

繊維強化型複合積層板の衝撃弾塑性応答解析について

ELASTO-PLASTIC RESPONSE OF FIBER-COMPOSITE LAMINATED PLATES SUBJECTED TO IMPACT LOADING

水澤富作*

鬼頭博史**

By Tomisaku MIZUSAWA and Hiroshi Kito

This paper deals with the elasto-plastic dynamic responses of fiber-composite laminated plates under the action of impact load by using an isoparametric degenerated element and the von Mises yield criterion combined with the Prandtl-Reuss flow rule. The effects of thickness ratio, angle of lamination, stacking sequence of lamina and boundary condition on the dynamic deformations and the propagation of yield region through thickness and each lamina are investigated. It is seen that the different failure modes and failure propagation due to the thickness ratio and lamina structure have been observed.

Key words: composite laminated plate, elasto-plastic response, failure modes, finite element method

1. はじめに

高い比剛性や比強度を持つ繊維強化型複合材料(FRP)は^{1,2)}, 軽量化、耐衝撃性や減衰特性などに優れ、古くから航空宇宙産業や自動車産業などで広く用いられており、最近では建設材料としても期待されている。一方向強化複合材を積層状にした積層板は、強い異方性を示し、また横(面外)せん断剛性が面内剛性や曲げ剛性と比較してかなり小さいので、薄板であっても横せん断変形の影響が重要になってくる。また、各積層(ラミナ)の強化繊維の配向角が $+\theta^\circ$ と $-\theta^\circ$ の組み合わせから成る逆対称アングル・プライ積層板では、曲げと面内の連成挙動が生じ、面内拘束の影響も大きく生じてくる。このような繊維強化型複合積層板の解析には、等価な単一板に置き換えた積層板理論、各積層の適合条件を考慮した離散化積層理論や3次元異方性理論などが用いられている³⁾。これまでも、対称積層板や非対称積層板の曲げ、振動や座屈問題^{4,5,17)}などの弾性解析が行われており、また積層板に関する研究の解説論文^{6,7)}も数多く報告されている。しかしながら、複合積層板の初期欠陥や衝撃による層間はく離の問題があり、材料力学的及び実験的な研究が進められているが⁸⁾、このような複合積層板の非弾性応答解析については、さほど多く研究されていないように思われる。

Owenら⁹⁾は、有限要素法を用いて、正弦分布荷重を受ける周辺単純支持された積層板の弾塑性解析を行い、その静的破壊特性について検討を行っている。一方、衝撃荷重を受ける積層板の弾性応答解析はかなり行わ

* 工博 大同工業大学助教授 工学部建設工学科 (〒457 名古屋市南区白水町40)

** 大同工業大学大学院 工学研究科建設工学専攻 (〒457 名古屋市南区白水町40)

れているが^{18),19)}、動的弾塑性応答解析に関する研究は非常に少ないように思われる²⁰⁾。

本研究では、縮退型有限要素モデルと異方性積層板理論を用いてグラファイト／エポキシ材から成る一方
向繊維強化型積層板の弾塑性応答解析を行い、対称及び非対称積層板の破損モードや破壊（塑性）域の進展
に与える板厚比、配向角や積層組などの影響について検討し、積層板の破壊特性について明らかにしている。

2. 式の定式化

積層板は、図-1に示すように、積層の組方（配向）により、クロス・プライ積層板とアングル・プライ積層板があり、繊維強化方向の弾性係数比、積層数や配向角などにより異なった力学性状が示される。また、横せん断剛性が面内剛性と比較してかなり小さいので、薄板であっても横せん断変形の影響が重要になる。したがって、横せん断変形や回転慣性の影響を考慮した縮退アイソパラメトリック要素とHillの異方性理論に基づくMisesの降伏条件を用いて、弾塑性解析を行なう。板を層要素に分割することにより、厚さ方向の塑性域の進展も考慮する。また、衝撃応答解析には中間加速度法を適用し、非線形方程式は増分・反復法を用いて解いている。ただし、積層複合板の各積層（ k ）が直交異方性材料から成り、それぞれ完全に接着しているものと仮定する。

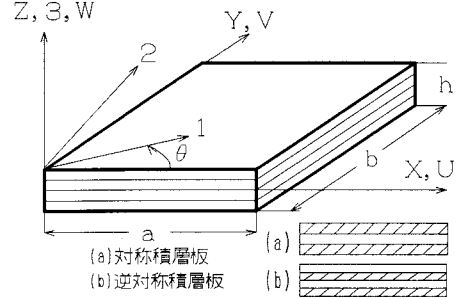


図-1 繊維強化型積層板と座標系

2.1 縮退アイソパラメトリック要素の定式化

Huangの9節点Lagrangian縮退板要素の式の誘導については^{10),11)}、すでに詳細に報告しているので、簡単に式の定式化について述べる。この要素では、ロッキング問題を排除するために次のような手法が用いられている。

(i) 仮定される横せん断ひずみ場は、自然座標系(ξ, η, ζ)で仮定される。

(ii) 仮定される面内ひずみ場は、局所直交座標系(X', Y', Z')で仮定される。

この縮退要素のひずみ成分は、次式に示すように変位成分(u, v, w)の局所座標系での導関数(u', v', w')で定義される。

$$\begin{bmatrix} \partial u / \partial X & \partial v / \partial X & \partial w / \partial X \\ \partial u / \partial Y & \partial v / \partial Y & \partial w / \partial Y \\ \partial u / \partial Z & \partial v / \partial Z & \partial w / \partial Z \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \partial u / \partial \xi & \partial v / \partial \xi & \partial w / \partial \xi \\ \partial u / \partial \eta & \partial v / \partial \eta & \partial w / \partial \eta \\ \partial u / \partial \zeta & \partial v / \partial \zeta & \partial w / \partial \zeta \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここで、 J はヤコビアンマトリックスであり、

$$J = \begin{bmatrix} \partial X / \partial \xi & \partial Y / \partial \xi & \partial Z / \partial \xi \\ \partial X / \partial \eta & \partial Y / \partial \eta & \partial Z / \partial \eta \\ \partial X / \partial \zeta & \partial Y / \partial \zeta & \partial Z / \partial \zeta \end{bmatrix} \quad (2)$$

で表される。

局所座標系で定義される要素の節点変位ベクトル d とひずみベクトル ε' の関係式は、次式で与えられる。

$$\varepsilon' = \sum_{k=1}^9 B_k d_k \quad (3)$$

ここで、 B_k はひずみマトリックスであり、また、 d と ε' は次式で表される。

$$d_k = \{u_{0,k}, u_{1,k}, u_{2,k}, \alpha_{1,k}, \alpha_{2,k}\}^T, \quad \varepsilon' = \{\varepsilon_{x'}, \varepsilon_{y'}, \gamma_{x'y'}, \gamma_{x'z'}, \gamma_{y'z'}\}^T \quad (4)$$

式(3)は、次式のように2つに分けて表わされる。

$$\varepsilon' = \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{\xi} \\ \varepsilon'_{\eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Sigma B_{\xi i} d \\ \Sigma B_{\eta i} d \end{Bmatrix} \quad (5)$$

ここで、 ε'_{ξ} と ε'_{η} は、局所座標系での変位成分(u', v', w')により表される面内ひずみと自然座標系(ξ, η, ζ)で仮定される横せん断ひずみであり、次式で示される。

$$\varepsilon'_{\xi} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon'_{\eta} = \begin{Bmatrix} \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = (2/h) J^{-1} \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi\zeta} \\ \gamma_{\eta\zeta} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

板の中央面に垂直な応力成分 $\sigma_{z'}$ を無視することにより、5つの成分をもつ応力とひずみの構成式が容易に求められる。すなわち、応力ベクトルとひずみベクトルは、

$$\sigma' = \{\sigma_{x'} \quad \sigma_{y'} \quad \tau_{x'y'} \quad \tau_{x'z'} \quad \tau_{y'z'}\}^T, \quad \varepsilon' = \{\varepsilon_{x'} \quad \varepsilon_{y'} \quad \gamma_{x'y'} \quad \gamma_{x'z'} \quad \gamma_{y'z'}\}^T \quad (7)$$

