}_{06} &= \frac{\bar{k}_x S_{1400}}{\bar{h}_{00} T_{130}} \bar{\beta}_{ik}, & a_{150} \bar{q}_{08} &= \frac{S_{1400}}{\bar{h}_{00} T_{130}} \bar{\eta}_{ik}, & a_{150} \bar{q}_{09} &= \frac{\bar{h}_{k0} T_{1200}}{\bar{h}_{00} T_{130}} \bar{\beta}_{ik}, & a_{150} \bar{q}_{10} &= \frac{\bar{h}_{k0} T_{1100}}{\bar{h}_{00} T_{130}} \bar{\beta}_{ik} \\
a_{1120} \bar{q}_{010} &= \frac{I_{00} T_{4200}}{I_0 T_{420}} \bar{\alpha}_j, & a_{2120} \bar{q}_{12} &= \frac{I_{00} T_{4500}}{I_0 T_{420}} \bar{\beta}_{j1}, & a_{2120} \bar{q}_{13} &= \frac{I_{00} T_{4400}}{I_0 T_{420}} \bar{\beta}_{j1}, & a_{2120} \bar{q}_{14} &= -\frac{S_{2500}}{I_0 T_{420}} \bar{\eta}_{j1} \\
a_{2120} \bar{q}_{16} &= \frac{\bar{k}_y S_{5500}}{I_0 T_{420}} \bar{\beta}_{j1}, & a_{2120} \bar{q}_{17} &= \frac{S_{5500}}{I_0 T_{420}} \bar{\eta}_{j1}, & a_{2120} \bar{q}_{18} &= \frac{I_{00} T_{4300}}{I_0 T_{420}} \bar{\beta}_{j1}, & a_{2120} \bar{q}_{10} &= \frac{I_{00} T_{4100}}{I_0 T_{420}} \bar{\beta}_{j1} \\
a_{2130} \bar{q}_{010} &= \frac{\bar{h}_{00} T_{2100}}{\bar{h}_{00} T_{210}} \bar{\alpha}_i, & a_{1130} \bar{q}_{02} &= \frac{\bar{h}_{k0} T_{2500}}{\bar{h}_{00} T_{210}} \bar{\beta}_{ik}, & a_{1130} \bar{q}_{03} &= \frac{\bar{h}_{k0} T_{2400}}{\bar{h}_{00} T_{210}} \bar{\beta}_{ik}, & a_{1130} \bar{q}_{05} &= -\frac{S_{2200}}{\bar{h}_{00} T_{210}} \bar{\eta}_{ik} \\
a_{1130} \bar{q}_{06} &= \frac{\bar{k}_x S_{4400}}{\bar{h}_{00} T_{210}} \bar{\beta}_{ik}, & a_{1130} \bar{q}_{08} &= \frac{S_{4400}}{\bar{h}_{00} T_{210}} \bar{\eta}_{ik}, & a_{1130} \bar{q}_{09} &= \frac{\bar{h}_{k0} T_{2300}}{\bar{h}_{00} T_{210}} \bar{\beta}_{ik}, & a_{1130} \bar{q}_{10} &= \frac{\bar{h}_{k0} T_{2200}}{\bar{h}_{00} T_{210}} \bar{\beta}_{ik} \\
\bar{\alpha}_i &= (-1)^j, \quad \beta_{ik} = \delta_{ik} + (-1)^{j+k} \delta_{ik}, \quad \gamma_{ik} = \frac{4m(-1)^{j+k}}{1 + \delta_{ik} + \delta_{0k}}, \quad \bar{h}_{i0} = \left(\frac{h_0}{h_{i0}} \right)^3, \quad I_{i0} = \mu \left(\frac{h_0}{h_{i0}} \right)^3 = \mu \bar{h}_{i0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s &= d + \delta_{1f} + \delta_{2f} + 2(\delta_{3f} + \delta_{4f} + \delta_{5f} + \delta_{6f} + \delta_{7f} + \delta_{8f} + \delta_{9f}) + 3\delta_{10f}, \quad r = d + \delta_{2f} + \delta_{3f} + 2(\delta_{4f} + \delta_{5f} + \delta_{6f} + \delta_{7f} + \delta_{8f} + \delta_{9f} + \delta_{10f}) \\
T_{11} &= S_{12}S_{14} \sim S_{11}S_{24}, \quad T_{12} = S_{13}S_{14} \sim S_{11}S_{34}, \quad T_{13} = S_{14}^2 \sim S_{11}S_{44}, \quad T_{14} = S_{14}S_{15} \sim S_{11}S_{45}, \quad T_{15} = S_{14}S_{16} \sim S_{11}S_{46} \\
T_{21} &= S_{11}S_{44} \sim S_{14}^2, \quad T_{22} = S_{12}S_{44} \sim S_{14}S_{24}, \quad T_{23} = S_{13}S_{44} \sim S_{14}S_{34}, \quad T_{24} = S_{15}S_{44} \sim S_{14}S_{45}, \quad T_{25} = S_{16}S_{44} \sim S_{14}S_{46} \\
T_{31} &= S_{12}S_{25} \sim S_{15}S_{22}, \quad T_{32} = S_{23}S_{25} \sim S_{22}S_{35}, \quad T_{33} = S_{24}S_{25} \sim S_{22}S_{45}, \quad T_{34} = S_{25}^2 \sim S_{22}S_{55}, \quad T_{35} = S_{25}S_{26} \sim S_{22}S_{56} \\
T_{41} &= S_{12}S_{55} \sim S_{15}S_{25}, \quad T_{42} = S_{22}S_{25} \sim S_{25}^2, \quad T_{43} = S_{23}S_{55} \sim S_{25}S_{35}, \quad T_{44} = S_{24}S_{55} \sim S_{25}S_{45}, \quad T_{45} = S_{26}S_{55} \sim S_{25}S_{46} \\
T_{51} &= \frac{\bar{A}_{45}}{\bar{A}_{45}^2 \bar{A}_{44} \bar{A}_{55}}, \quad T_{52} = \frac{\bar{A}_{55}}{\bar{A}_{45}^2 \bar{A}_{44} \bar{A}_{55}}, \quad T_{61} = \frac{\bar{A}_{55}}{\bar{A}_{44} \bar{A}_{55} \bar{A}_{45}^2}, \quad T_{62} = \frac{\bar{A}_{45}}{\bar{A}_{44} \bar{A}_{55} \bar{A}_{45}^2} \\
[S_{ij}] &= [R_{ji}]^{-1} \quad (i = 1 \sim 6, j = 1 \sim 6) \\
R_{11} &= \bar{A}_{11}, \quad R_{12} = \bar{A}_{12}, \quad R_{13} = \bar{A}_{16}, \quad R_{14} = \bar{B}_{11}, \quad R_{15} = \bar{B}_{12}, \quad R_{16} = \bar{B}_{16}, \quad R_{22} = \bar{A}_{22}, \quad R_{23} = \bar{A}_{26}, \\
R_{24} &= \bar{B}_{12}, \quad R_{25} = \bar{B}_{22}, \quad R_{26} = \bar{B}_{26}, \quad R_{33} = \bar{A}_{66}, \quad R_{34} = \bar{B}_{16}, \quad R_{35} = \bar{B}_{26}, \quad R_{36} = \bar{B}_{66}, \\
R_{44} &= \bar{D}_{11}, \quad R_{45} = \bar{D}_{12}, \quad R_{46} = \bar{D}_{16}, \quad R_{55} = \bar{D}_{22}, \quad R_{56} = \bar{D}_{26}, \quad R_{66} = \bar{D}_{66}, \quad R_{ij} = R_{ji}
\end{aligned}$$