で示される。

したがって、 N_e 要素からなる板の全ポテンシャルエネルギー Π は、次式で表される。

$$\Pi = \sum_{e=1}^{N_e} \pi_e \quad (8)$$

ただし、 $\pi_e = (1/2) d_e^T [\int_{V_e} B^T D B dV] d_e - W$

で与えられる。ここで、 $dV = dx' dy' dz' = |J| d\xi d\eta d\zeta$ 、 W は外力によるポテンシャルである。ただし、異方性材から成る積層板の弾性マトリックス D は、次節で説明する。

したがって、有限要素の離散化概念を用いれば、全ポテンシャルエネルギーを最小化することにより、系の剛性方程式が、次式で与えられる。

$$K_{ij} d_j = f_i \quad (9)$$

2.2 積層板の弾塑性解析

はじめに、異方性材の弾性マトリックスとその降伏条件について示す。図-1に示すようにそれぞれ直交する2つの材料主軸(1, 2)が全体座標系(x, y)と回転角(配向角) θ を成す k 層のラミナの構成式は、次式で示される。

$$\{\sigma\}_k = [D]_k \{\varepsilon\}_k; \quad \{\sigma\}_k = \{\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \tau_{12} \quad \tau_{13} \quad \tau_{23}\}_k, \quad \{\varepsilon\}_k = \{\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \gamma_{12} \quad \gamma_{13} \quad \gamma_{23}\}_k \quad (10)$$

この弾性マトリックス、 $[D]_k$ は、 $[D]_k = [T]^T [D_0]_k [T]$ で与えられる。ただし、 $[T]$ は座標変換マトリックス¹⁶⁾、 $[D_0]_k$ は弾性マトリックスであり、次式で示される。

$$[D_0]_k = \begin{bmatrix} \underline{D}_{11} & \underline{D}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{D}_{12} & \underline{D}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{D}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{D}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{D}_{55} \end{bmatrix}_k, \quad [D]_k = \begin{bmatrix} \underline{D}_{11} & \underline{D}_{12} & \underline{D}_{16} & 0 & 0 \\ \underline{D}_{12} & \underline{D}_{22} & \underline{D}_{26} & 0 & 0 \\ \underline{D}_{16} & \underline{D}_{26} & \underline{D}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{D}_{44} & \underline{D}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \underline{D}_{45} & \underline{D}_{55} \end{bmatrix}_k \quad (11)$$

ここで、 $\underline{D}_{11} = E_{11}/(1-\nu_{12}\nu_{21})$ 、 $\underline{D}_{22} = E_{22}/(1-\nu_{12}\nu_{21})$ 、 $\underline{D}_{12} = E_{22}\nu_{12}/(1-\nu_{12}\nu_{21})$ 、 $\underline{D}_{66} = G_{12}$ 、 $\underline{D}_{44} = G_{13}$ 、 $\underline{D}_{55} = G_{23}$ である。 E_{11} と E_{22} はそれぞれ材料主軸方向の弾性係数、 ν_{12} はポアソン比、 G_{12} は面内せん断断係数、 G_{13} と G_{23} は横せん断弾性係数である。

次に、異方性の大きな複合材の弾塑性挙動は、初期降伏条件、塑性流れ則やひずみ硬化則に支配される。これまで、繊維強化複合材のための種々の破損(降伏)基準が提案されているが¹²⁾、ここでは、次式で与えられるHillの異方性理論に基づくHuber-Misesの降伏条件を適用する。

$$F(\sigma, \kappa) = f(\sigma) - Y(\kappa) \quad (12)$$

ここで、 $f(\sigma)$ は局所座標系での応力関数であり、また、降伏レベルを示す $Y(\kappa)$ は歪み硬化係数の関数で表される。したがって、 k 積層での塑性ポテンシャル、 f_k または相当応力、 σ_k は次式で与えられる。

$$f_k^2 = \sigma_k^2 = \{ \alpha_1 \sigma_{11}^2 + 2\alpha_{12} \sigma_{11} \sigma_{22} + \alpha_2 \sigma_{22}^2 + \alpha_3 \tau_{12}^2 + \alpha_4 \tau_{13}^2 + \alpha_5 \tau_{23}^2 \}_k$$

$$= \{\sigma\}_k^T [A]_k \{\sigma\}_k = 0 \quad (13)$$

$$[A]_k = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{12} & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_5 \end{bmatrix}_k \quad (14)$$

ただし、 α_i は6つの独立した異方性パラメータであり、実験により求めなければならない値である²⁾。
したがって、全体座標系X-Y-Zでの相当応力も座標変換を行うことにより、次式から求められる。

$$\sigma_k^2 = \{\sigma_{x,y,z}\}_k^T [T]^T [A]_k [T] \{\sigma_{x,y,z}\}_k \quad (15)$$

ここで、材料主軸1の引張り降伏応力を σ_0 とすれば、第k層での異方性パラメータは次式で与えられる。

$$\alpha_1 = \sigma_0^2 / \sigma_{11}^2, \quad \alpha_2 = \sigma_0^2 / \sigma_{22}^2, \quad \alpha_3 = \sigma_0^2 / \tau_{12}^2, \quad \alpha_4 = \sigma_0^2 / \tau_{13}^2, \quad \alpha_5 = \sigma_0^2 / \tau_{23}^2,$$

$$\alpha_{12} = 2(\sigma_0 / \sigma_{45})^2 - (1.0 + \alpha_2 + \alpha_3) / 2; \quad \sigma_{45} = \text{材料主軸1を} 45^\circ \text{回転させたときの降伏応力} \quad (16)$$

次に、k積層で定義されるひずみ増分は、弾性ひずみ増分 $d\varepsilon_e$ と塑性ひずみ増分 $d\varepsilon_p$ の和で与えられる。

$$d\varepsilon = d\varepsilon_e + d\varepsilon_p \quad (17)$$

この塑性ひずみ増分は、塑性流れ則より次式で与えられる。

$$d\varepsilon_p = d\lambda \partial f(\sigma) / \partial \sigma \quad (18)$$

ここで、 $f_k(\sigma)$ は塑性ポテンシャル、 $d\lambda$ は正のスカラー量である。

式(12)を偏微分すると、次のように書き換えられる。

$$a d\sigma - H' d\lambda = 0 \quad (19)$$

ここで、流れベクトル $a = \partial F / \partial \sigma$ であり、次式で定義される。

$$a = [\partial F / \partial \sigma_x, \quad \partial F / \partial \sigma_y, \quad \partial F / \partial \tau_{x'y}, \quad \partial F / \partial \tau_{x'z}, \quad \partial F / \partial \tau_{y'z}]^T, \quad (20)$$

$$H' = - \frac{1}{d\lambda} \cdot \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa \quad (21)$$

したがって、弾塑性構成式は、

$$d\sigma = D_{ep} d\varepsilon, \quad D_{ep} = D - \frac{D a a^T D}{H' + a^T D a} \quad (22)$$

で与えられる。Dは弾性マトリックスであり、 H' はひずみ硬化係数であり、次式で与えられる。

$$H' = d\sigma_0 / d\varepsilon_p \quad (23)$$

ただし、 $d\varepsilon_p$ は相当塑性ひずみ増分である。したがって、仮想仕事の原理より、弾塑性剛性マトリックス（接線剛性マトリックス） $\underline{K}$ が導ける。

$$\int_V (\varepsilon^T \sigma - \delta u^T b) dV = 0 \quad (24)$$

ここで、 $\delta u = N \delta d$, $\delta \varepsilon = B \delta d$ より、

$$\int_V \delta d^T (B^T \sigma - N^T b) dV = 0 \quad (25)$$

したがって、非線形つり合方程式は、

$$p(d) - f = 0, \quad f = \int_V N^T b dV \quad (26)$$

で与えられる。また、復元力ベクトル、 $p(d)$ は変位の関数であり、次式で与えられる。

$$p(d) = \int_V B^T \sigma(d) dV \quad (27)$$

よって、接線剛性マトリックス $\underline{K}$ は、

$$\underline{K} = \frac{\partial p}{\partial d} = \int_V B^T \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial d} dV = \int_V B^T D_{ep} B dV \quad (28)$$