参考文献

- 1) Ahmed K.Noor and W.Scott Burton : Assessment of Shear Deformation Theories for Multilayered Composite Plates, Appl. Mech. Rev. Vol.42, No.1, pp.1-12, 1989.
- 2) J.N.Reddy : Exact Solution of Moderately Thick Laminated Shells, J. Engng. Mech. ASCE, Vol.110, No.5, pp. 794-809, 1984.
- 3) J.N.Reddy and C.F.LIU : A High-Order Shear Deformation Theory of Laminated Elastic Shells, Int. J. Engng. Sci, Vol.23, No.3, pp.319-330, 1985.
- 4) Jeyachandrabose and J.Kirkhope : Explicit Formulation of Two Anisotropic, triangular, Thin, Shallow Shell Elements, Computers & Structures, Vol.25, No.3, pp.415-436, 1987.
- 5) A.Day, J.N.Bandyopadhyay and P.K.Sinha : Finite Element Analysis of Laminated Composite Paraboloid of Revolution Shells, Computers & Structures, Vol.44, No.3, pp.675-682, 1992.
- 6) Jiarang Fan and Juyong Zhang : Analytical Solutions for Thick, Doubly, Curved, Laminated Shells. J. Engng. Mech. ASCE, Vol.118, No.7, pp.1338-1356, 1992.
- 7) 崎山 毅, 松田 浩 : 変厚矩形板の曲げの一解析法, 土木学会論文報告集, 第338号, pp.21-28, 1983.
- 8) 松田浩, 森田千尋, 崎山毅, 鶴田健, 若菜啓孝 : 偏平シェル構造の弾性曲げ解析, 構造工学論文集, Vol.38A, pp.31-42, 1992.
- 9) J.M.Whitney : The Effect of Boundary Conditions on the Response of Laminated Composites, J. Composite Materials, Vol.4, pp.192-203, 1970.

(1993年9月16日受付)