で与えられる。式(26)で示される非線形方程式の解は、増分・反復法により求めている。

2. 3 積層板の弾塑性応答解析

衝撃荷重を受ける積層板の運動方程式は、仮想仕事の原理より導ける。すなわち、

$$\int_V (\delta \varepsilon)^T \sigma dV = \int_S (\delta u)^T t \sigma dS + \int_V (\delta u)^T (b - \rho \ddot{u} - c \dot{u}) dV \quad (29)$$

ここで、 σ は局所座標系での応力ベクトル、 t は表面力ベクトルであり、 b 、 ρu と $c u$ はそれぞれ物体力、慣性力及び減衰力ベクトル、 ρ は質量密度、 c は減衰係数である。 δu は仮想変位ベクトル、 $\delta \varepsilon$ は仮想ひずみベクトル、また u 、 $\dot{u}$ 、 $\ddot{u}$ はそれぞれ変位、速度及び加速度ベクトルであり、次式で与えられる。

$$u = \sum_{i=1}^N N_i(\xi, \eta, \zeta) d_i = N d, \quad \delta u = N \delta d, \quad \dot{u} = \partial u / \partial t = \sum_{i=1}^N N_i(\xi, \eta, \zeta) \dot{d}_i = N \dot{d}$$

$$\ddot{u} = \partial^2 u / \partial t^2 = \sum_{i=1}^N N_i(\xi, \eta, \zeta) \ddot{d}_i = N \ddot{d}, \quad \delta \varepsilon = \sum_{i=1}^N B_i \delta d_i = B \delta d \quad (30)$$

したがって、式(30)を式(29)に代入すると、この運動方程式は次のようになる。

$$M \ddot{d} + C \dot{d} + p(d) = f(t) \quad (31)$$

ただし、

$$M = \sum_{e=1}^{Ne} \int_{V_e} \rho N^T N dV, \quad C = \sum_{e=1}^{Ne} \int_{V_e} c N^T N dV,$$

$$p = \sum_{e=1}^{Ne} \int_{V_e} B^T \sigma dV,$$

$$f = \sum_{e=1}^{Ne} \int_{S_e} N^T t(t) dS + \sum_{e=1}^{Ne} \int_{V_e} N^T b(t) dV$$

である。もし、弾性状態であれば、次の関係式が用いられる。

$$\sigma = D \varepsilon, \quad p(d) = K d, \quad \text{また剛性マトリックス, } K = \sum_{e=1}^{Ne} \int_{V_e} B^T D B dV \quad (32)$$

一方、弾塑性状態では、式(31)より解るように、非線形運動方程式であるので、内力、 $p(d)$ の評価は先に示した接線剛性マトリックス、 K が用いられる。この非線形運動方程式は、時間増分と反復法を組合わせた Newmarkの数値積分法を用いて解いている。また、衝撃荷重はステップ荷重としてモデル化を行っている。

3. 数値計算例及び考察

ここでは、衝撃等分布荷重を受ける繊維強化型複合積層板の動的応答解析を行い、積層板の破壊モードや塑性(破壊)域の進展に与える板厚比、 h/a 、配向角、 θ 、積層数、 N や境界条件などの影響について解析を行う。特に、層分割要素を用いて、厚さ方向や面内方向への塑性域の進展や破壊モードを明らかにする。本

数値計算例で用いたグラフィット/エポキシ複合材の材料特性値⁹⁾は、表-1に示してある。また、各積層(ラミナ)は等厚な直交異方性であると仮定し、その減衰効果は無視する。ただし、積層板の塑性域の広がり、図-2に示すような各有限要素のガウス積分点と積層要素の中点で評価する。また、各積層は、板の下面層より番号、 N_i を付けている。なお、数値計算で用いた境

表-1 複合材料(グラフィット/エポキシ材)の材料特性値及び降伏応力⁹⁾

$E_{11} = 25E10^6 \text{ psi (172.3 MPa)}$	$\sigma_{.11} = 25.0 \text{ psi (172.3 KN/m}^2)$
$E_{22} = 1.0E10^6 \text{ psi (6.89 MPa)}$	$\sigma_{.22} = 5.0 \text{ psi (34.5 KN/m}^2)$
$G_{12} = 0.5E10^6 \text{ psi (3.45 MPa)}$	$\sigma_{.45} = 6.0 \text{ psi (41.3 KN/m}^2)$
$G_{13} = G_{23} = 0.2E10^6 \text{ psi (1.38 MPa)}$	$\tau_{.12} = 3.5 \text{ psi (24.1 KN/m}^2)$
$\nu_{12} = 0.25$	$\tau_{.13} = \tau_{.23} = 3.0 \text{ psi (20.7 KN/m}^2)$
$a = b = 50 \text{ in (1.27 m)}, \quad \rho = 1.0 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{in}^4, \quad E_p = G_p = 0.0$	

ここで、 E_{ij} の i, j は、材料主軸(1, 2, 3)を示す。

界条件は、表-2 に示してある。逆対称積層板では、面内を拘束している。

3. 1 積層板の弾塑性解析

図-3 には、等分布荷重を受ける周辺単純支持された3層から成る対称クロス・プライ正方形積層板 ($N=3, h/a=0.25$) の荷重-たわみ曲線に与える要素分割数の影響が示してある。ただし、対称性を考慮して、4分の1領域を $2 \times 2, 3 \times 3, 4 \times 4$ に分割している。弾塑性解析では、増分反復法を適用し、各増分荷重で用いた変位の収束判定値は 10^{-2} である。これより、要素分割数を 3×3 にとれば十分な収束値が得られている。また、図-4 は、この問題の板中央点での荷重-変位曲線に与える積層要素の分割数の影響を示している。ここで、各積層 (ラミナ) を2分割、3分割及び4分割している。これより、各積層を2分割程度にとれば、その影響がほとんど見られない。したがって、以下の数値計算例では、対称積層板の4分の1領域を 3×3 要素分割と2層要素に分割し、逆対称積層板では全領域を 4×4 要素に分割している。また、本手法の解析精度を確認するために、Owenら^{13, 14)}の解析結果と比較してみたが、十分に一致した結果が得られている。

図-5 と6 には、それぞれ板厚比が0.1と0.25の場合での等分布荷重を受ける周辺単純支持された5層から成る対称クロス・プライ正方形積層板の荷重-たわみ曲線、各荷重での厚さ方向及び面内方向への塑性域の進展状況と厚さ方向の応力分布図が示されている。ただし、図の中のb)とc)は、それぞれX軸に平行な各断面、①での厚さ方向の塑性域の進展と各ラミナ、 N_i での塑性域の広がり示している。また、d) には、それぞれ支持辺中央部と板中央部での厚さ方向の応力分布図($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xz}$)が示してある。これより、板厚比により、かなり異なった破壊モードと塑性域の進展が示されている。厚い場合には、横せん断変形の影響が大きく現れ、支持辺の中央部から塑性化が生じ、荷重の増加とともに厚さ方向に急激に進展している。また、曲げ応力が大きく生じてくる板中央部では、この応力に依存する破壊モードにより弱層が塑性化し、支持辺に向かって進展している。一方、薄い積層板では、板中央部で曲げ応力に依存する破壊モードにより表層ラミナに塑性化が生じ、荷重の増加とともに強化方向と垂直な境界辺に向かって進展している。

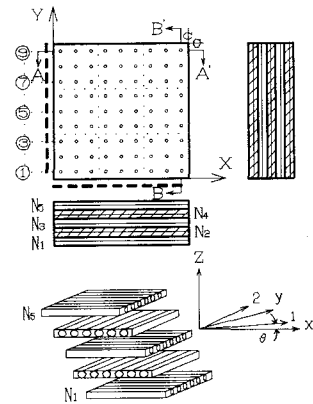


図-2 一方強化型複合積層板と離散化モデル

表-2 境界条件の定義

境界条件	対称積層板 クロス ($x=0$)	逆対称積層板 ツグナ ($x=0$)
単純支持	$V=W=\phi_y=0$	$U=V=W=\phi_y=0$
固定	$U=V=0$ $W=\phi_x=\phi_y=0$	$U=V=0$ $W=\phi_x=\phi_y=0$

ただし、 ϕ_x と ϕ_y はせん断回転角である。

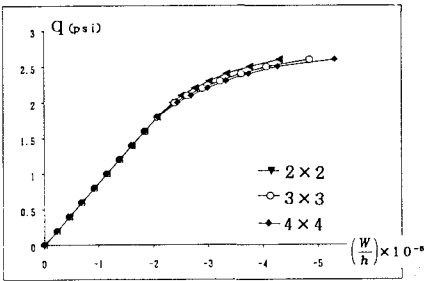


図-3 周辺単純支持された対称クロス・プライ正方形積層板の荷重-たわみ曲線に与える要素分割数の影響: $N=3, h/a=0.25, a/b=1.0$

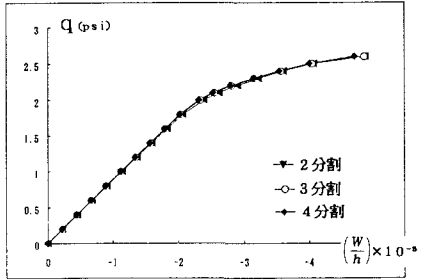
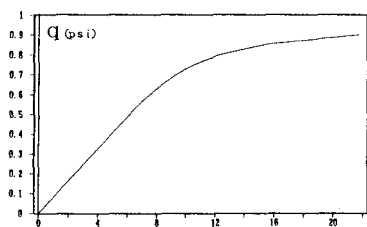
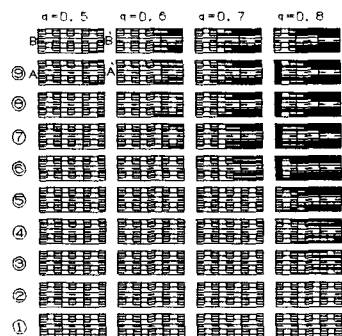


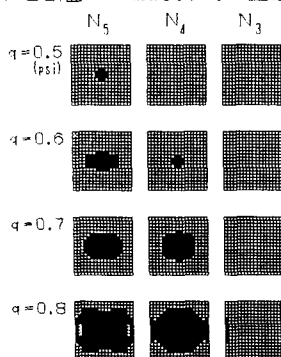
図-4 周辺単純支持された対称クロス・プライ正方形積層板の荷重-たわみ曲線に与える積層要素の分割数の影響: $N=3, h/a=0.25, a/b=1.0$



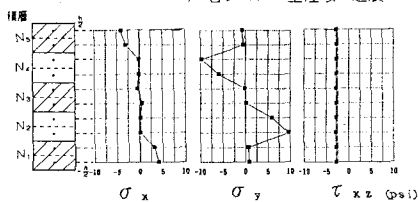
a) 板中央点での荷重たわみ曲線 $(\frac{W}{h}) \times 10^{-4}$



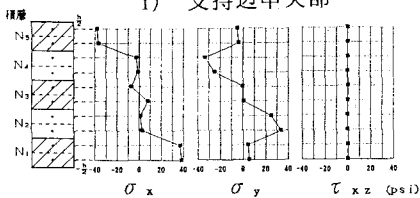
b) 各断面での板厚方向の塑性化



c) 各ラミナの塑性域の進展



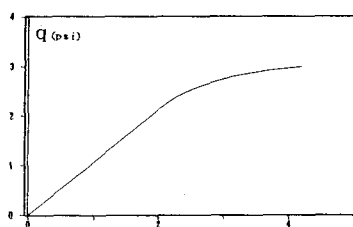
i) 支持辺中央部



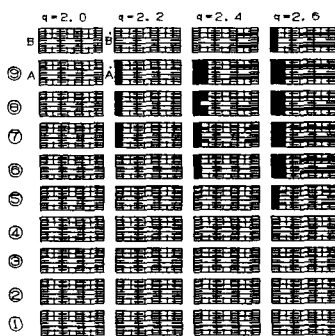
ii) 板中央部

d) 支持辺中央部と板中央部での厚さ方向の応力分布図, $q=0.7$ psi

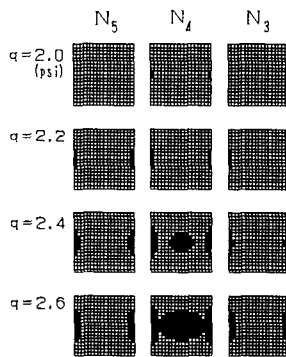
図-5 周辺単純支持された対称クロス・ブライ正方形薄板の荷重-たわみ曲線とその塑性性状: $N=5$, $h/a=0.1$, $a/b=1.0$



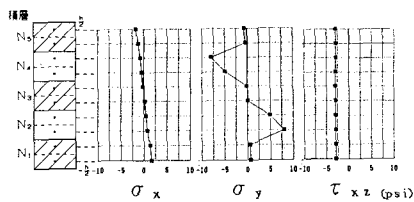
a) 板中央点での荷重たわみ曲線 $(\frac{W}{h}) \times 10^{-4}$



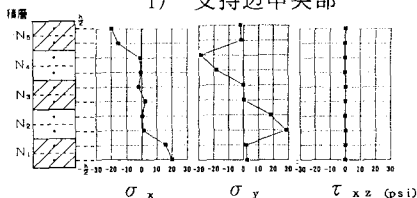
b) 各断面での板厚方向の塑性化



c) 各ラミナの塑性域の進展



i) 支持辺中央部



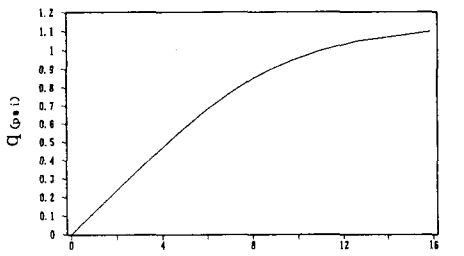
ii) 板中央部

d) 支持辺中央部と板中央部での厚さ方向の応力分布図, $q=2.4$ psi

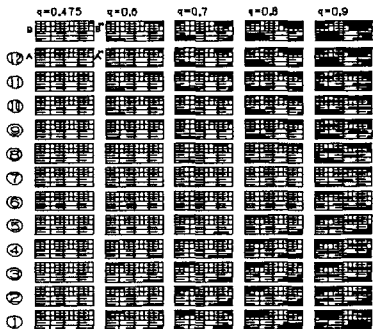
図-6 周辺単純支持された対称クロス・ブライ正方形薄板の荷重-たわみ曲線とその塑性性状: $N=5$, $h/a=0.25$, $a/b=1.0$

図-7と8には、それぞれ板厚比が0.1と0.25の場合での等分布荷重を受ける周辺単純支持され、配向角、 45° と4積層を持つ逆対称アングル・プライ正方形積層板 ($N=4, \theta=45^\circ, a/b=1.0$) の荷重-たわみ曲線及び各荷重での厚さ方向と面内方向への塑性域の進展状況が示されている。この積層板では、構造的な非対称性により、面内と面外挙動が連成するので、面内拘束を考慮している。これより、対称クロス・プライ積層板と比較して、かなり異なった破壊モードと塑性域の進展が示されている。薄い積層板の場合には、面内拘束の影響により境界辺の隅角部領域から塑性化が始まり、繊維強化方向と垂直な方向に向かって進展している。厚い場合には、面内拘束と横せん断変形の影響が大きく現れ、支持辺の中央部から塑性化が生じ、荷重の増加とともに支持辺周辺部と厚さ方向に進展し、板中央部に向かって伝播している。

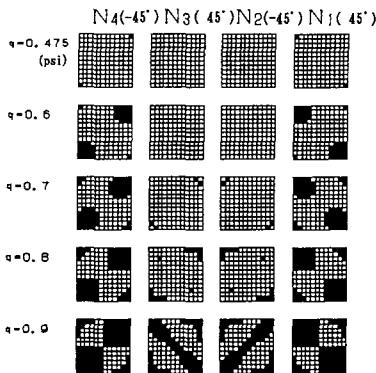
これらの結果より、繊維強化型複合積層板の弾塑性挙動は、板厚比や積層組に大きく依存し、薄板では、曲げ応力に依存する破壊モードが顕著に現れ、厚板では横せん断応力に依存する破壊モードが卓越してくる。また、逆対称型の積層板では、面内拘束が破壊パターンやその進展方向に大きな影響を与えている。



a) 板中央点での荷重-たわみ曲線 ($W/h \times 10^{-3}$)

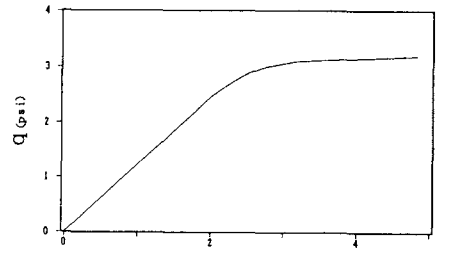


b) 各断面での板厚方向の塑性化

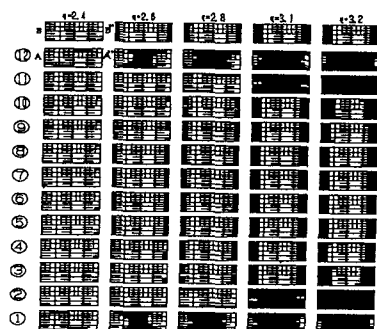


c) 各ラミナの塑性域の進展

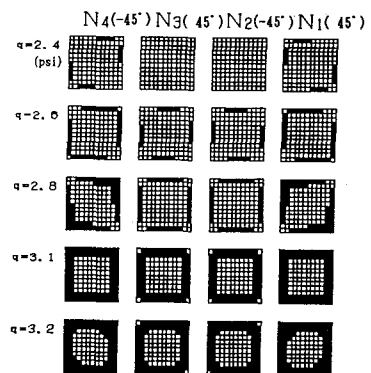
図-7 周辺単純支持された逆対称アングル・プライ正方形積層板の荷重-たわみ曲線とその塑性性状: $N=4, h/a=0.1, a/b=1.0$



a) 板中央点での荷重-たわみ曲線 ($W/h \times 10^{-3}$)



b) 各断面での板厚方向の塑性化



c) 各ラミナの塑性域の進展

図-8 周辺単純支持された逆対称アングル・プライ正方形積層板の荷重-たわみ曲線とその塑性性状: $N=4, h/a=0.25, a/b=1.0$

3. 2 積層板の衝撃弾塑性応答解析

ステップ衝撃荷重を受ける対称クロス・プライ積層板と逆対称アングル・プライ積層板の弾塑性応答解析を行い、これらの積層板の塑性（破壊）域の進展とその破壊モードについて検討する。

はじめに、ステップ荷重 $q = 1.5$ psi を受ける周辺単純支持された3層から成る対称クロス・プライ積層板の中央点での動たわみ曲線に与える要素分割数の影響が図-9に示されている。ここで、対称性を考慮して、4分の1領域を 2×2 、 3×3 、 4×4 に分割している。比較のために、弾性応答曲線に与える影響についても示してある。ただし、各積層（ラミナ）を2層分割し、板厚比、 $h/a = 0.25$ に仮定している。これより、 3×3 要素分割にとればこれによる影響は小さいので、今後の数値計算例では 3×3 要素分割を用いている。図-10には、同じ条件での動たわみ曲線に与える層分割数の影響が示してある。ここでは、各積層を2分割、3分割、4分割に離散化している。これより、各積層の分割数を2にとれば、これによる影響がほとんど見られない。なお、Newmarkの β 法($\beta = 1/4$)を用いた場合の時間ステップは0.001秒にとれば十分な収束値が得られている。図-11には、この積層板の弾性応答解析の精度を確認するために、モーダル解析法¹⁸⁾と比較した結果が示してある。また、他の有限要素法¹⁸⁾による結果と比較してみたが、十分な精度で一致した結果が得られている。

次に、衝撃分布荷重を受ける対称クロス・プライ積層板と逆対称アングル・プライ積層板の弾塑性応答解析を行い、これらの積層板の破壊モードや厚さ方向及び面内方向への塑性域の進展状況に与える板厚比、配向角や境界条件などの影響について検討を行う。

図-12には、 $q = 0.4$ psi の衝撃荷重を受ける、5積層から成る比較的薄い周辺単純支持された対称クロス・プライ積層板 ($h/a = 0.1$) の中央点の動たわみ曲線と、各時刻での厚さ方向と各ラミナの面内方向への塑性域の進展状況が示されている。ただし、塑性域は、各有限要素のガウス積分点と各積層要素の中心で求めた結果を図示したものである。これより、薄い対称クロス・プライ積層板の破壊特性は、強化方向の曲げ応力が卓越する板中央部での表層ラミナに塑性域が生じ、時間の経過とともに弱層ラミナにも塑性域が進展し、支持辺に向かって塑性化が伝播している。また、周辺単純支持された5層から成る厚い対称クロス・プライ積層板 ($h/a = 0.25$) の弾塑性応答曲線とその塑性域の進展状況が図-13に示してある。ただし、衝撃荷重の大きさを $q = 2.0$ psi に仮定している。これより、薄い場合と異なり、横せん断変形の影響が顕著にみられ、横せん断応力が卓越する支持辺の中央部での弱層ラミナが塑性化し、厚さ方向に急激に塑性化が進展している。また、時間の経過とともに曲げ応力が大きく生じる板中

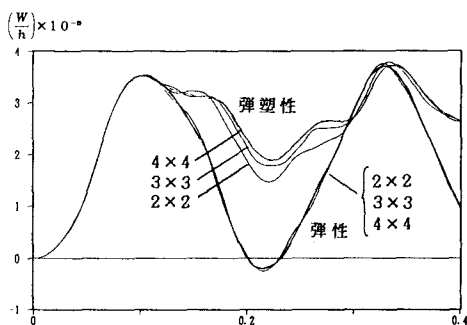


図-9 周辺単純支持された対称クロス・プライ正方形積層板の動たわみ曲線に与える要素分割数の影響: $N=3$, $h/a=0.25$, $a/b=1.0$, $q=1.5$ (psi)

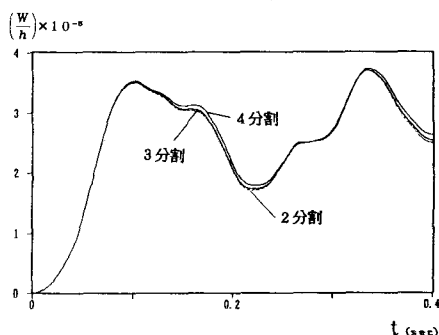


図-10 周辺単純支持された対称クロス・プライ正方形積層板の動たわみ曲線に与える層分割数の影響: $N=3$, $h/a=0.25$, $a/b=1.0$, $q=1.5$ (psi)

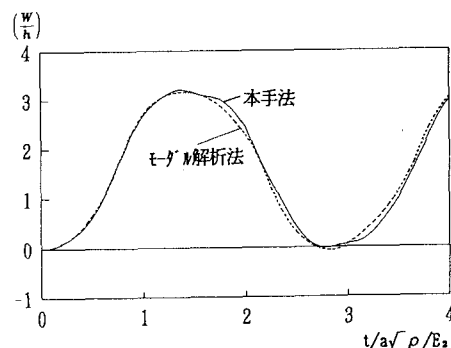
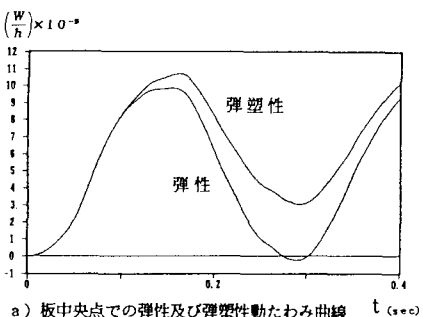


図-11 弾性たわみ応答の精度比較: $N=7$, $E_1/E_2=30$, $G_{12}/E_2=G_{13}/E_2=0.6$, $G_{23}/E_2=0.5$, $\nu_{12}=0.25$, $h/a=0.2$, $a/b=1.0$

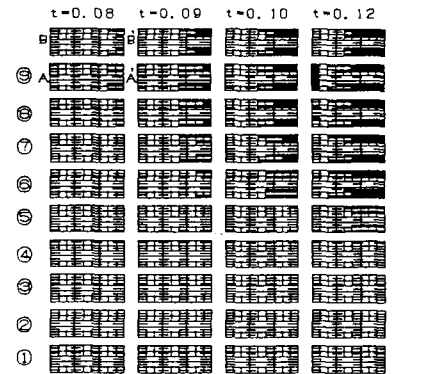
図-12には、 $q = 0.4$ psi の衝撃荷重を受ける、5積層から成る比較的薄い周辺単純支持された対称クロス・プライ積層板 ($h/a = 0.1$) の中央点の動たわみ曲線と、各時刻での厚さ方向と各ラミナの面内方向への塑性域の進展状況が示されている。ただし、塑性域は、各有限要素のガウス積分点と各積層要素の中心で求めた結果を図示したものである。これより、薄い対称クロス・プライ積層板の破壊特性は、強化方向の曲げ応力が卓越する板中央部での表層ラミナに塑性域が生じ、時間の経過とともに弱層ラミナにも塑性域が進展し、支持辺に向かって塑性化が伝播している。また、周辺単純支持された5層から成る厚い対称クロス・プライ積層板 ($h/a = 0.25$) の弾塑性応答曲線とその塑性域の進展状況が図-13に示してある。ただし、衝撃荷重の大きさを $q = 2.0$ psi に仮定している。これより、薄い場合と異なり、横せん断変形の影響が顕著にみられ、横せん断応力が卓越する支持辺の中央部での弱層ラミナが塑性化し、厚さ方向に急激に塑性化が進展している。また、時間の経過とともに曲げ応力が大きく生じる板中

中央部に塑性域が生じ、強化方向の支持辺に向かって伝播している。

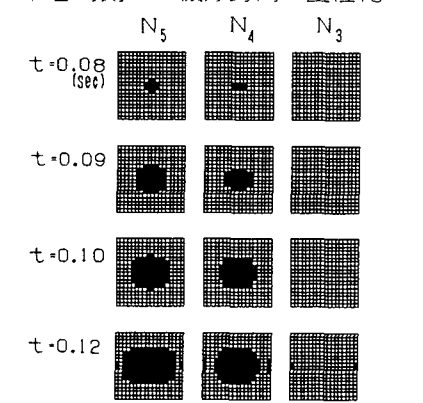
各ラミナごとの塑性域の進展状況からわかるように、板中央部での表層は塑性化されていないが、その下の弱層ラミナに大きな塑性域が生じている。このように、比較的厚い対称



a) 板中央点での弾性及び弾塑性動たわみ曲線 $t(\text{sec})$



b) 各時刻での板厚方向の塑性化



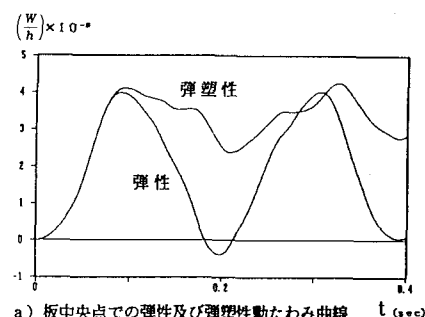
c) 各時刻でのラミナの塑性域の進展

次に、衝撃荷重を受ける逆対称アングル・プライ積層板の弾塑性応答性状に与える板厚比, h/a の影響について検討を行う。このような逆対称アングル・プライ積層板では、非対称な構造特性より、曲げと面内挙動が連成するので面内拘束を考慮する。ただし、積層数を4層にとり、各積層の配向角は 45° に仮定している。

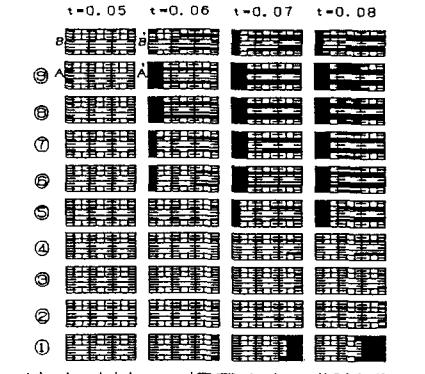
図-14 には、周

図-12 周辺単純支持された対称クロス・プライ正方形積層板の弾塑性応答曲線とその塑性性状: $N=5$, $h/a=0.1$, $a/b=1.0$, $q=0.4(\text{psi})$

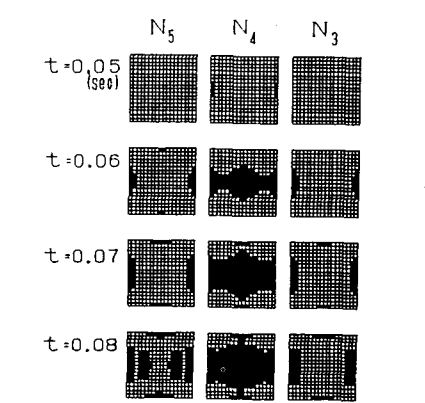
比較的薄い逆対称アングル・プライ積層板 ($h/a=0.1$, $N=4$, $\theta=45^\circ$) の板中央点の動たわみ曲線と、各時刻での厚さ方向及び面内方向への塑性域の進展状況が示してある。これより、対称クロス・プライ積層板と比較して、板厚方向及び面内方向に逆対称な塑性域の進展がみられる。特に、面内拘束を受けているので、隅角部を中心とした境界領域に塑性域が生じ、時間の経過とともに表層及び下層ラミナで繊維強化方向と垂直な方向に向かって塑性化が進展している。一方、図-15 には、同じ条件での厚い積層板 ($h/a=0.25$) の動的応答曲線と塑性域の進展状況が示されている。この場合には、横せん断変形の影響が大きく生じてくるので、この応力が卓越する支持辺の表層及び下層ラミナに塑性域が発生し、周辺部と厚さ方向に急激に塑性化



a) 板中央点での弾性及び弾塑性動たわみ曲線 $t(\text{sec})$



b) 各時刻での板厚方向の塑性化



c) 各時刻でのラミナの塑性域の進展

図-13 周辺単純支持された対称クロス・プライ正方形積層板の弾塑性応答曲線とその塑性性状: $N=5$, $h/a=0.25$, $a/b=1.0$, $q=2.0(\text{psi})$

が進み、時間の経過とともに板中央部へ向かって塑性域が伝播している。

図-16と17には、それぞれ2組の相対する2辺がそれぞれ単純支持と固定された対称クロス・プライ積層板 ($N=5$, $h/a=0.1$) と逆対称アングル・プライ積層板 ($h/a=0.1$, $N=4$, $\theta=45^\circ$) の衝撃応答曲線と塑性域の進展性状が示してある。これより、固定辺に大きな応力が生じてくるので、固定端から塑性化が発生し、時間の経過とともに板中央部に向かって塑性域の進展がみられる。

以上の計算結果より、積層板の破壊特性は板厚比に大きく依存し、厚板では横せん断応力による破壊モードが先行し、薄板では曲げ応力による破壊モードが顕著に見られる。また、この場合の塑性域の進展は板の厚さや積層組に大きく依存している。薄板では板中央部から境界辺に向かって進展し、厚板では境界辺から板中央部に向かって塑性域が伝播することが明らかになった。また、支持辺で生じる横せん断応力に依存する破壊モードは、時間の経過とともに板厚方向に急激に進展する。一方曲げ応力に依存する破壊モードでは、板厚の大きさにより、強化層が塑性化する場合と弱層が塑性化し進展する場合があります。対称クロス・プライ積層板と逆対称アングル・プライ積層板ではかなり異なった破壊特性が示されている。

図-18-a), b) には、それぞれ周辺単純支持された対称クロス・プライ積層板と逆対称アングル・プライ積層板 ($\theta=45^\circ$) の中央点での動たわみ曲線と与える積層数, N の影響が示してある。前者に対しては、積層数を3層, 5層, 9層に変化させ、後者では2層, 4層, 6層に変化させている。ただし、板厚比は0.25を用

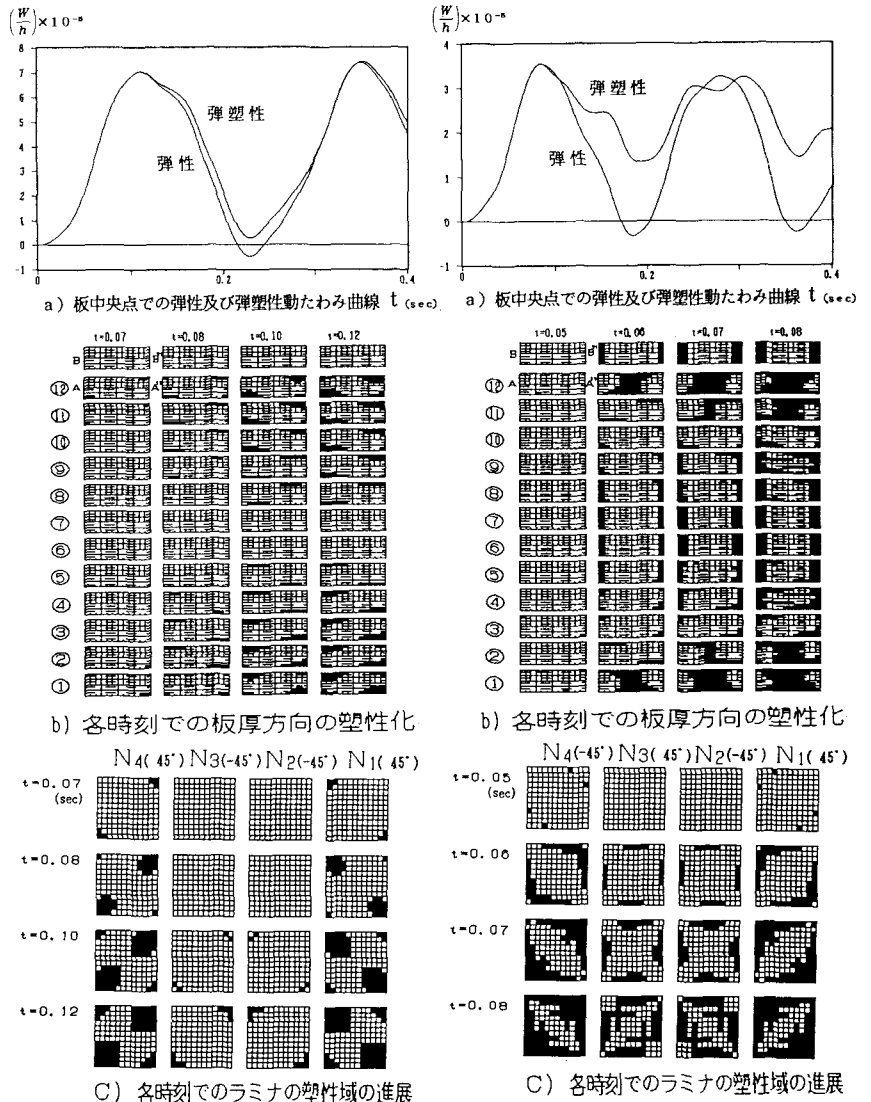


図-14 周辺単純支持された対称アングル・プライ正方形積層板の弾塑性応答曲線とその塑性性状: $N=4, h/a=0.1, a/b=1.0, q=0.4$ (psi) 図-15 周辺単純支持された逆対称アングル・プライ正方形積層板の弾塑性応答曲線とその塑性性状: $N=4, h/a=0.25, a/b=1.0, q=2.0$ (psi)

いている。これより、動的応答曲線に与える積層数の影響は、積層数の増加と共に剛性が增大するので変位が減少してくるが、ある積層数以上にとれば、その影響がかなり小さくなる。

図-19は、周辺単純支持された4層から成る逆対称アングル・プライ積層板 ($h/a=0.25$) の板中央での動的応答曲線に与える配向角, θ の影響を示したものである。ここで、配向角は $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ に変化させている。これより、動たわみ曲線に与える配向角の影響は顕著にみられる。固有値計算などで示されるように³⁾、配向角が 45° の場合が最も剛性と強度の高い積層構造を示している。

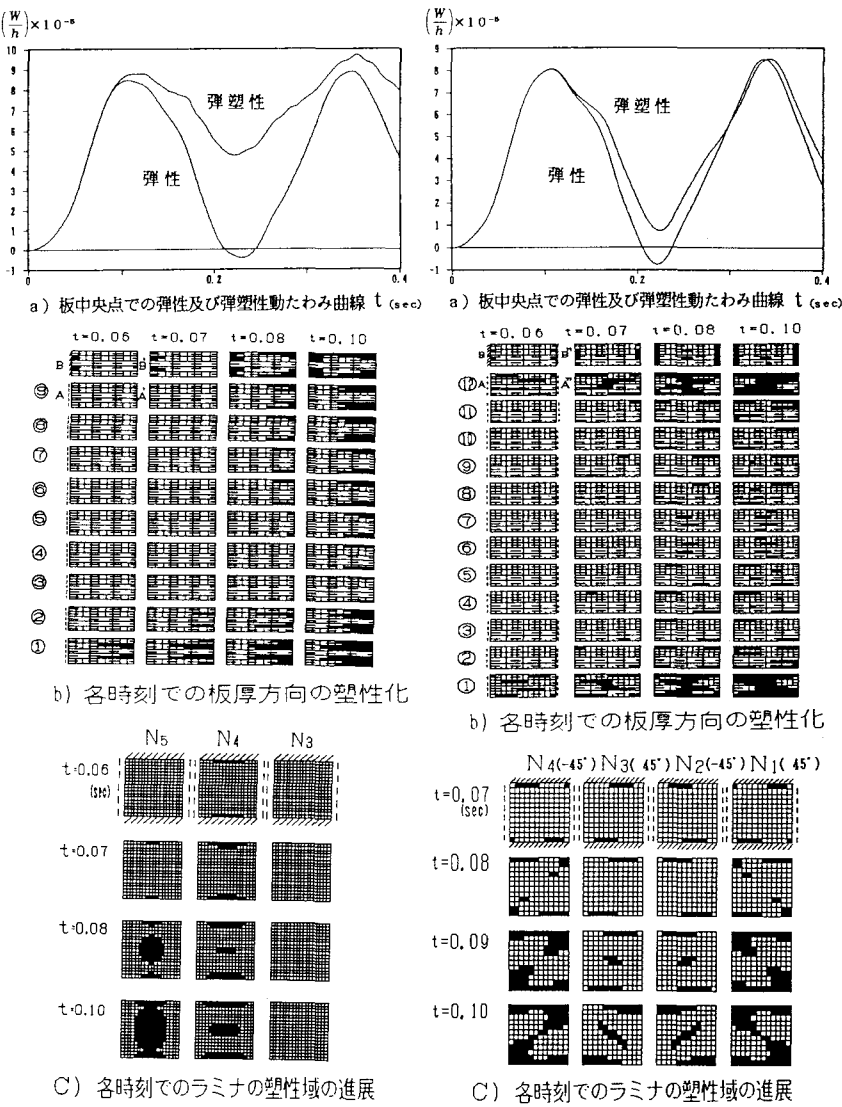


図-16 相対する2辺が単純支持と固定された対称クロス・プライ正方形積層板の弾塑性応答曲線とその塑性性状: $N=5, h/a=0.1, a/b=1.0, q=0.5$ (psi) 図-17 相対する2辺が単純支持と固定された逆対称アングル・プライ正方形積層板の弾塑性応答曲線とその塑性性状: $N=4, h/a=0.1, a/b=1.0, q=0.5$ (psi)

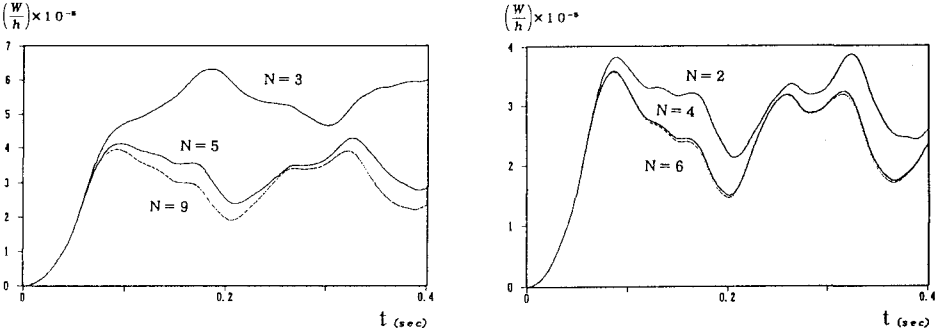


図-18 a) 周辺単純支持された対称クロス・プライ正方形積層板の動たわみ曲線に与える積層数, N の影響: $h/a=0.25, a/b=1.0, q=2.0$ (psi) 図-18 b) 周辺単純支持された逆対称アングル・プライ正方形積層板の動たわみ曲線に与える積層数, N の影響: $h/a=0.25, a/b=1.0, \theta=45^\circ, q=2.0$ (psi)

最後に、図-20-a), b)には、板厚比がそれぞれ0.1と0.25である周辺単純支持された積層板の動的応答曲線に与える積層組の影響が示されている。ここで、積層構造として対称クロス・プライ積層板(N=5)、逆対称クロス・プライ積層板(N=4)及び逆対称アングル・プライ積層板(N=4, $\theta=45^\circ$)の3種類を仮定している。これより、積層組の影響は、薄板ほど顕著にみられ、また逆対称アングル・プライ積層板が最も剛性と強度の高い積層構造であることがわかる。

4. あとがき

N層から成る一方向繊維強化型複合積層板の弾塑性応答解析を行い、積層板の破壊モードや破壊(塑性)域の進展などの破壊特性に与える板厚比、配向角、積層数や境界条件などの影響について検討し、次のような結果を得た。

- 1) 一方向繊維強化型積層板の破壊モードには、曲げ応力に依存する破壊モードと横せん断応力に依存する破壊モードがあり、それぞれ面内方向の塑性化と板厚方向の塑性化を進展させる。
- 2) 積層板の塑性化は、板厚比や積層組に大きく依存し、これによりかなり異なった破壊特性が示される。板厚が大きくなると、横せん断変形の影響が大きくなり、支持辺部での厚さ方向の塑性化を進展させる。対称クロス・プライ積層板と比較して、曲げと面内挙動が連成する逆対称アングル・プライ積層板では、その破壊パターンが面内応力の卓越する支持辺隅各部から発生する。
- 3) 時間の経過に伴う塑性域の伝播状況は、板厚比、積層組や境界条件に依存する。対称積層板では板中央部から支持辺に向かって進展するが、逆対称積層板では強化繊維方向と垂直な方向に伝播する。
- 4) 積層板の動的応答に与える積層数の影響は、ある積層数より大きくなる急激にその影響が小さくなる。また、逆対称アングル・プライ積層板の応答性状に与える配向角の影響は、その角度が 45° の場合が最も大きな剛性と強度が示されている。
- 5) 弾塑性応答に与える積層構造の影響は、逆対称アングル・プライ積層板が剛性と強度が最も大きな積層構造になっている。これは、逆対称積層板では面内と曲げ挙動の連成効果が破壊強度を高めているからと思われる。

なお、本研究は、平成5年度文部省科研費(一般研究(C))及び大同工業大学研究奨励金の援助を受けている。数値計算には、大同工業大学情報処理センター及び名古屋大学大型計算機センターを利用させて戴いた。また、貴重なご意見をいただいた査読者に謝意を表します。

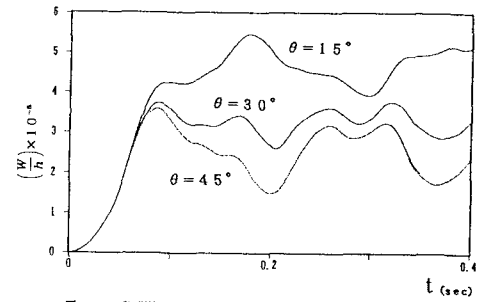


図-19 周辺単純支持された逆対称7/4°・7/4°(正方形)積層板の動的応答曲線に与える配向角, θ の影響: $N=4, h/a=0.25, a/b=1.0, q=2.0(\text{psi})$

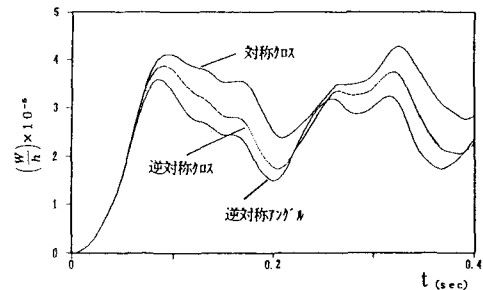


図-20 a) 周辺単純支持された板厚比($h/a=0.1$)の積層板の動的応答曲線に与える積層組の影響: $a/b=1.0, q=0.4(\text{psi})$

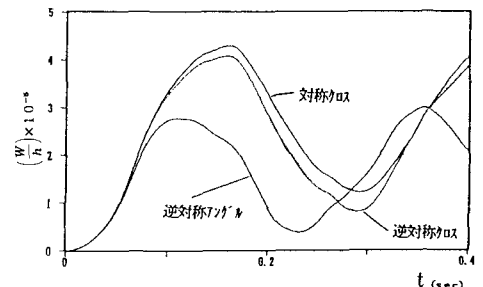


図-20 b) 周辺単純支持された板厚比($h/a=0.25$)の積層板の動的応答曲線に与える積層組の影響: $a/b=1.0, q=2.0(\text{psi})$

参考文献

- 1) 小林 昭: 先進複合材料と次世代航空機, 機械の研究, Vol. 44(2), pp. 1-4, 1992.
- 2) Vinson, J.R. and Sierakowski, R.L.: The behavior of structures composed of composite materials. Martinus Nijhoff Publishers, Lancaster, 1986.
- 3) Noor, A.K. and Burton, W.S.: Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates. Appl. Mech. Rev., Vol. 42(1), pp. 1-13, 1989.
- 4) 芳村 仁、三上 隆、朴勝振: 逆対称アングル・プライ積層板の自由振動. 構造工学論文集, Vol. 37A, pp. 911-919, 1991.
- 5) 三上 隆、朴勝振、芳村 仁: 初期応力を受ける逆対称アングル・プライ積層板の振動. 構造工学論文集, Vol. 38A, pp. 663-674, 1992.
- 6) Kapania, R.K. and Raciti, S.: Recent advances in analysis of laminated beams and plates, Part I-Shear effects and buckling. AIAA J., Vol. 27(7), pp. 923-934, 1989.
- 7) Kapania, R.K. and Raciti, S.: Recent advances in analysis of laminated beams and plates, Part II-Vibrations and wave propagation. AIAA J., Vol. 27(7), pp. 935-946, 1989.
- 8) 轟 章, 小林英男、足立邦夫: C/F／エポキシ複合材多方向強化積層板の層間はく離のメカニズム. 材料, Vol. 42, No. 474, pp. 304-310, 1993.
- 9) Owen, D.R.J. et al.: Elasto-plastic numerical analysis of anisotropic laminated plates by a refined finite element model, Computational Plasticity, Part 1, pp. 749-775, 1987.
- 10) Huang, H.C.: Static and Dynamic analyses of plates and shells. Springer-Verlag, 1989.
- 11) 水澤富作、深谷 純、近藤洋之: 衝撃荷重を受ける円筒シェルの動的応答解析について. 構造工学論文集, Vol. 37A, pp. 1543-1553, 1991.
- 12) 三木光範: 複合材料積層板の材料設計, 材料, vol. 30, pp. 93-98, 1982.
- 13) Owen, D.R.J. and Figueiras, J.A.: Anisotropic elasto-plastic finite element analysis of thick and thin plates. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 19, pp. 541-566, 1983.
- 14) Owen, D.R.J. and Figueiras, J.A.: Elasto-plastic analysis of anisotropic plates and shells by the semiloof element. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 19, pp. 521-539, 1983.
- 15) 水澤富作: 複合積層板の衝撃応答解析について. 土木学会中部支部研究発表会講演概要集, 1-27, pp. 55-56, 1993.
- 16) Hinton, E. and Owen, D.R.J.: Finite software for plates and shells. Pineridge Press, Swansea, 1984.
- 17) 江島裕章、横山貴浩、高橋和男、夏秋義広: 対称積層長方形板の動的安定性. 構造工学論文集, Vol. 39A, pp. 13-21, 1993.
- 18) Reddy, J.N.: Dynamic(transient) analysis of layered anisotropic composite-material plates. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 19, pp. 237-255, 1983.
- 19) Lee, J.D., Du, S. and Liebowitz, H.: Three-dimensional finite element and dynamic analysis of composite laminate subjected to impact. Comput. Struct., Vol. 19, pp. 807-813, 1984.
- 20) Reddy, J.N. and Chandrashekhara, K.: Recent advances in the nonlinear analysis of laminated composite plates and shells. Shock Vib. Digest, Vol. 19, pp. 3-9, 1987.

(1993年9月16日受付)